



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Metallberufe

J. Burmester
J. Dillinger

W. Escherich
R. Gomeringer

B. Schellmann
C. Scholer

Rechenbuch Metall

Lehr- und Übungsbuch

32. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 10307

Autoren:

Burmester, Jürgen	Dipl.-Ing., Studienrat	Soest
Dillinger, Josef	Studiendirektor	München
Escherich, Walter	Studiendirektor	München
Gomeringer, Roland	Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Balingen
Schellmann, Bernhard	Oberstudienrat	Wangen i. A.
Scholer, Claudius	Dipl.-Ing., Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Pliezhausen

Lektorat und Leitung des Arbeitskreises:

Claudius Scholer, Pliezhausen

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

32. Auflage 2016

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-1856-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt

Umschlag: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar

Umschlagfotos: Sauter Feinmechanik GmbH, 72555 Metzingen

Druck: Konrad Triltsch Print und digitale Medien GmbH, 97199 Ochsenfurt-Hohestadt

Vorwort

Das Rechenbuch Metall ist ein Lehr- und Übungsbuch für die Aus- und Weiterbildung in Fertigungs- und Werkzeugberufen. Es vermittelt rechnerische Grund- und Fachkenntnisse, fördert und vertieft das Verständnis für technische Abläufe und technologische Zusammenhänge. Das Buch eignet sich sowohl für den unterrichtsbegleitenden Einsatz als auch zum Selbststudium.

Zielgruppen:

- Industriemechaniker
- Feinwerkmechaniker
- Zerspanungsmechaniker
- Werkzeugmechaniker
- Fertigungsmechaniker
- Technischer Produktdesigner
- Verfahrensmechaniker
- Meister und Techniker

Der Inhalt des Rechenbuchs wurde dem Stand der Technik angepasst. Die Lernbereiche wurden neu gegliedert und erweitert, sodass sich die Lernfeldkonzeption im Unterricht umsetzen lässt.

Eine klare Gliederung in **Teil A Fachrechnen**, **Teil B Vertiefungsaufgaben** und **Teil C Projektaufgaben** unterstützt die Arbeit des Anwenders.

Im **Teil A Fachrechnen** bildet jeder Lernbereich eine in sich geschlossene Einheit mit identischem methodischem Aufbau. Nach der Einführung in das Fachgebiet werden die notwendigen Formeln hergeleitet und erläutert. Nachfolgende Musterbeispiele zeigen die technische Anwendung. Daran schließen sich Übungsaufgaben an, die nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet sind. Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad sind durch einen roten Punkt (●) gekennzeichnet. Auf weitere **Vertiefungsaufgaben** im Teil B wird jeweils durch einen grünen Pfeil (▶) verwiesen.

Der **Teil B Vertiefungsaufgaben** stellt einen Querschnitt durch alle Stoffgebiete dar und kann zur Leistungskontrolle und zur **Prüfungsvorbereitung** verwendet werden.

Im **Teil C Projektaufgaben** wird die Unterrichtskonzeption nach **Lernfeldern** in besonderer Weise unterstützt. Die Projektaufgaben umfassen neben den fachmathematischen Aufgaben auch Fragen der Technologie, Werkstofftechnik, Steuerungstechnik und Arbeitsplanung.

Der Inhalt des Rechenbuchs wurde in der **32. Auflage** dem Stand der Technik angepasst und um 8 Seiten erweitert. Die folgenden Lernbereiche wurden ergänzt bzw. neu aufgenommen:

- Beanspruchung auf Torsion
- Wahrscheinlichkeitsnetz
- Pneumatik/Hydraulik mit neuer Schaltplanbezeichnung
- Projektaufgabe Drehteil
- Wärmelehre

Die zahlreichen Bilder zu den Beispielen und Aufgaben sind in Form eines „Klebeanhanges“ erhältlich. Die „Lösungen“ zum **Rechenbuch Metall** ermöglichen nicht nur das Überprüfen der Ergebnisse, sondern enthalten außerdem den ausführlichen Lösungsweg der Aufgaben.

Kritische Hinweise und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen über lektorat@europa-lehrmittel.de.

Dank

Herzlich bedanken wir uns bei Herrn Roland Kilgus, der sich über viele Jahre als Lektor und Autor mit großem Engagement und mit hoher fachlicher Kompetenz für die Weiterentwicklung des Rechenbuchs Metall eingesetzt hat.

Technische Mathematik
9 ... 64

Technische Physik
65 ... 150

**Prüftechnik und
Qualitätsmanagement**
151 ... 170

Maschinenelemente
171 ... 183

Fertigungsplanung
184 ... 200

Fertigungstechnik
201 ... 256

Vertiefungsaufgaben
257 ... 280

Projektaufgaben
281 ... 316

Inhaltsverzeichnis

Lernfeldkompass für Industrie- und Werkzeugmechaniker	6
Lernfeldkompass für Zerspanungs- und Feinwerkmechaniker	7
Mathematische und technische Begriffe	8

Teil A – Fachrechnen

Technische Mathematik

Zahlensysteme	9
Grundrechnungsarten	11
Variable	11
Klammerausdrücke	11
Strich- und Punktrechnung	11
Bruchrechnen	14
Potenzieren	15
Radizieren	17
Allgemeine Berechnungen	
Schlussrechnung	19
Prozentrechnung	20
Zeitberechnungen	21
Winkelberechnungen	22
Technische Berechnungen	24
Formeln und Zahlenwertgleichungen	24
Größen und Einheiten	25
Darstellung großer und kleiner Zahlenwerte	25

Technische Physik

Bewegungen	65
Konstante Bewegungen	65
Beschleunigte und verzögerte Bewegungen	70
Kräfte	72
Darstellen von Kräften	72
Grafische Ermittlung von Kräften	72
Rechnerische Ermittlung von Kräften	74
Drehmoment, Hebelgesetz	76
Lagerkräfte	78
Umfangskraft und Drehmoment	80
Reibung	82
Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad	84
Mechanische Arbeit	84
Mechanische Energie	85
Mechanische Leistung	87
Wirkungsgrad	88
Einfache Maschinen	91
Fluidmechanik und Automation	94
Druck – Einheiten und Druckarten	94
Kolbenkraft in Pneumatik und Hydraulik	95
Luftverbrauch in der Pneumatik	98
Hydrostatik – Prinzip der hydraulischen Presse ..	100
Hydrodynamik – Volumenstrom	102
Leistungsberechnung in der Hydraulik	104
Logische Verknüpfungen	106

Prüftechnik und Qualitätsmanagement

Maßtoleranzen und Passungen	151
Maßtoleranzen	151
Passungen	153
ISO-Passungen	154

Rechnen mit physikalischen Größen	26
Umrechnen von Einheiten	26
Umstellen von Formeln	29
Technische Berechnungen mit dem Taschenrechner	32
Berechnungen im Dreieck	35
Lehrsatz des Pythagoras	35
Winkelfunktionen	38
Längen, Flächen, Volumen, Gewichtskraft	44
Längen und Teilung	44
Flächen und Verschnitt	48
Volumen	54
Masse und Gewichtskraft	55
Gleichdicke Körper, Masseberechnung mithilfe von Tabellenwerten	57
Volumenänderung beim Umformen	60
Diagramme und Funktionen	61

Werkstoffprüfung und Festigkeitslehre	113
Zugversuch	113
Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz	116
Beanspruchung auf Zug	119
Beanspruchung auf Druck	121
Beanspruchung auf Flächenpressung	122
Beanspruchung auf Abscherung, Schneiden von Werkstoffen	123
Beanspruchung auf Biegung	125
Beanspruchung auf Torsion	127
Wärmelehre	129
Temperatur	129
Längen- und Volumenänderung	129
Schwindung beim Gießen	130
Wärmemenge	132
Elektrotechnik	135
Ohmsches Gesetz	135
Leiterwiderstand	136
Temperaturabhängige Widerstände	137
Schaltung von Widerständen	138
Elektrische Leistung bei Gleichspannung	142
Wechselspannung und Wechselstrom	144
Elektrische Leistung bei Wechselstrom und bei Drehstrom	147
Elektrische Arbeit und Energiekosten	149
Transformator	150

Qualitätsmanagement	157
Prozesskennwerte aus Stichprobenprüfung	157
Statistische Berechnungen mit dem Taschenrechner	161
Maschinen- und Prozessfähigkeit	163
Statistische Prozesslenkung mit Qualitätsregelkarten	167

Maschinenelemente

Zahnradmaße 171
 Stirnräder mit Geradverzahnung 171
 Stirnräder mit Schrägverzahnung 172
 Achsabstand bei Zahnrädern 173

Fertigungsplanung

Standgrößen 184
Durchlaufzeit, Belegungszeit 185
Auftragszeit 188
Kostenrechnung 190

Fertigungstechnik

Drehen 201
 Schnittdaten 201
 Drehzahl 202
 Schnittkraft 203
 Schnitt- und Antriebsleistung 204
 Rautiefe 206
 Hauptnutzungszeit 207
 Kegelmaße 209
Fräsen 211
 Schnittdaten und Drehzahl 211
 Schnittkraft 212
 Schnitt- und Antriebsleistung 213
 Hauptnutzungszeit 215
Bohren 217
 Schnittdaten und Drehzahl 217
 Schnittkraft 218
 Schnitt- und Antriebsleistung 219
 Hauptnutzungszeit 220
Schleifen 222
 Hauptnutzungszeit beim Längs-Rundschleifen 222
 Hauptnutzungszeit beim Umfangs-
 Planschleifen 224
Indirektes Teilen 226

Übersetzungen bei Antrieben 175
 Einfache Übersetzungen 175
 Mehrfache Übersetzungen 178
Schraubenverbindung 180
 Schraubenverbindung mit axialer Betriebskraft .. 180
 Schraubenverbindung ohne Betriebskraft 182

Maschinenstundensatz 194
Deckungsbeitrag 196
Lohnberechnung 198

Koordinaten in NC-Programmen 228
 Geometrische Grundlagen 228
 Koordinatenmaße 230
Abtragen und Schneiden, Hauptnutzungszeit .. 234
Trennen durch Schneiden 236
 Schneidspalt 236
 Streifenmaße und Streifenausnutzung 238
Biegen 240
 Zuschnittermittlung 240
 Rückfederung 242
Tiefziehen 244
 Zuschnittdurchmesser 244
 Ziehstufen und Ziehverhältnisse 245
Exzenter- und Kurbelpressen 247
 Pressenauswahl 247
 Schneidarbeit 247
Spritzgießen 249
 Schwindung 249
 Kühlung 250
 Dosierung der Formmasse 251
 Kräfte 252
Schmelzschweißen 254

Teil B – Vertiefungsaufgaben

Lernfeldkompass 257
 Berechnungen im Dreieck 258
 Längen, Flächen, Volumen,
 Masse und Gewichtskraft 259
 Bewegungen, Übersetzungen 260
 Kräfte, Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad 261
 Kräfte, Flächenpressung, Kennwerte 262
 Kräfte an Bauteilen 263
 Maßtoleranzen, Passungen und Teilen 264
 Statistische Auswertungen 265
 Maschinen- und Prozessfähigkeit 267

Bohren, Senken, Reiben 268
 Drehen, Fräsen, Schleifen 269
 Koordinaten in NC-Programmen 271
 Schneiden und Umformen 272
 Schraub-, Stift-, Passfeder- und Lötverbindung .. 273
 Wärmeausdehnung und Wärmemenge 274
 Hydraulik und Pneumatik 275
 Grundlagen der Elektrotechnik 277
 Elektrische Leistung und Wirkungsgrad 278
 Elektrische Antriebe und Steuerungen 279
 Kalkulation 280

Teil C – Projektaufgaben

Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine 281
 Hubeinheit 284
 Zahnradpumpe 287
 Hydraulische Spannklaue 290
 Folgeschneidwerkzeug 293
 Tiefziehwerkzeug 296

Spritzgießwerkzeug 299
 Qualitätsmanagement 302
 Pneumatische Steuerung 305
 Elektropneumatik – Sortieren von Materialien .. 308
 Frästeil Spannplatte 311
 Drehteil Ritzelwelle 314

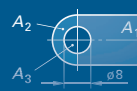
Anhang: Referenznorm DIN EN 81546-2 317
 Sachwortverzeichnis 318

Lernfelder für Industrie- und Werkzeugmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall						
Lernfeld	Industrie-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch		Werkzeug-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch	
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240		Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240	
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen ($v_c; n; f$) S. 201 Bohren ($v_c; n; f$) S. 217 Fräsen ($v_c; n; f$) S. 211 Kostenrechnen S. 190		Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen ($v_c; n; f$) S. 201 Bohren ($v_c; n; f$) S. 217 Fräsen ($v_c; n; f$) S. 211 Kostenrechnen S. 190	
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91		Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91	
4	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138		Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138	
5	Fertigen von Einzelteilen mit Werkzeugmaschinen	Prozesskennwerte Stichproben S. 157 Drehen ($F_c; P_c; t_h$) S. 201 Bohren ($F_c; P_c; t_h$) S. 217 Fräsen ($F_c; P_c; t_h$) S. 211		Formgeben von Bauelementen durch spanende Fertigung	Drehen ($F_c; P_c; t_h$) S. 201 Bohren ($F_c; P_c; t_h$) S. 217 Fräsen ($F_c; P_c; t_h$) S. 211 Indirektes Teilen S. 226	
6	Installieren und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Hydraulische Presse S. 98		Herstellen technischer Teilsysteme des Werkzeugbaus	Biegen, Rückfedern S. 240 Tiefziehen S. 244 Exzenter- und Kurbelpressen S. 247	
7	Montieren von technischen Teilsystemen	Festigkeitslehre S. 119 Lagerkräfte S. 78 Zugversuch S. 113		Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228	
8	Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228		Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Ohmsches Gesetz S. 135 Leiterwiderstand S. 136	
9	Instandsetzen von technischen Systemen	Reibung S. 82 Wärmelehre S. 129 Kostenrechnung S. 190		Herstellen von formgebenden Werkzeugoberflächen	Hauptnutzungszeit beim Schneiden S. 234 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Wechselspannung und Wechselstrom S. 144	
10	Herstellen und Inbetriebnehmen von technischen Systemen	Zahnradmaße S. 171 Übersetzungen S. 175 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Wechselspannung und Wechselstrom S. 144 El. Leistung S. 147 El. Energiekosten S. 149		Fertigen von Bauelementen in der rechnergestützten Fertigung	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228	
11	Überwachen der Produkt- und Prozessqualität	Qualitätsmanagement S. 157 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302		Herstellen der technischen Systeme des Werkzeugbaus	Trennen durch Schneiden S. 236 Werkstoffprüfung S. 113 Festigkeitslehre S. 119	
12	Instandhalten von technischen Systemen	Werkstoffprüfung S. 113 Festigkeitslehre S. 119		Inbetriebnehmen und Instandhalten von technischen Systemen des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement S. 157 El. Leistung S. 147 El. Energiekosten S. 149 Projekt: Folgeschneidwerkzeug S. 293	
13	Sicherstellen der Betriebsfähigkeit automatisierter Systeme	Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Projekt: Elektropneumatik S. 308		Planen und Fertigen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Spritzgießen S. 249 Projekt: Spritzgießwerkzeug S. 299 Projekt: Tiefziehwerkzeug S. 296	
14	Planen und Realisieren technischer Systeme	Projekt: Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine S. 281 Projekt: Hubeinheit S. 284		Ändern und Anpassen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement S. 157 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302	
15	Optimieren von technischen Systemen	Projekt: Zahnradpumpe S. 287 Projekt: Hydraulische Spannklaue S. 290		–	–	

Lernfelder für Zerspanungs- und Feinwerkmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall						
Lernfeld	Zerspanungsmechaniker	Kapitel im Rechenbuch		Feinwerkmechaniker	Kapitel im Rechenbuch	
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240		Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240	
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen ($v_c; n; f$) S. 201 Bohren ($v_c; n; f$) S. 217 Fräsen ($v_c; n; f$) S. 211 Kostenrechnen S. 190		Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen ($v_c; n; f$) S. 201 Bohren ($v_c; n; f$) S. 217 Fräsen ($v_c; n; f$) S. 211 Kostenrechnen S. 190	
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91		Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91	
4	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138		Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138	
5	Herstellen von Bauelementen durch spanende Fertigungsverfahren	Passungen S. 153 Drehen ($F_c; P_c; t_h$) S. 201 Bohren ($F_c; P_c; t_h$) S. 217 Fräsen ($F_c; P_c; t_h$) S. 211		Herstellen von Dreh- und Frästeilen	Passungen S. 153 Drehen ($F_c; P_c; t_h$) S. 201 Bohren ($F_c; P_c; t_h$) S. 217 Fräsen ($F_c; P_c; t_h$) S. 211	
6	Warten und Inspizieren von Werkzeugmaschinen	Standgrößen S. 184 Durchlauf-, Belegungszeit S. 185 Flächenpressung S. 122 Lagerkräfte S. 78 Reibung S. 82		Programmieren und Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228 Maschinenstundensatz S. 194 Deckungsbeitrag S. 196	
7	Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Zahnradpumpe S. 287 Hydraulische Presse S. 98		Herstellen technischer Teilsysteme	Zugversuch S. 113 Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz S. 116 Längen- und Volumenänderung S. 129 Flächenpressung S. 122 Lagerkräfte S. 78 Reibung S. 82	
8	Programmieren und Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Koordinaten in NC-Programmen S. 228 Qualitätsmanagement S. 157		Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Projekt: Elektropneumatik S. 308	
9	Herstellen von Bauelementen durch Feinbearbeitungsverfahren	Schleifen (t_s) S. 222 Abtragen und Schneiden (t_h) S. 234 ISO-Passungen S. 154		Instandhalten von Funktionseinheiten	Lagerkräfte S. 78 Standgrößen S. 184 Durchlauf-, Belegungszeit S. 185 Flächenpressung S. 122	
10	Optimieren des Fertigungsprozesses	Mechanische Leistung S. 87 Maschinen- und Prozessfähigkeit S. 163 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) S. 201 Fertigungsplanung S. 184		Feinbearbeiten von Flächen	Schleifen (t_s) S. 222 Abtragen und Schneiden S. 234 Auftragszeit S. 188 Kostenrechnung S. 190	
11	Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwerte aus Stichprobenprüfung S. 157 Statistische Prozesslenkung S. 167		Herstellen von Bauteilen und Baugruppen aus Kunststoff	Spritzgießen S. 249 Projekt: Spritzgießwerkzeug S. 299 Projekt: Folgschneidwerkzeug S. 293	
12	Vorbereiten und Durchführen eines Einzelfertigungsauftrages	Fertigungstechnik: Schnittdaten, Schnittkräfte S. 201 Projekt: Hydraulische Spannklaue S. 290 Maschinenstundensatz S. 194 Deckungsbeitrag S. 196		Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwert aus Stichprobenprüfung S. 157 Statistische Prozesslenkung S. 167	
13	Organisieren und Überwachen von Fertigungsprozessen in der Serienfertigung	Projekt: Frästeil Spannplatte S. 311 Projekt: Drehteil Ritzelwelle S. 314 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302		Instandhalten technischer Systeme	Maschinen- und Prozessfähigkeit S. 163 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) S. 201 Fertigungsplanung S. 184	
14	–	–		Fertigen von Schweißkonstruktionen ¹⁾	Schmelzschweißen S. 254	
15	–	–		Montieren, Demontieren und Inbetriebnehmen technischer Systeme ¹⁾	Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Qualitätsmanagement S. 157 Elektrotechnik S. 135	
16	–	–		Programmieren automatisierter Systeme und Anlagen ¹⁾	Projekt: Elektropneumatik S. 308	

1) Schwerpunkt Maschinenbau

Mathematische und physikalische Begriffe								
Begriffe	Erklärung	Beispiele						
Größen und Einheiten								
Physikalische Größen	Physikalische Größen sind objektiv messbare Eigenschaften von Zuständen und Vorgängen. Eine physikalische Größe ist das Produkt eines Zahlenwertes mit einer Einheit.	Bei der Länge $l = 30$ mm ist 30 der Zahlenwert und mm (Millimeter) die Einheit.						
Basisgröße	Man unterscheidet Basisgrößen und Basiseinheiten. Sie sind im internationalen Einheitensystem (SI = S ystème I nternational) festgelegt.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Basisgröße</th> <th>Formelzeichen</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Länge</td> <td>l</td> </tr> <tr> <td>Masse</td> <td>m</td> </tr> </tbody> </table>	Basisgröße	Formelzeichen	Länge	l	Masse	m
Basisgröße		Formelzeichen						
Länge	l							
Masse	m							
Basiseinheit	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Basiseinheit</th> <th>Zeichen</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Meter</td> <td>m</td> </tr> <tr> <td>Kilogramm</td> <td>kg</td> </tr> </tbody> </table>	Basiseinheit	Zeichen	Meter	m	Kilogramm	kg	
Basiseinheit	Zeichen							
Meter	m							
Kilogramm	kg							
Abgeleitete Größen und abgeleitete Einheiten	Die abgeleiteten Größen und deren Einheiten setzen sich aus den Basisgrößen und deren Einheiten zusammen.	Kraft = Masse · Beschleunigung $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$						
Umrechnung von Einheiten	Einheiten können in größere oder kleinere Einheiten oder andere Maßsysteme umgerechnet werden.	$1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = 1000 \text{ g}$ $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ dl} = 0,001 \text{ m}^3$						
Gleichungen und Formeln								
Gleichungen	Gleichungen beschreiben die Abhängigkeit mathematischer oder physikalischer Größen voneinander.	$16 + 9 = 100 - 75$ $x + 15 = 25$						
Formeln	Technische oder physikalische Gleichungen mit Formelzeichen bezeichnet man als Formeln.	$s = v \cdot t$ (Weg = Geschwindigkeit · Zeit)						
Formelzeichen	Formelzeichen bestehen aus <i>kursiv</i> gedruckten Buchstaben und kennzeichnen Größen. Sie ersetzen Wörter und dienen zum Rechnen mit Formeln.	m für Masse A für Fläche						
Größengleichungen	Größengleichungen stellen Beziehungen zwischen physikalischen Größen dar. Sie sind unabhängig von der Wahl der Einheit und können Zahlenwerte, z. B. π , mathematische Zeichen, z. B. $\sqrt{\quad}$, enthalten. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$						
Zahlenwertgleichungen	Die Zahlenwerte aller Formelzeichen sind an vorgegebene Einheiten gebunden. Der Zahlenwert des Ergebnisses erhält die gewünschte Einheit nur dann, wenn alle Zahlenwerte der Gleichung in den jeweils vorgeschriebenen Einheiten eingesetzt werden. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$P = \frac{Q \cdot p}{600}$ <p>P in kW Q in l/min p in bar</p>						
Zahlenwerte								
Konstanten	Konstanten sind gleichbleibende Zahlenwerte oder Größen bei Berechnungen in der Mathematik und Physik.	$\pi = 3,141592654\dots$ (Kreiszahl) $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)						
Koeffizienten	Koeffizienten sind Größen, die den Einfluss einer Stoffeigenschaft auf einen physikalischen Vorgang kennzeichnen.	$\alpha = 0,000\,012 \text{ 1/K}$ (α = Längenausdehnungskoeffizient für Stahl)						
Runden	Es gilt DIN 1333: Ist die über die angegebene Stellenzahl hinausgehende Ziffer = 5 oder > 5, wird aufgerundet. Ist die Ziffer < 5, wird abgerundet.	$25,5 \text{ N} \approx 26 \text{ N}$ $18,79 \text{ kg} \approx 18,8 \text{ kg}$ $164,4 \text{ cm}^3 \approx 164 \text{ cm}^3$						



Technische Mathematik

Zahlensysteme

Beim Rechnen wird allgemein das dezimale Zahlensystem verwendet. Die elektronische Datenverarbeitung (EDV) und die Automatisierungstechnik bauen jedoch auf dem dualen und hexadezimalen Zahlensystem auf, weil die elektronischen Bauelemente nur binäre¹⁾ Informationen, d. h. die Zustände 0 und 1, verarbeiten können.

Zahlensysteme setzen sich aus der Basis und den Zeichen zusammen (**Tabelle 1**).

Bezeichnungen:
 z_{10} Kurzzeichen für eine Dezimalzahl²⁾
 z_2 Kurzzeichen für eine Dualzahl³⁾
 z_{16} Kurzzeichen für eine Hexadezimalzahl²⁾

Dezimalzahlensystem

Beim dezimalen Zahlensystem werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Alle Zahlen können als Zehnerpotenzen geschrieben werden.

● **Beispiel:**

$$\begin{aligned} \text{Dezimalzahl } z_{10} &= 857 \\ z_{10} &= 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ &= 800 + 50 + 7 = 857 \end{aligned}$$

Die Zehnerpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren (**Tabelle 2**).

Duales (binäres) Zahlensystem

Beim dualen Zahlensystem werden lediglich die Ziffern „0“ und „1“ verwendet. Alle Zahlen werden als Potenzen der Basis 2 dargestellt (**Tabelle 2**).

■ Umwandlung von Dezimal- in Dualzahlen

● **Beispiel:**

Die Dezimalzahl $z_{10} = 14$ ist in eine Dualzahl umzuwandeln.

Lösung: Es wird das **Restverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 2 (**Tabelle 3**). Als Rest ergibt sich jeweils die „0“ oder die „1“. Die Zweierpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren, so erhält man: $z_2 = 1110$.

■ Umwandlung von Dual- in Dezimalzahlen

● **Beispiel:**

Die Dualzahl $z_2 = 10110$ ist in eine Dezimalzahl z_{10} umzuwandeln.

Lösung: Der Dualzahl z_2 werden ihre Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^4 von rechts nach links steigend zugeordnet (**Tabelle 4**).
 Alle Stellenwerte, z. B. 16 der Zweierpotenz 2^4 , werden mit der zugehörigen Dualzahl, hier „1“, multipliziert. Alle Produkte zusammen addiert ergeben die Dezimalzahl $z_{10} = 22$.

Tabelle 1: Zahlensysteme

Zahlensystem	Basis	Zeichen
Dual	2	0, 1
Dezimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Hexadezimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Tabelle 2: Dezimal-, Dual- und Hexadezimalzahlen

Zahlen im Dezimalsystem		Zahlen im Dualsystem					Zahlen im Hexadezimalsystem		
Zehnerpotenzen		Zweierpotenzen					Sechzehnerpotenzen		
10^1	10^0	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	16^2	16^1	16^0
	0	0	0	0	0	0			0
	1	0	0	0	0	1			1
	2	0	0	0	1	0			2
	3	0	0	0	1	1			3
	4	0	0	1	0	0			4
	5	0	0	1	0	1			5
	6	0	0	1	1	0			6
	7	0	0	1	1	1			7
	8	0	1	0	0	0			8
	9	0	1	0	0	1			9
1	0	0	1	0	1	0			A
1	1	0	1	0	1	1			B
1	2	0	1	1	0	0			C
1	3	0	1	1	0	1			D
1	4	0	1	1	1	0			E
1	5	0	1	1	1	1			F
1	6	1	0	0	0	0		1	0

Tabelle 3: Umwandlung der Dezimalzahl z_{10} in eine Dualzahl z_2

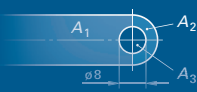
$14 : 2 = 7$ Rest 0
 $7 : 2 = 3$ Rest 1
 $3 : 2 = 1$ Rest 1
 $1 : 2 = 0$ Rest 1
 Ergebnis: $z_2 = 1110$

Tabelle 4: Umwandlung einer Dualzahl z_2 in eine Dezimalzahl z_{10}

Dualzahl z_2	1	0	1	1	0
Zweierpotenz	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stellenwert	16	8	4	2	1

Addition:
 $z_{10} = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 22$

1) binär (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend
 2) hexa (griech.) = sechs, dezimal (lat.) = 10
 3) dual (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend



Hexadezimals Zahlensystem

Bei Mikroprozessoren verwendet man häufig auch das hexadezimale Zahlensystem. Bei diesem werden neben den Ziffern 0 bis 9 auch die Buchstaben A bis F benutzt. Es hat den Vorteil, dass weniger Zeichen benötigt werden, als dies beim dezimalen und dualen Zahlensystem der Fall ist.

Die Zahlen werden in Potenzen der Basis 16 angegeben: 16^0 , 16^1 , 16^2 usw. (**Tabelle 2, vorherige Seite**). Die Hexadezimalzahl $z_{16} = A$ ergibt eine Dezimalzahl $z_{10} = 10$ oder $z_{16} = F$ ergibt $z_{10} = 15$.

Umwandlung von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen

Beispiel:

Die Dezimalzahl $z_{10} = 2016$ ist in eine Hexadezimalzahl z_{16} umzuwandeln.

Lösung: Auch hier wird das **Restverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 16 (**Tabelle 1**). Als Rest ergibt sich jeweils Zahlen von 0 bis 15. Die Zahlen von 10 bis 15 müssen in Buchstaben umgewandelt werden. Die 16er-Potenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren.

So erhält man das Ergebnis $z_{16} = 7 E 0$.

Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen

Beispiel:

Die Hexadezimalzahl $z_{16} = A2F$ ist in eine Dezimalzahl z_{10} umzuwandeln.

Lösung: Der Hexadezimalzahl z_{16} werden ihre 16er-Potenzen von 160 bis 162 von rechts nach links steigend zugeordnet (**Tabelle 2**).

Von den Buchstabenwerten A und F werden ihre Ziffernwerte gebildet. Diese Ziffernwerte werden jeweils mit ihren Stellenwerten multipliziert und alle Produkte addiert.

So ergibt sich die Dezimalzahl $z_{10} = 2607$.

Tabelle 1: Umwandlung einer Dezimalzahl z_{10} in eine Hexadezimalzahl z_{16}

$$\begin{array}{l} 2016 : 16 = 126 \text{ Rest } 0 \\ 126 : 16 = 7 \text{ Rest } 14 \\ 7 : 16 = 0 \text{ Rest } 7 \end{array}$$

Ergebnis: $z_{16} = 7 E 0$

(aus dem Rest 14 wird die Ziffer 0, siehe **Tabelle 2, vorherige Seite**)

Tabelle 2: Umwandlung der Hexadezimalzahl z_{16} in eine Dezimalzahl z_{10}

Hexadezimalzahl z_{16}	A	2	F
Ziffernwert	10	2	15
16er Potenz	16^2	16^1	16^0
Stellenwert	256	16	1
Addition: $z_{10} = 10 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 2560 + 32 + 15 = 2607$			

Aufgaben | Zahlensysteme

1. **Umwandlung von Dezimalzahlen (Tabelle 3).** Die Dezimalzahlen sind in Dualzahlen sowie in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 3	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Dezimalzahl	24	30	48	64	100	144	150	255	2000

2. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 4).** Wandeln sie die folgenden Dualzahlen in Dezimalzahlen um.

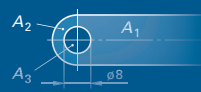
Tabelle 4	a	b	c	d	e	f
Dualzahl	100	1010	11111	110011	11110000	11111111

3. **Umwandlung von Hexadezimalzahlen (Tabelle 5).** Die Hexadezimalzahlen sind in Dezimalzahlen und in Dualzahlen umzuwandeln.

Tabelle 5	a	b	c	d	e	f
Hexadezimalzahl	68	A0	96	8F	ED	FF

4. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 6).** Die Dualzahlen sind in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 6	a	b	c	d	e	f
Dualzahlen	101010	111000	11001100	11100011	10010010	10001111



Grundrechnungsarten

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zählen zu den Grundrechnungsarten. In diesem Abschnitt werden außerdem das Potenzieren, Radizieren (Wurzelziehen) und das Bruchrechnen behandelt. Die Einführung der Rechenregeln wird mit Zahlenbeispielen erläutert. Die daraus abgeleiteten Beispiele aus der Algebra führen in das technische Rechnen mit Formeln ein.

Variable

In der Algebra werden **Variable** (Platzhalter) eingesetzt, die beliebige Zahlenwerte darstellen können (**Tabelle 1**). Als Variable werden meist Kleinbuchstaben verwendet.

Tabelle 1: Schreibweisen von Variablen

Zeichen	Beispiele
Das Multiplikationszeichen zwischen Zahl und Variable kann weggelassen werden.	$3 \cdot a = 3a$ $a \cdot b = ab$
Der Faktor 1 wird meist nicht geschrieben.	$1 \cdot b = b$

Klammerausdrücke (Klammerterm)

Mathematische Ausdrücke können mit Klammern zusammengefasst werden. Die in Klammern stehenden Werte müssen zuerst berechnet werden. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 2** beschrieben.

Tabelle 2: Klammerausdrücke

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Pluszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht, können weggelassen werden. Die Vorzeichen der Glieder bleiben unverändert.	$16 + (9 - 5)$ $= 16 + 9 - 5$ $= 20$	$a + (b - c)$ $= a + b - c$
Minuszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, können nur aufgelöst (weggelassen) werden, wenn alle Glieder in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.	$16 - (9 - 5)$ $= 16 - 9 + 5$ $= 12$	$a - (b - c)$ $= a - b + c$

Strich- und Punktrechnungen

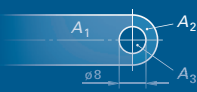
Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division können aufgrund ihrer Rechenzeichen in Strich- (–, +) und Punktrechnungen (·, :) unterteilt werden.

■ Strichrechnungen

Zu den Strichrechnungen zählen die Addition und die Subtraktion. Die Rechenregeln für Strichrechnungen können **Tabelle 3** entnommen werden.

Tabelle 3: Rechenregeln für die Strichrechnungen

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Vertauschungsgesetz Zahlen und Buchstaben können vertauscht werden.	$3 - 9 + 7$ $= 7 + 3 - 9$ $= -9 + 3 + 7$ $= 1$	$a - b + c$ $= a + c - b$ $= -b + a + c$
Zusammenfassung Einzelne Glieder können zu Teilsummen zusammengefasst werden.	$3 + 7 - 9$ $= (3 + 7) - 9$	$a + b - c$ $= (a + b) - c$
Summieren von Variablen Nur gleiche Variable können addiert oder subtrahiert werden.	–	$18a - 3a + 2b - 5b$ $= 15a - 3b$



■ Punktrechnungen

Multiplikationen und Divisionen bezeichnet man als Punktrechnungen. Die Rechenregeln für die Multiplikation sind in der **Tabelle 1** zusammengestellt.

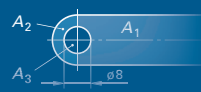
Tabelle 1: Rechenregeln für die Multiplikation

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Vertauschungsgesetz Faktoren dürfen vertauscht werden.	$3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ $= 5 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3$	$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$ $= c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$
Vorzeichenregeln		
Gleiche Vorzeichen Haben zwei Faktoren gleiche Vorzeichen, so wird das Produkt positiv; + mal + = +; - mal - = +	$2 \cdot 5 = 10$ $(-2) \cdot (-5) = +10 = 10$	$a \cdot x = ax$ $(-a) \cdot (-x) = +ax = ax$
Ungleiche Vorzeichen Haben zwei Faktoren verschiedene Vorzeichen, so wird das Produkt negativ; - mal + = -; + mal - = -	$3 \cdot (-8) = -24$ $(-3) \cdot 8 = -24$	$a \cdot (-x) = -ax$ $(-a) \cdot x = -ax$
Produkte mit Klammern		
Faktor mit Klammer Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, in dem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert. Wenn möglich, sollte man zuerst den Inhalt der Klammer zusammenfassen und dann den Wert der Klammer mit dem Faktor multiplizieren.	$7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$ $= 63$ oder: $7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 9 = 63$	$a \cdot (b + 2b)$ $= ab + 2ab$ $= 3ab$ oder: $a \cdot (b + 2b)$ $= a \cdot 3b$ $= 3ab$
Klammer mit Klammer Zwei Klammerausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Bei Zahlen können auch zuerst die Klammerausdrücke berechnet und danach kann das Produkt gebildet werden.	$(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 3 \cdot 10 + 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 10 + 5 \cdot (-7)$ $= 30 - 21 + 50 - 35$ $= 24$ oder: $(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 8 \cdot 3 = 24$	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$

Die Rechenregeln für die Division sind in **Tabelle 2** dargestellt. Das Rechenzeichen für die Division ist der Doppelpunkt (:) oder der Bruchstrich.

Tabelle 2: Rechenregeln für die Division

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Bruchstrich entspricht Klammer Der Bruchstrich fasst Ausdrücke in gleicher Weise zusammen wie eine Klammer und ersetzt das Divisionszeichen.	$\frac{3+4}{2} = (3+4) : 2 = 3,5$	$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$
Vertauschungsgesetz gilt nicht! Zähler und Nenner dürfen nicht vertauscht werden.	$3 : 4 \neq 4 : 3$ $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3}$	$a : b \neq b : a$ $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$
Vorzeichenregel		
Gleiche Vorzeichen Haben Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv. + geteilt durch + = + - geteilt durch - = +	$\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$ $\frac{-15}{-3} = (-15) : (-3) = +5$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
Ungleiche Vorzeichen Haben Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen, so ist das Ergebnis negativ. + geteilt durch - = - - geteilt durch + = -	$\frac{15}{-3} = 15 : (-3) = -5$ $\frac{-15}{3} = (-15) : 3 = -5$	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
Klammerausdrücke		
Klammer geteilt durch Wert Ein Klammerausdruck wird durch einen Wert (Zahl, Buchstabe, Klammerausdruck) dividiert, indem man jedes einzelne Glied in der Klammer durch diesen Wert dividiert. Man kann auch den Klammerausdruck erst berechnen und danach dividieren.	$(16 - 4) : 4$ $= 16 : 4 - 4 : 4$ $= 4 - 1 = 3$ oder $(16 - 4) : 4 = 12 : 4 = 3$	$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a}{b} - 1$



Gemischte Punkt- und Strichrechnungen

Kommen in einer Rechnung sowohl Strich- als auch Punktrechnungen oder Klammern vor, so ist die Reihenfolge der Lösungsschritte zu beachten. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 1** zusammengestellt.

Tabelle 1: Rechenregeln für gemischte Punkt- und Strichrechnungen

Reihenfolge der Lösungsschritte	Zahlenbeispiele	Algebraische Beispiele
1. Punktrechnungen 2. Strichrechnungen	$8 \cdot 4 - 18 \cdot 3$ $= 32 - 54$ $= -22$	$3a \cdot 2b - 4a \cdot 6b$ $= 6ab - 24ab$ $= -18ab$
	$\frac{16}{4} + \frac{20}{5} - \frac{18}{3} = 4 + 4 - 6 = 2$	$\frac{16a}{4} + \frac{3b}{b} - \frac{6c}{2c} = 4a + 3 - 3 = 4a$
Klammerausdrücke sowie gemischte Punkt- und Strichrechnungen:		
1. Klammern 2. Punktrechnungen 3. Strichrechnungen	$8 \cdot (3 - 2) + 4 (16 - 5)$ $= 8 \cdot 1 + 4 \cdot 11$ $= 8 + 44 = 52$	$a \cdot (3x + 5x) - b \cdot (12y - 2y)$ $= a \cdot 8x - b \cdot 10y$ $= 8ax - 10by$

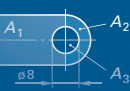
Aufgaben | Gemischte Punkt- und Strichrechnung

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 5 sind zu berechnen und auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma zu runden.

1. a) $217,583 - 27,14 \cdot 0,043 + 12$ c) $7,1 + 16,27 + 14,13 \cdot 17,0203$ e) $857 - 3,52 \cdot 97,25 - 16,386 + 1,1$	b) $16,25 + 14,12 \cdot 6,21$ d) $74,24 - 1,258 \cdot 12,8$ f) $119,2 + 327,351 - 7,04 \cdot 7,36$
2. a) $17,13 + 13,25 + 15,35 : 2$	b) $34,89 + 241,17 : 21,35 - 12,46 : 2,2$
3. a) $243 : 0,04 - 92,17 - 13,325 + 124,3 : 3,5$	b) $507 : 0,05 - 261,17 - 114,325 + 142,3 : 18,4$
4. a) $18 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$ c) $\frac{-96}{16} + \frac{65}{-15}$	b) $120 : (-6) - (-15) : 5$ d) $\frac{148}{37} - \frac{-85}{17}$
5. a) $\frac{24,75 + 15}{12,6} + \frac{38,7 - 2,08}{0,36} - \frac{44,2 \cdot 13,1}{20,05 - 1,7}$ c) $(23,7 - 2,8) \cdot \frac{15,1 - 3,7}{16,9}$	b) $34,2 \cdot \frac{23,4 - 8,6}{2,4} - \frac{13,8 + 22,7}{27 - 3,5} \cdot 20,6$ d) $\frac{25 \cdot (20,1 - 16,58)}{(34,85 - 2,97) \cdot 4,6}$

Die Ergebnisse der Aufgaben 6 bis 8 sind zu berechnen.

6. a) $3a \cdot 4b - 10a \cdot 2b$ c) $-8m \cdot 2n + 7,5m \cdot (-2n)$	b) $25x \cdot (-10y) + 13x \cdot (-5y)$ d) $(-16a) \cdot (-5c) - (-5a) \cdot (-2c)$
7. a) $\frac{30x}{10y} + \frac{15x}{2y}$ c) $\frac{7,5x}{2,5y} + \frac{33x}{22y}$	b) $\frac{12m}{15n} - \frac{30m}{1,5n}$ d) $\frac{-2x}{-8y} - \frac{-15x}{-60y}$
8. a) $-3a \cdot (8x - 5x) - 2a \cdot (20x - 12x)$	b) $-3x \cdot (8x - 5x) + 3x \cdot (-12x - 33x)$



Bruchrechnen

Der Bruchterm ist ein Zahlenverhältnis und besteht aus dem Zähler und dem Nenner. Der Nenner ist die Bezugsgröße und gibt die Gesamtheit der Teile an. Der Zähler bezeichnet die Anzahl der Teile.

$$\text{Bruchterm} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Das Bruchrechnen wird in der technischen Mathematik z. B. bei Teilkopf-, Kegel- oder Wechselläderberechnungen angewandt. Es wird hier nur so weit behandelt, als es für die genannten Anwendungen notwendig ist. In **Tabelle 1** sind verschiedene Arten von Brüchen aufgeführt.

Tabelle 1: Brucharten

Art	Beispiel	Kennzeichen	Wert	Bild
Echter Bruch	$\frac{1}{3}$	Zähler < Nenner	<1	
Unechter Bruch	$\frac{5}{4}$	Zähler > Nenner	>1	
Gemischte Zahl	$1\frac{1}{4}$	Ganze Zahl und ein echter Bruch	>1	
Dezimalbruch	0,75	Dezimalkomma	<1	

■ Erweitern, Kürzen und Umwandlung von Bruchtermen

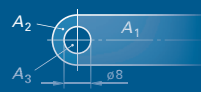
Brüche können erweitert, gekürzt oder umgewandelt werden. Dabei bleibt ihr Wert unverändert (**Tabelle 2**).

Tabelle 2: Rechenregeln für Bruchterme

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Erweitern Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert.	$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
Kürzen Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (bzw. denselben Buchstaben) dividiert.	$\frac{6}{24} = \frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{(a \cdot c):c}{(b \cdot c):c} = \frac{a}{b}$
Summen oder Differenzen Summen oder Differenzen sind vor dem Kürzen oder Erweitern zu berechnen.	$\frac{18-24}{260+20} = \frac{-6}{280} = \frac{-3}{140} = -\frac{3}{140}$	$\frac{c-b}{c+b}$ kann nicht gekürzt werden.
Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.	$\frac{3}{8} = 3:8 = 0,375$	–
Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch Ein endlicher Dezimalbruch wird in einen Bruch verwandelt, indem man in den Zähler alle Ziffern nach dem Komma schreibt. Der Nenner erhält eine 1 mit so vielen Nullen, wie der Zähler Stellen hat.	$0,48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$	–

Aufgaben | Bruchrechnen

- Die folgenden Brüche sind so zu erweitern, dass sich der Nenner 24 ergibt.
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{6}{8}$
- Die folgenden Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen.
a) $\frac{3}{21}$ b) $\frac{4}{48}$ c) $\frac{33}{66}$ d) $\frac{36}{45}$ e) $\frac{40}{132}$
- Die folgenden Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln.
a) $\frac{3}{21}$ b) $\frac{4}{48}$ c) $\frac{33}{66}$ d) $\frac{36}{45}$ e) $\frac{40}{132}$
- Die folgenden Dezimalbrüche sind in Brüche zu verwandeln.
a) 0,9375 b) 0,375 c) 0,85 d) 0,2 e) 0,333



Potenzieren

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren kann abgekürzt geschrieben werden. Die abgekürzte Schreibweise nennt man Potenz; der Rechengang wird als Potenzieren bezeichnet. Eine Potenz (**Bild 1**) besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Man unterscheidet Potenzen mit positiven und Potenzen mit negativen Exponenten.

■ Potenzen mit positiven Exponenten

● Beispiele:

Fläche des Quadrats (Bild 2)	$A = l \cdot l = l^2$ $= 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} = (5 \text{ mm})^2 = 25 \text{ mm}^2$
Volumen des Würfels (Bild 3)	$V = l \cdot l \cdot l = l^3$ $= 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} = (5 \text{ mm})^3$ $= 125 \text{ mm}^3$

Auch Produkte, Brüche oder Klammerausdrücke können die Basis von Potenzen sein.

● Beispiele:

Produkt:	$(5a)^2 = 5a \cdot 5a = 25a^2$
oder	$(5a)^2 = 5^2 \cdot a^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 25a^2$
Bruch:	$\frac{3^3}{b^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{b \cdot b \cdot b} = \frac{27}{b^3}$
Klammer:	$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

■ Potenzen mit negativen Exponenten

Eine Potenz, die im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

● Beispiele:

$\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$	$15^{-3} = \frac{1}{15^3}$;	$15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$;	$\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$;	$\text{g} \cdot (\text{kW} \cdot \text{h})^{-1} = \frac{\text{g}}{\text{kW} \cdot \text{h}}$

■ Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 4 und Tabelle 1**).

Die Zahl vor der Zehnerpotenz wird meist im Bereich zwischen 1 und 10 angegeben.

● Beispiele:

$4\,200\,000 = 4,2 \cdot 1\,000\,000 = 4,2 \cdot 10^6$
$0,000\,0042 = 4,2 \cdot 0,000\,001 = 4,2 \cdot 10^{-6}$
Die Schreibweise $4,2 \cdot 10^6$ ist übersichtlicher als $0,42 \cdot 10^7$ oder $42 \cdot 10^5$.

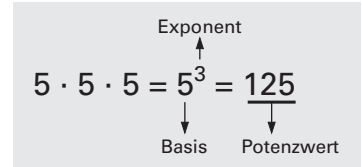


Bild 1: Potenz

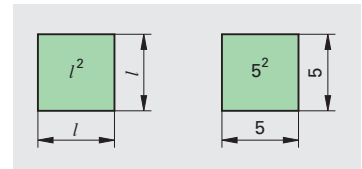


Bild 2: Quadrat

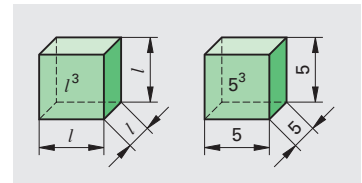


Bild 3: Würfel

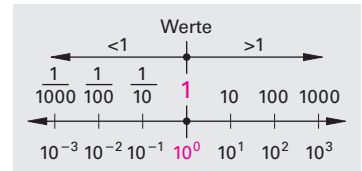
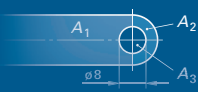


Bild 4: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen

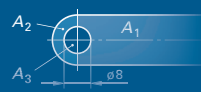
Schreibweise als		
ausgeschriebene Zahl	Zehnerpotenz	Vorsatzname
1000000	10^6	Mega (M)
100000	10^5	–
10000	10^4	–
1000	10^3	Kilo (k)
100	10^2	Hekto (h)
10	10^1	Deka (da)
1	10^0	–
0,1	10^{-1}	Dezi (d)
0,01	10^{-2}	Zenti (c)
0,001	10^{-3}	Milli (m)
0,0001	10^{-4}	–
0,00001	10^{-5}	–
0,000001	10^{-6}	Mikro (µ)



Beim Rechnen mit Potenzen gelten besondere Regeln (**Tabelle 1**):

Tabelle 1: Potenzieren

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Formel
<p>1. Addition und Subtraktion von Potenzen</p> <p>Potenzen dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl denselben Exponenten als auch dieselbe Basis haben.</p>	$2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2$ $= 5^2 \cdot (2 + 4)$ $= 5^2 \cdot 6$ $\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	$a^3 + a^3 = 2a^3$ $\frac{7}{d^n} - \frac{4}{d^n} = \frac{3}{d^n} = 3 \cdot d^{-n}$	$ax^n + bx^n$ $= (a + b) \cdot x^n$ $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^n} = \frac{a+b}{x^n}$ $= (a + b) \cdot x^{-n}$
<p>2. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis</p> <p>Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.</p>	$3^2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 3^5$ <p>oder:</p> $3^2 \cdot 3^3$ $= 3^{(2+3)} = 3^5$	$x^4 \cdot x^2$ $= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ $= x^6$ <p>oder:</p> $x^4 \cdot x^2$ $= x^{(4+2)} = x^6$	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
<p>3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten</p> <p>Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.</p>	$4^2 \cdot 6^2$ $= (4 \cdot 6)^2$ $= 24^2$ $= 576$	$6x^2 \cdot 3y^2$ $= 18x^2y^2$ $= 18(x \cdot y)^2$	$x^n \cdot y^n = (xy)^n$
<p>4. Division von Potenzen mit gleicher Basis</p> <p>Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.</p>	$\frac{4^3}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4$ <p>oder:</p> $4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$	$\frac{m^3}{m^2} = \frac{m \cdot m \cdot m}{m \cdot m} = m$ <p>oder:</p> $m^3 : m^2 = \frac{m^3}{m^2} = m^3 \cdot m^{-2}$ $= m^{3-2} = m^1 = m$	$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n}$ $= x^{m-n}$
<p>5. Division von Potenzen mit gleichen Exponenten</p> <p>Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.</p>	$\frac{15^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2$ $= 25$	$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
<p>6. Multiplikation von Potenzen mit einem Faktor</p> <p>Werden Potenzen mit einem Faktor multipliziert, so muss zuerst der Wert der Potenz berechnet werden.</p>	$6 \cdot 10^3$ $= 6 \cdot 1000$ $= 6000$ $7 \cdot 10^{-2} = \frac{7}{100} = 0,07$	-	-
<p>7. Potenzwert mit dem Exponenten Null</p> <p>Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Wert 1.</p>	$\frac{10^4}{10^4} = 10^{4-4} = 10^0 = 1$	$(m + n)^0 = 1$	$a^0 = 1$ $a \neq 0$



Radizieren (Wurzelziehen)

Das Radizieren¹⁾ oder Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden und dem Wurzelexponenten (**Bild 1**). Der Radikand steht unter dem Wurzelzeichen; aus dieser Zahl wird die Wurzel gezogen. Der Wurzelexponent steht über dem Wurzelzeichen und gibt an, in wie viel gleiche Faktoren der Radikand aufgeteilt werden soll.

Eine Wurzelrechnung kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Der Radikand erhält im Exponenten einen Bruch. Der Zähler entspricht dem Exponenten des Radikanden, der Nenner entspricht dem Wurzelexponenten.

Beispiel: $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1} = 9^{\frac{1}{2}}$

■ Quadratwurzel

$\sqrt{16}$ (sprich Quadrat-Wurzel aus 16 oder Wurzel aus 16) bedeutet, man sucht eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Wert 16 ergibt.

Beispiel: $\sqrt{16} = 4$, denn $4 \cdot 4 = 16$

Der Wurzelexponent 2 bei der Quadratwurzel wird meist weggelassen.

Beispiel: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt[2]{4^2} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{16} = 4$

■ Kubikwurzel

$\sqrt[3]{27}$ (sprich 3. Wurzel aus 27 oder Kubikwurzel aus 27) bedeutet, dass man eine Zahl sucht, die dreimal mit sich selbst multipliziert den Wert 27 ergibt.

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

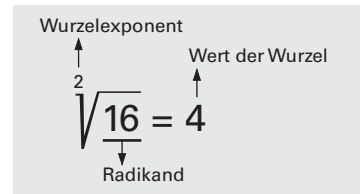


Bild 1: Darstellung einer Wurzel

Schreibweisen einer Wurzel

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Quadratwurzel

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

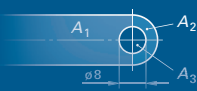
Kubikwurzel

$$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

Tabelle 1: Radizieren

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Formel
1. Addition und Subtraktion von Wurzeln Wurzeln dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben. Man addiert (subtrahiert) die Faktoren und behält die Wurzel bei.	$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$ $= (2+3)\sqrt{6}$ $= 5\sqrt{6}$	$8\sqrt{m} - 3\sqrt{m}$ $= (8-3)\sqrt{m}$ $= 5\sqrt{m}$	$a\sqrt{m} + b\sqrt{m}$ $= (a+b)\sqrt{m}$
2. Radizieren eines Produktes Ist der Radikand ein Produkt, so kann die Wurzel entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor gezogen werden.	$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$ oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ $= 3 \cdot 4 = 12$	$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. Radizieren einer Summe oder Differenz Ist der Radikand eine Summe oder eine Differenz, so kann nur aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen werden.	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16}$ $= \sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{(a-b)}$	$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{(a-b)}$
4. Radizieren eines Quotienten Ist der Radikand ein Quotient (Bruch), so kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner getrennt gezogen werden.	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{0,36} = 0,6$ oder $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} = 0,6$	$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

1) radix (lateinisch) Wurzel



Aufgaben | Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen)

1. Potenzschreibweise. Die Ausdrücke der Aufgaben a bis f sind in Potenzform zu schreiben.

a) $4a \cdot 2a \cdot a$

b) $16 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm}$

c) $2,5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 1,3 \text{ m}$

d) $\frac{6a}{2} \cdot \frac{5b}{3a} \cdot \frac{1}{5}b$

e) $0,5 \text{ cm} \cdot \frac{1}{10} \text{ cm} \cdot \frac{3}{4} \text{ cm}$

f) $16 \text{ m}^2 : 8 \text{ m}$

2. Zehnerpotenzen. Die Zahlen sind in Zehnerpotenzen zu verwandeln.

a) 100; 1 000; 0,01; 0,001; 1 000 000; 1/1 000 000

b) 55 420; 1 647 978; 356 763; 33 200

c) 0,033; 0,756; 0,0021; 0,000 02; 0,000 000 1

d) 1/10; 5/100; 7/1 000; 33/100; 321/1 000

3. Potenzschreibweise. Die folgenden Zahlen sind in Zehnerpotenzen umzuformen.

a) Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,790\,000 \text{ m/s}$

b) Umfang des Äquators $U = 40\,076\,594 \text{ m}$

c) Mittlerer Abstand der Erde von der Sonne $R = 149,5 \text{ Millionen km}$

d) Oberflächen der Erde $O = 510\,100\,933 \text{ km}^2$

4. Addition und Subtraktion. Die Potenzen sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a) $5b^3 + 7b^3 + 3b^3$

b) $9m^3 - 9n^3 + 12n^3 - 5m^3 - n^3$

c) $15x^4y - 3x^2y^3 - 5x^4y$

d) $2,6a^2 + 5,9a^3 - 3,1a^3 + 19,7a^2 - a^3$

5. Multiplikation und Division. Die Potenzen sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a) $4^2 \cdot 4^3$

b) $a^5 \cdot a^4$

c) $2x^2 \cdot 4x \cdot 5x^3$

d) $0,5b^3 \cdot 1,3b^2$

e) $441x^6 : 21x^2$

f) $51a^4b^3 : 17a^2b^3$

g) $\frac{49^3}{7^3}$

h) $\frac{57^2}{19^2}$

i) $\frac{6,8a^2}{0,17a^2}$

k) $\frac{(4a)^x}{a^x}$

6. Berechnung von Wurzeln. Folgende Wurzeln sind zu berechnen bzw. vereinfacht zu schreiben.

a) $\sqrt{49}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{0,36}$

b) $\sqrt[3]{0,008}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{9a^4}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}$; $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}}$

7. Berechnung von Wurzeln. Die Ergebnisse sind auf die zweite Stelle zu runden.

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{47}$; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt{\frac{121}{9}}$

b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{49}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt{\frac{1}{121}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

8. Wurzeln mit Variablen. Wie groß ist $\sqrt{x^2 + y^2}$ für die folgenden Werte?

a) $x = 8$; $y = 6$

b) $x = 10 \text{ m}$; $y = 7,5 \text{ m}$

c) $x = 0,48 \text{ cm}$; $y = 0,36 \text{ cm}$

Wie groß ist $\sqrt{c^2 - b^2}$ für die folgenden Werte?

a) $c = 15$; $b = 12$

b) $c = 2,5 \text{ m}$; $b = 1,5 \text{ m}$

c) $c = 0,2 \text{ dm}$; $b = 0,16 \text{ dm}$

9. Addition und Subtraktion. Die Wurzeln sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$

b) $2\sqrt{m} + 7\sqrt{m}$

c) $2m\sqrt{b} + 3n\sqrt{b}$

d) $5\sqrt{9} - 3\sqrt{9}$

e) $c\sqrt{c} - 2\sqrt{c}$

10. Multiplikation und Division. Die Ausdrücke sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

b) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7}$

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a}$

d) $\sqrt{16} \cdot 49$

e) $\sqrt{4x^2} \cdot y^2$

f) $\sqrt{81m^4} \cdot n^2$

g) $\sqrt{32} : \sqrt{8}$

h) $\sqrt{7ax} : \sqrt{7a}$

Allgemeine Berechnungen

Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)

Mit der Schlussrechnung wird, ausgehend von einer bekannten Größe (z. B. Stückzahl, Masse u. a.), ein Vielfaches oder ein Teil berechnet.

Bezeichnungen:

A_m Ausgangsmenge, z. B. St A_w Ausgangswert, z. B. kg
 E_m Endmenge, z. B. St E_w Endwert, z. B. kg

Schlussrechnung für direkt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich im gleichen Verhältnis, d. h. sie sind direkt proportional.

Beispiel: 25 Distanzplatten haben eine Masse $m = 2800$ g.
 Welche Masse haben 6 Distanzplatten (**Bild 1**)?

Grundaussage: Die Menge $A_m = 25$ Distanzplatten hat die Masse $A_w = 2800$ g.

Berechnung des Wertes für die Menge $A = 1$ Stück (St):

1 Distanzplatte hat die Masse $\frac{A_w}{A_m} = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} = 112 \frac{\text{g}}{\text{St}}$

Berechnung des Endwertes E_w für die Endmenge E_m :

$E_m = 6$ Distanzplatten haben die Masse $E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} \cdot 6 \text{ St} = 672 \text{ g}$

Schlussrechnung für indirekt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich in umgekehrtem Verhältnis, d. h., sie sind indirekt proportional.

Beispiel: Für die Montage von 12 Kettensägen benötigen 4 Mitarbeiter 3 Stunden. Wie viel Stunden benötigen 6 Mitarbeiter für die gleiche Anzahl Sägen (**Bild 2**)?

Grundaussage: Die Menge $A_m = 4$ Mitarbeiter benötigen die Zeit $A_w = 3$ Stunden.

Berechnung des Wertes für die Menge $A = 1$ Mitarbeiter:

1 Mitarbeiter benötigt $A_m \cdot A_w = 4 \cdot 3$ Stunden = 12 Stunden

Berechnung des Endwertes E_w für die Endmenge E_m :

$E_m = 6$ Mitarbeiter benötigen die Zeit $E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m} = \frac{4 \text{ Mitarbeiter} \cdot 3 \text{ h}}{6 \text{ Mitarbeiter}} = 2 \text{ h}$

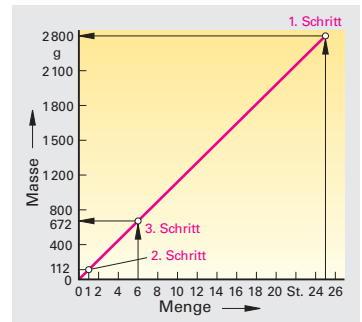


Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis

Endwert bei direkt proportionalem Verhältnis

$$E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m$$

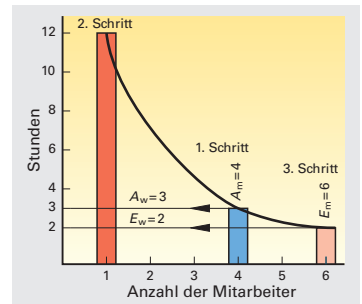


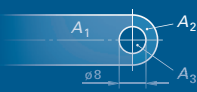
Bild 2: Indirekt proportionales Verhältnis

Endwert bei indirekt proportionalem Verhältnis

$$E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m}$$

Aufgaben | Schlussrechnung

- Werkstoffpreis.** Eine Gießerei berechnet für Stahlguss einen Preis von 1,08 €/kg. Wie viel kosten 185 Deckel mit einer Masse von je 1,35 kg?
- Schutzgasverbrauch.** Die Schweißnaht an einem Schiff ist 78 m lang. Nach 23 m geschweißter Naht wurde ein Schutzgasverbrauch von 640 l festgestellt. Wie viel l Schutzgas sind für die gesamte Fertigstellung der Naht erforderlich?
- Notstromaggregat.** Im 3-stündigen Betrieb verbrauchen 2 Notstromaggregate 120 l Kraftstoff. Wie lange können 3 Aggregate mit einem Treibstoffvorrat von 240 l betrieben werden?
- CuZn-Blech.** 4 m² eines 4 mm dicken Blechs aus CuZn37 haben eine Masse $m = 136$ kg. Welche Masse haben 10 m² Blech mit einer Blechdicke von 6 mm?
- Qualitätskontrolle.** In der Qualitätskontrolle benötigen 3 Prüfer 14 Stunden für einen Prüfungsvorgang. Wie viele Prüfer müssten eingesetzt werden, um die Kontrollarbeiten in etwa 8 Stunden zu schaffen?
- Rundstahl.** In einer Walzenstraße wird Rundstahl mit einer Querschnittsfläche von 200 mm² und einer Länge von 4500 mm hergestellt. Wie viel Meter Rundstahl erhält man, wenn bei gleicher Masse die Querschnittsfläche auf 100 mm² verkleinert wird?



Prozentrechnung

Damit man sich Größen und Werte vorstellen und sie untereinander vergleichen kann, bezieht man sie auf die Zahl 100. Den betrachteten Wert drückt man als Prozentsatz aus.

Bezeichnungen:

P_s Prozentsatz	%	P_w Prozentwert	z. B. €
G_w Grundwert	z. B. €		

1. Beispiel:

Wie groß ist der Prozentwert P_w in € für einen Grundwert $G_w = 500$ € bei einem Prozentsatz $P_s = 40$ % (Bild 1)?

$$\text{Lösung: } P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s = \frac{500 \text{ €}}{100\%} \cdot 40\% = 200 \text{ €}$$

2. Beispiel:

Von 600 gefertigten Zahnriemen sind 17 Ausschuss. Der Prozentsatz P_s für den Ausschuss ist zu berechnen.

$$\text{Lösung: } P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s; \quad P_s = \frac{100\%}{G_w} \cdot P_w = \frac{100\%}{600} \cdot 17 = 2,83\%$$

3. Beispiel:

Ein schadhafter Behälter verlor 38,84 Liter Flüssigkeit, das sind 16 % der Flüssigkeit. Wie viel Liter Flüssigkeit enthielt der Behälter?

$$\text{Lösung: } P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s; \quad G_w = \frac{100\%}{P_s} \cdot P_w = \frac{100\%}{16\%} \cdot 38,84 \text{ l} = 242,75 \text{ l}$$

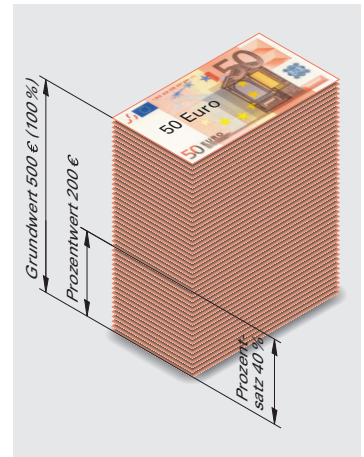


Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis

Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s$$

Aufgaben | Prozentrechnung

- Festplatte.** Eine Bilddatei benötigt 15 MByte Speicherplatz auf einer Festplatte. Wie viel Prozent Festplattenspeicher werden für das Bild auf einer 10-GByte-Festplatte beansprucht?
- Scanzeit.** Ein Flachbettscanner benötigt für den Scanvorgang einer Fotografie 4 min. Das Nachfolgemodell des Scanners soll bei dem gleichen Arbeitsauftrag 24 % schneller sein. Berechnen Sie die Scanzeit des neuen Scannermodells.
- Rauchgasentschwefelung.** In den Rauchgasen eines Kraftwerkes lag der Anteil des Schwefeldioxids 62 % unter dem zulässigen Grenzwert. Durch den Einbau einer zusätzlichen Rauchgasentschwefelungsanlage konnte der Wert auf 20 % des Grenzwertes gesenkt werden. Um wie viel Prozent verringerte die Rauchgasentschwefelungsanlage den Ausstoß an Schwefeldioxid des Kraftwerkes?
- Gehäusegewicht.** Um wie viel Prozent vermindert sich das Gewicht eines Gehäuses, das bisher aus 1 mm dickem Stahlblech (Dichte $\rho = 7,85 \text{ kg/dm}^3$) bestand und nun aus 2 mm dickem Aluminiumblech (Dichte $\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$) hergestellt werden soll?
- Zugfestigkeit.** Durch Vergüten wurde die Zugfestigkeit eines Stahles um 42 % auf 1250 N/mm^2 erhöht. Wie groß war die Zugfestigkeit des Werkstoffes vor der Wärmebehandlung?
- Lothstellung.** In einer Schmelze sollen 150 kg des Weichlotes L-Sn63Pb37 hergestellt werden. Berechnen Sie die Einzelmassen an Zinn und Blei in der Schmelze.
- Aktienfonds.** Vor mehr als einem Jahr wurden 15 Anteile eines Technologiefonds zu einem Preis von 135 € mit einem Ausgabeaufschlag von 5,25 % gekauft. Der Fonds hat vom Kauftag bis heute eine Wertsteigerung von 45 %.
 - Welcher Gesamtbetrag musste für die 15 Anteile bezahlt werden?
 - Welcher Gewinn wäre bei einem Verkauf zu erwarten?