



Edition
Harri 
Deutsch 

Aufgaben zur Festigkeitslehre – ausführlich gelöst

Mit Grundbegriffen, Formeln, Fragen, Antworten

von
Gerhard Knappstein

6. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 54302

Der Autor

Dipl.-Ing. Gerhard Knappstein war nach seiner Ausbildung zum Werkzeugmacher und dem Maschinenbaustudium als Konstrukteur und Berechnungsingenieur in der Industrie tätig. Er ist Mitarbeiter im Fachbereich Maschinenbau – Fachgebiet Technische Mechanik – an der Universität Siegen.

6. Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5431-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,
42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Zum richtigen Verstehen und Einordnen der theoretischen Grundlagen des Mechanikfachs *Festigkeitslehre (Elastostatik)* ist das selbständige Lösen von entsprechenden Aufgaben unverzichtbar. Diese Einsicht und die immer wiederkehrende Frage der Studierenden nach Aufgaben mit vollständigen Lösungen waren unter anderem Anlass, dieses Buch zu schreiben.

Das Buch, dessen Inhalt sich am Stoff der Vorlesungen in Festigkeitslehre an Universitäten und Fachhochschulen orientiert, bietet

- *zahlreiche ausführlich und lehrbeispielhaft gelöste Aufgaben,*
- *die notwendigen Grundbegriffe und Formeln zum schnellen Nachschlagen in überschaubarer Form,*
- *Verständnisfragen und Antworten zum Überprüfen der Kenntnisse,*
- *computerunterstütztes Lösen von Aufgaben aus der Festigkeitslehre mit MATLAB und*
- *Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben.*

Es ergänzt somit die vielfältigen Mechanik-Lehrbücher.

Die Aufgaben sind so ausgewählt, dass alle wichtigen Teilgebiete der Festigkeitslehre behandelt werden.

Bei den Lösungen habe ich versucht, den Lösungsweg so zu gestalten, dass er für jeden verständlich ist. Die Lösungen sind nicht nur stichpunktartig dargestellt, sondern sehr ausführlich gelöst. Unterstützt durch eine umfangreiche Bebilderung ist der "*rote Faden*" des Lösungswegs gut erkennbar. Durch Zeichnungen sind Studierende oftmals viel schneller über schwierige Sachverhalte "**im Bilde**", als das je mit Text geschehen könnte.

Bei einigen Aufgaben werden mehrere Lösungswege dargestellt sowie die Ergebnisse erläutert.

Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben als grundsätzliches Lösungsverfahren werden angegeben, da erfahrungsgemäß viele Studienanfänger den Weg von der Problemstellung zur Lösung verlieren, wenn er nicht systematisch angelegt wird.

Um den größten Nutzen aus dem Buch zu ziehen, empfehle ich den Studierenden, die Lösungen nicht nur durchzulesen, sondern auch zu versuchen, die Aufgaben Schritt für Schritt nachzuvollziehen – am besten selbständig zu lösen. Entscheidend ist, dass Aufgaben nicht nach „*Schema F*“, sondern mit *Verstand* und den Grundgesetzen der Mechanik gelöst werden. Hilfreich ist oft, die Aufgaben und Verständnisfragen zu zweit oder zu dritt durchzuarbeiten, zu vergleichen und die Lösungen und Antworten zu diskutieren.

In der vorliegenden 6. Auflage habe ich zusätzlich zu den Formelsammlungen der Statik und der Festigkeitslehre noch eine Formelsammlung der Kinematik und Kinetik aus meinem gleichlautenden Buch aufgenommen, so dass jetzt alle wichtigen Formeln für das Grundlagenfach Technische Mechanik wiedergegeben sind. Das Buch erscheint erstmals in der Edition Harri Deutsch des Verlags Europa-Lehrmittel.

Die vollständigen MATLAB-Programme finden Sie auf der Homepage zum Buch www.europa-lehrmittel.de/54302.html.

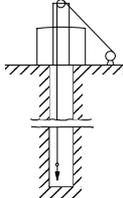
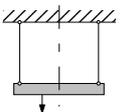
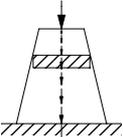
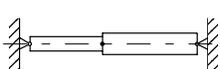
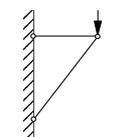
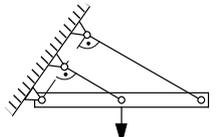
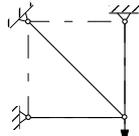
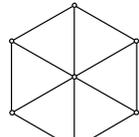
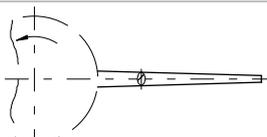
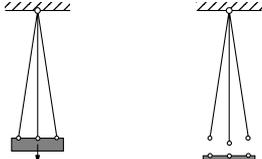
Leserkontakt

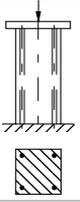
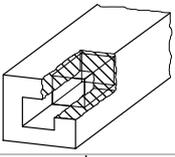
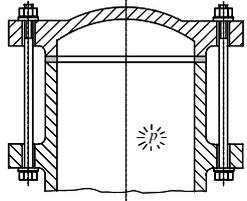
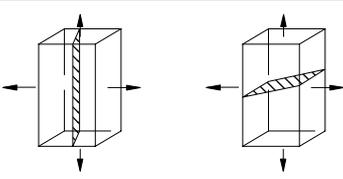
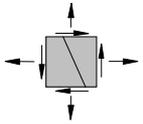
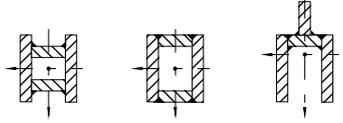
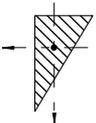
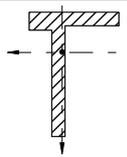
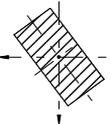
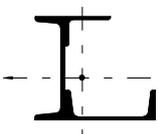
Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
<http://www.europa-lehrmittel.de>

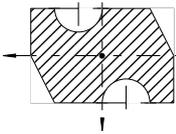
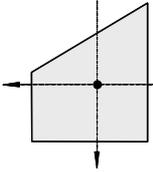
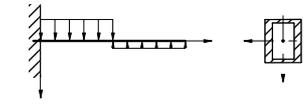
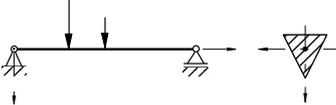
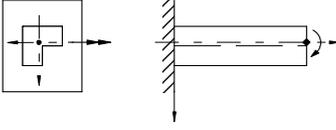
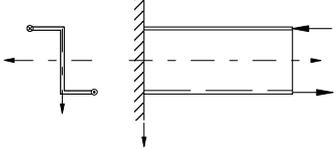
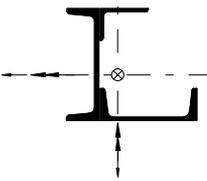
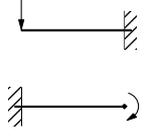
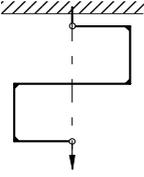
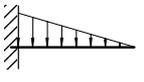
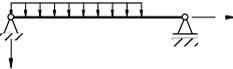
Inhalt

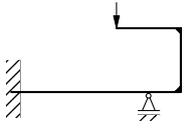
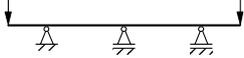
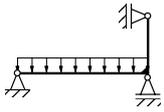
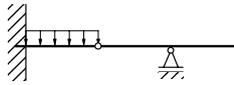
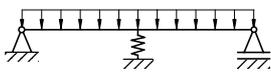
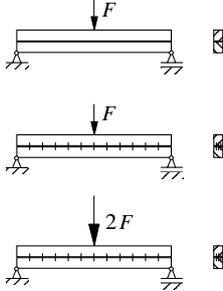
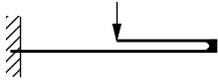
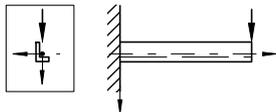
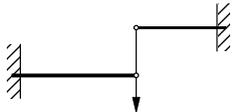
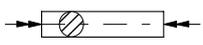
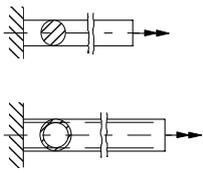
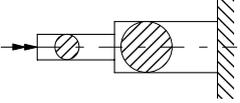
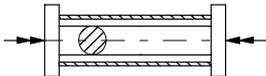
1	Zug und Druck in Stäben; Dehnungen und Verschiebungen	1
2	Der ein- und zweiachsige Spannungszustand	35
3	Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente	45
4	Biegung: Normalspannungen durch Biegemomente und Normalkraft; Schiefe Biegung; Verformungen durch Biegemomente	67
5	Torsion	119
6	Querkraftschub; Schubmittelpunkt	133
7	Knickung	145
8	Aufgaben mit Anwendungen aus verschiedenen Gebieten der Elastostatik	157
9	Aufgaben zu CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral (Arbeitssatz), Kraftgrößenverfahren	183
	Verständnisfragen	193
	Antworten zu den Verständnisfragen	201
	Computerunterstütztes Lösen von Aufgaben	215
	Programm QUERP	215
	Programm BIEGNO	220
	Anhang:	
	Einige Grundbegriffe und Formeln der Festigkeitslehre	233
	A1 Einheiten; Spannungen	233
	A2 Verformungen	234
	A3 Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungen	235
	A4 Zug und Druck in Stäben	235
	A5 Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente	237
	A6 Biegung	242
	A7 Torsion	245
	A8 Lage der Schubmittelpunkte von dünnwandigen Profilen	249
	A9 Querkraftschub	250
	A10 Knickung	250

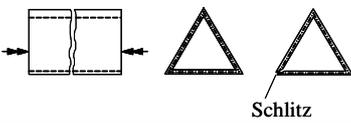
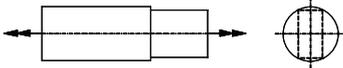
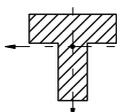
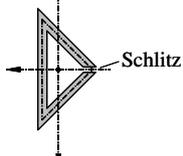
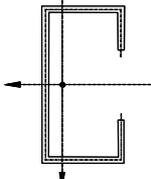
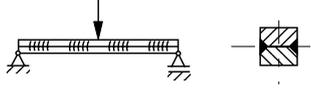
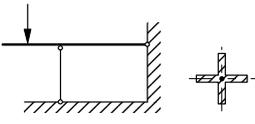
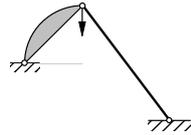
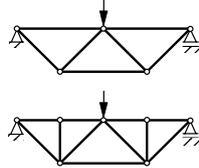
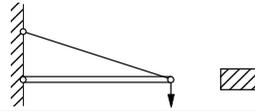
A11	Dünnwandige Behälter (Membranschalen) unter Innendruck	253
A12	Festigkeithypothesen, Vergleichsspannung	254
A13	Zugfestigkeit R_m , Streckgrenze $R_{p0,2}$ und Bruchdehnung A_5 eini- ger Werkstoffe	255
A14	Zulässige Spannungen für Kran-Stahltragwerke	255
A15	Ausgewählte Werkstoffkennwerte	256
A16	Anwendung des Energieprinzips bei Biegebeanspruchung (CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral, Kraftgrößenverfahren)	257
Leitlinien zum Lösen von Mechanik-Aufgaben		261
Schematischer Verlauf einer Festigkeitsberechnung		262
Gegenüberstellung von neuen und alten Werkstoffbezeichnungen (Auswahl)		263
Einige Grundlagen und Formeln aus der Statik		264
S1	Kräfte, Lagerungen, Freimachen, Axiome, Schnittprinzip	264
S2	Zentrales Kräftesystem.	269
S3	Allgemeines Kräftesystem	272
S4	Ebenes Fachwerk	275
S5	Schnittgrößen am Balken	277
S6	Schwerpunkt	279
S7	Haftung und Reibung	283
S8	Biegeschlaffes Seil	284
Das griechische Alphabet		286
Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Teile und Vielfache von Ein- heiten		286
Einheitennamen und Einheitenzeichen		287
Einige Formeln aus der Mathematik		288
Häufig benutzte Formelzeichen		289
Forscher und Lehrer auf dem Gebiet der Festigkeitslehre		291
Zusammenstellung von Formeln aus der Kinematik und Kinetik		294
K1	Kinematik der geradlinigen Bewegung eines Punktes	294
K2	Kinematik der krummlinigen Bewegung eines Punktes	295
K3	Kinematik des starren Körpers.	301
K4	Kinetik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme	303
K5	Kinetik starrer Körper	309
K6	Schwingungen	316
K7	Stoßvorgänge	320
K8	Relativbewegung	322
Literatur		324
Sachwortverzeichnis		325

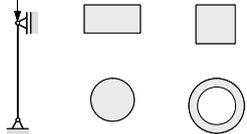
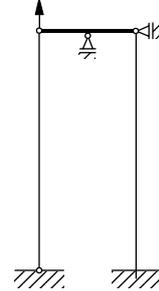
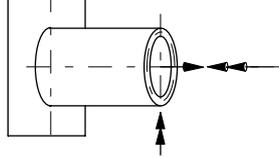
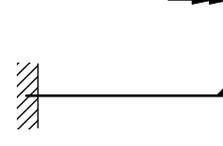
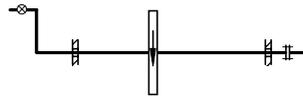
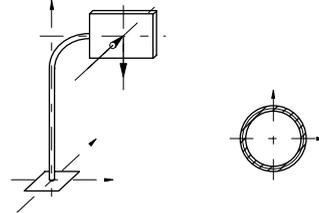
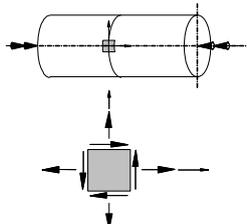
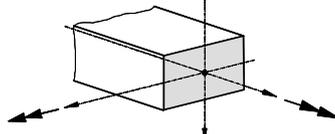
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
	1 Zug und Druck in Stäben; Dehnungen und Verschiebungen		1
1.1	Dehnung und Verlängerung eines Seiles; Reißlänge		2
1.2	Dehnung von Stäben aus unterschiedlichem Material		5
1.3	Spannungsverläufe σ in einem Stab mit veränderlichem Querschnitt infolge Eigengewicht und äußerlicher Belastung		6
1.4	Abgesetzter Stahlzylinder unter Temperaturbelastung (Kräfte und Verschiebung)		9
1.5	Verschiebungen in einem Stabwerk (Stäbe mit unterschiedlicher Dehnsteifigkeit)		11
1.6	Lagerungsstäbe (verschiedene Querschnitte) eines starren Trägers (statisch unbestimmt); Stabkräfte, Spannungen, Verschiebungen		14
1.7	Stabkräfte und Verschiebungen in einem Fachwerk (statisch unbestimmt)		16
1.8	Fachwerk unter Temperaturbelastung (Stäbe mit unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten)		19
1.9	Dehnung und Spannung in einem fliehkraftbeanspruchten Stab		21
1.10	Spannungen in den drei Seilen einer Lastaufhängung (mit Fehlmaß) (statisch unbestimmt)		24

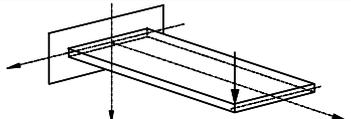
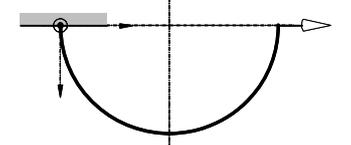
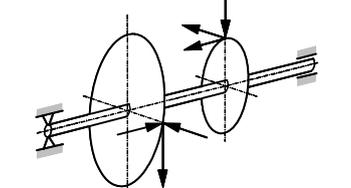
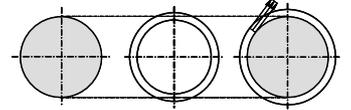
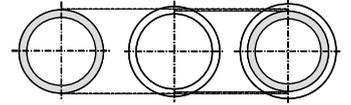
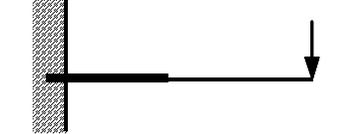
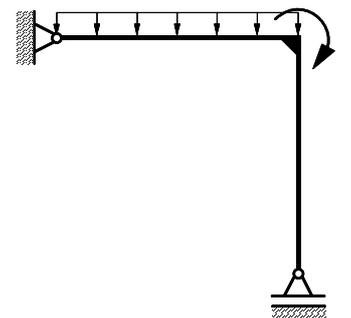
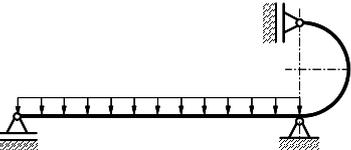
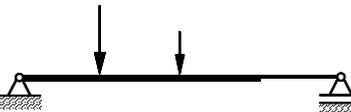
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
1.11	Lastaufnahme bei Druckstab aus unterschiedlichen Materialien (statisch unbestimmt)		29
1.12	Dehnungen und Spannungen bei einem zweiachsigen Spannungszustand		31
1.13	Dehnung von Schrauben (Dehnschrauben)		33
2 Der ein- und zweiachsige Spannungszustand			35
2.1	Spannungen in der Schweißnaht eines Blechstreifens (einachsiger Spannungszustand)		36
2.2	Spannungen in der Schnittfläche eines Quaders (einachsiger Spannungszustand und zweiachsiger Hauptnormalspannungszustand)		38
2.3	Allgemeiner ebener Spannungszustand		41
3 Flächenträgheitsmomente; Lage der Hauptachsen; Widerstandsmomente			45
3.1	Drei Querschnitte mit gleichem Flächeninhalt im Vergleich		46
3.2	Rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt (Hauptträgheitsmomente, Hauptachsen)		49
3.3	Unsymmetrischer T-förmiger Querschnitt		52
3.4	Gedrehter Rechteckquerschnitt		56
3.5	Aus Stahlbau-Profilen zusammengesetzter Querschnitt		57

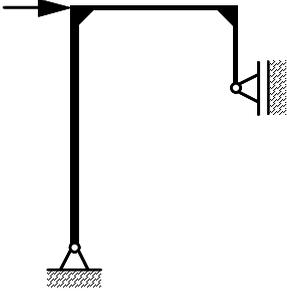
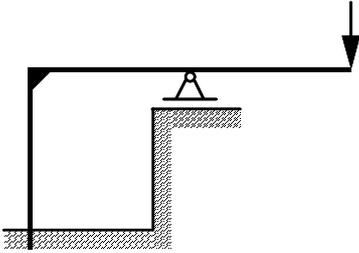
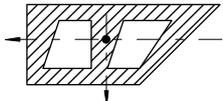
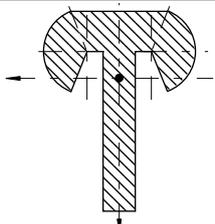
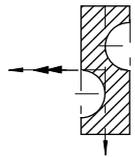
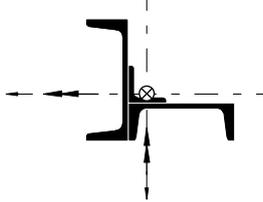
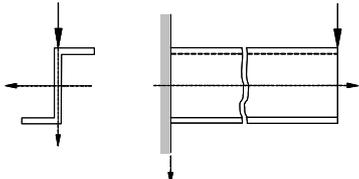
Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
3.6	Aus Grundflächen zusammengesetzter Querschnitt		61
3.7	Trapezförmiger Querschnitt		65
4 Biegung: Normalspannungen durch Biegemomente und Normalkraft; Schiefe Biegung; Verformungen durch Biegemomente			67
4.1	Einachsige Biegung; Biegespannungsverteilung		68
4.2	Einachsige Biegung; Biegespannungsverteilung		71
4.3	Schiefe Biegung; Spannungs-Null-Linie; Biegespannungsverteilung		74
4.4	Schiefe Biegung; Spannungs-Null-Linie; Spannungsverteilung		77
4.5	Schiefe Biegung mit Normalkraftbeanspruchung; Spannungs-Null-Linie; Spannungsverteilung		80
4.6	Biegelinie		83
4.7	Durchbiegung am freien Ende (mit Überlagerung)		86
4.8	Biegeverformung (mit Überlagerung)		88
4.9	Biegelinie		90
4.10	Durchbiegung, Neigungswinkel		92

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
4.11	Auflagerreaktionen, Neigungswinkel, Differentialgleichung der elastischen Biegelinie (statisch unbestimmtes System)		96
4.12	Auflagerreaktionen, Differentialgleichung der elastischen Biegelinie, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		100
4.13	Auflagerreaktion, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		104
4.14	Verschiebungen (Superposition)		106
4.15	Auflagerreaktion bei elastischem Lager, Durchbiegung, Superpositionsprinzip (statisch unbestimmtes System)		108
4.16	Auswirkungen der schubfesten Verbindung zweier Träger auf die Biegespannung und die Durchbiegung		110
4.17	Verformungen eines Biegeträgersystems (unterschiedliche Biegesteifigkeiten)		113
4.18	Verformungsberechnung bei schiefer Biegung (Kragträger)		115
4.19	Verformungen bei durch einen Stab gekoppelte Biegeträger (statisch unbestimmtes System)		117
	5 Torsion		119
5.1	zulässige Schubspannung und zulässiger spezifischer Verdrehungswinkel		120
5.2	Torsionsstäbe mit Vollquerschnitt und kreisrundem Rohrquerschnitt		122
5.3	abgesetzter Drillstab (Reihenschaltung)		124
5.4	Parallel geschaltete Torsionsfedern (einfach statisch unbestimmt)		125

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
5.5	Torsionsstab mit dünnwandigem geschlossenen Querschnitt (BREDT'sche Formeln)		127
5.6	Torsionsstäbe mit dünnwandigem geschlossenen und offenen Querschnitt		129
5.7	Torsionsstab mit unterschiedlichen Querschnitten		132
6 Querkraftschub; Schubmittelpunkt			133
6.1	Schubspannungen infolge Querkraft		134
6.2	Schubspannungsverlauf infolge Querkraft, Schubmittelpunkt		137
6.3	Dünnwandiger Träger mit C-Profil		141
6.4	Schubspannungen in Verbindungsmitteln (Schweißnähte)		143
7 Knickung			145
7.1	EULER-Fall 2; Belastbarkeitsrechnung (kreuzförmiger Querschnitt)		146
7.2	EULER-Fall 1; Entwurfsrechnung (Rohrquerschnitt)		148
7.3	EULER-Fall 2; Belastbarkeitsrechnung (Winkelstahl)		149
7.4	Vergleich der Knicksicherheiten zweier Fachwerke		151
7.5	Grundfall 2; Belastbarkeitsrechnung (Rechteckquerschnitt); TETMAJER und EULER		153

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
7.6	Grundfall 1; Entwurfsrechnung (Ellipsenquerschnitt); EULER und TETMAJER		154
7.7	Druckstab mit 4 verschiedenen Querschnitten gleichen Flächeninhalts; EULER		156
8 Aufgaben mit Anwendungen aus verschiedenen Gebieten der Elastostatik			157
8.1	Anwendungen aus den Gebieten: Zug, Druck, Biegung, Knickung. Statisch unbestimmtes System		158
8.2	Auf Zug, Biegung und Torsion belastetes Rohr; MOHRscher Spannungskreis		162
8.3	Auf Biegung und Torsion belasteter abgewinkelter Träger; Verschiebungen		165
8.4	Dimensionierung einer Welle (Gestaltänderungsenergiehypothese)		167
8.5	Auf Druck, Biegung und Torsion belastete Säule; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		169
8.6	Auf Innendruck und Torsion belastetes dünnwandiges, geschlossenes Rohr; Kesselformeln; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		171
8.7	Auf Biegung und Torsion beanspruchter Stab; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		172

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
8.8	Auf Biegung und Torsion beanspruchte Blattfeder; Durchsenkung; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		173
8.9	Auf Biegung und Torsion beanspruchter Träger; erforderlicher Durchmesser; Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		175
8.10	Normalkraft, Biegung und Torsion; maximale Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese		176
8.11	Schrumpfring auf Vollwelle; Wärmedehnung; erforderliche Temperaturerhöhung		180
8.12	Schrumpfring auf Ring; Wärmedehnung; Berührungskreisdurchmesser und Spannungen		181
9 Aufgaben zu CASTIGLIANO, MOHRsches Arbeitsintegral (Arbeitssatz), Kraftgrößenverfahren			183
9.1	Durchbiegung und Neigungswinkel mit dem Satz von CASTIGLIANO		184
9.2	Verschiebung eines abgewinkelten Trägers mithilfe des Satzes von CASTIGLIANO		185
9.3	Statisch unbestimmtes System; Auflagerreaktionen mithilfe des Satzes von CASTIGLIANO		186
9.4	Durchbiegung mithilfe des MOHRschen Arbeitsintegrals (Arbeitssatz)		187

Aufgabe	Erläuterung	"Info"-Bild	Seite
9.5	Verschiebung mithilfe des MOHRschen Arbeitsintegrals (Arbeitssatz)		189
9.6	Statisch unbestimmtes System; Auflagerreaktion mithilfe des Kraftgrößenverfahrens		190
	Computerunterstütztes Lösen von Aufgaben; Programme QUERP und BIEGNO		215
Beispiel zu QUERP	Querschnittswerte (Schwerpunkt, Flächenträgheitsmomente)		218
Aufgabe zu QUERP	Querschnittswerte (Schwerpunkt, Flächenträgheitsmomente)		219
Beispiel zu BIEGNO	Biegung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		229
Aufgabe zu BIEGNO	Biegung mit Normalkraftbeanspruchung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		230
Aufgabe zu BIEGNO	Biegung; Querschnittswerte, Spannungs-Nulllinie und Spannungsverteilung		231

**1 Zug und Druck in Stäben;
Dehnungen und
Verschiebungen**

Aufgabe 1.1:

Für das Stahlförderseil einer Schachtförderanlage (Bild 1.1), welches durch sein Eigengewicht und die Kraft F am Seilende belastet ist, sind zu berechnen:

1. der metallische Querschnitt des Seiles für die zulässige Spannung σ_{zul} ,
2. die Verschiebung des Seilendes mit dem unter 1. berechneten Querschnitt (nur den vertikal hängenden Teil des Seiles berücksichtigen),
3. die Länge $l_{Rei\beta}$ (Reißlänge) des Seiles für die Zugfestigkeit R_m , bei der das Seil nur unter der Wirkung seines Eigengewichtes reißt. An welcher Stelle reißt das Seil?

Gegeben: $F = 110 \text{ kN}$; Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$;

Dichte $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $l = 1150 \text{ m}$;

$\sigma_{zul} = 200 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1600 \text{ N/mm}^2$;

$E = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$

(Lösung erst mit allgemeinen Größen herbeiführen, dann Zahlenwerte einsetzen!)

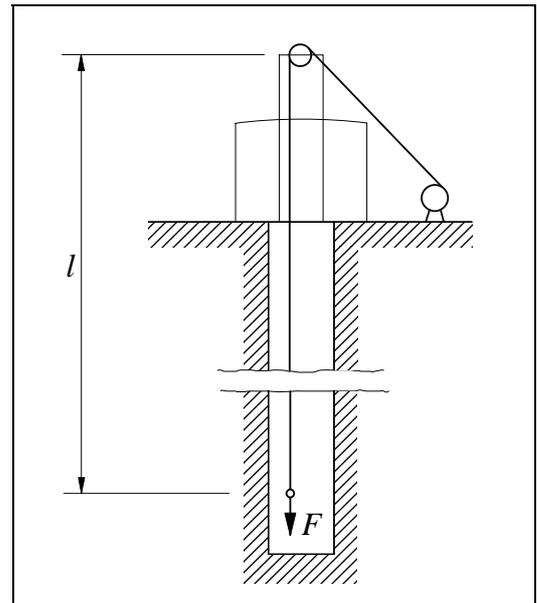


Bild 1.1: Schachtförderanlage mit Förderseil

Lösung:**zu 1.**

Den metallischen Querschnitt des Seiles erhalten wir aus der Bedingung, dass die zulässige Normalspannung σ_{zul} nicht überschritten werden darf.

$$\sigma_{zul} = \frac{N_{\max}}{A} \quad ; \quad A = \frac{N_{\max}}{\sigma_{zul}}$$

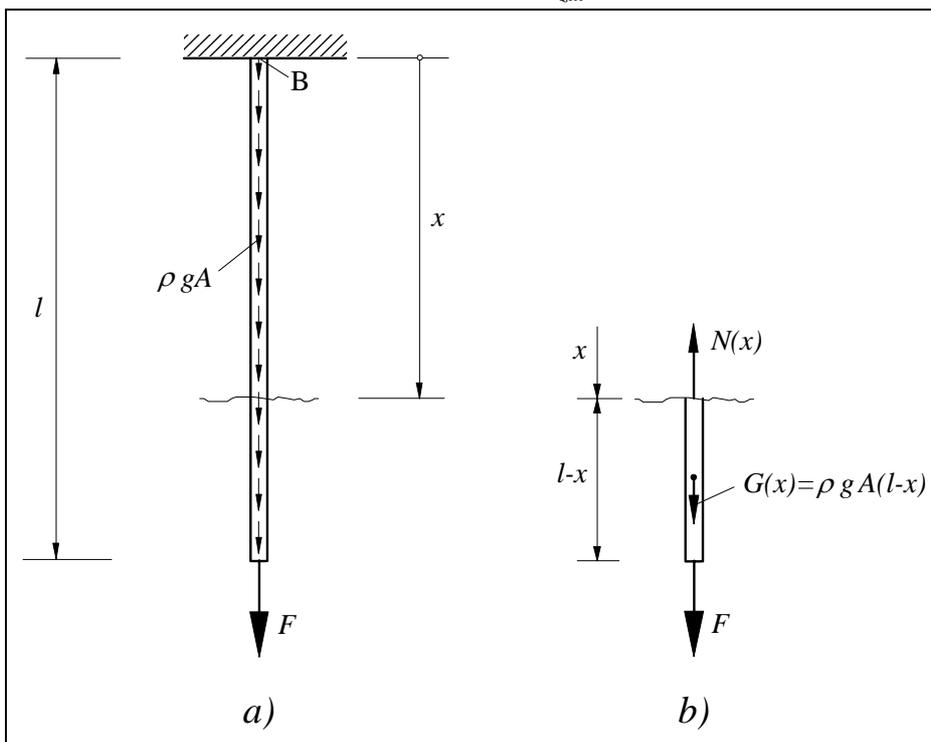


Bild 1.1.1:

a) Seil durch Eigengewicht und Fremdlast F belastet

b) Freikörperbild des abgeschnittenen unteren Seilstücks

$\Sigma \uparrow = 0$: (Bild 1.1.1b)

$$N(x) - F - G(x) = 0$$

$$N(x) = F + \rho g A (l - x)$$

(1)

Die maximale Normalkraft N_{\max} tritt bei $x = 0$ an der Stelle B (Bild 1.1.1a) im Seil auf:

$$N_{\max} = N(x = 0) = F + \rho g A l$$

$$A = \frac{N_{\max}}{\sigma_{zul}} = \frac{F}{\sigma_{zul}} + \frac{\rho g A l}{\sigma_{zul}} .$$

Nach A aufgelöst:

$$A = \frac{F}{\sigma_{zul} - \rho g l}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich für den metallischen Querschnitt:

$$A = \frac{110 \cdot 10^3}{200 - 7850 \cdot 9,81 \cdot 1150 / 10^6} \text{ mm}^2 = \underline{\underline{987 \text{ mm}^2}} \quad \text{Merke: } 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

zu 2.

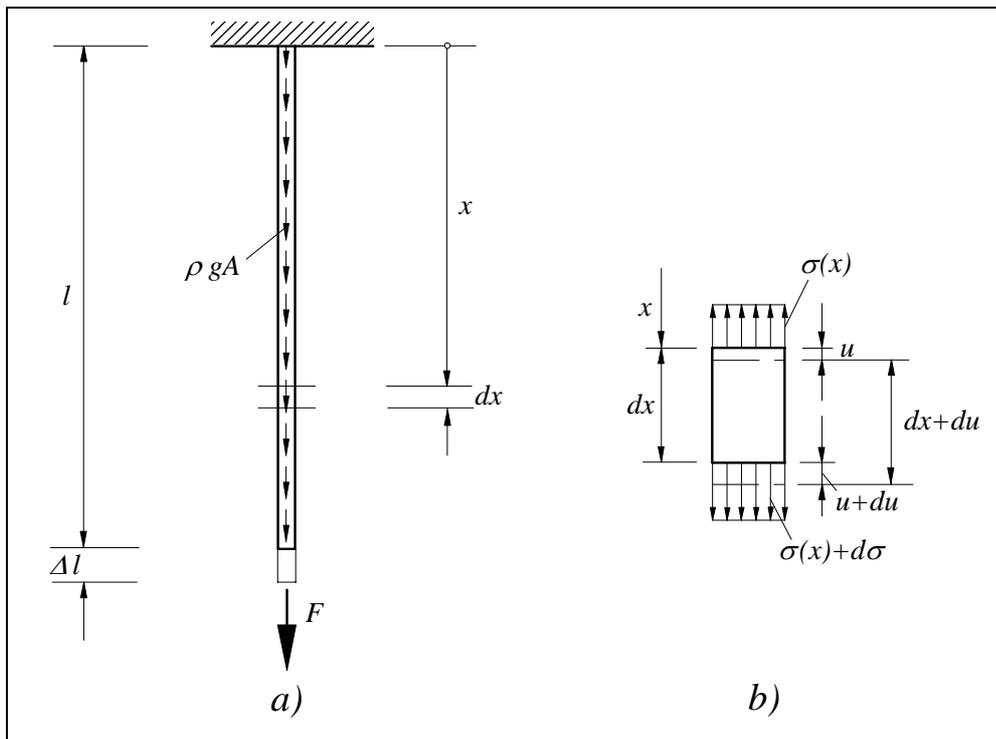


Bild 1.1.2:
a) Verschiebung des Seilendes
b) Verlängerung eines herausgeschnittenen Elements

Verformung eines Elements (Bild 1.1.2b):

$$\varepsilon = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Elastizitätsgesetz: $\varepsilon = \frac{\sigma(x)}{E}$

Es gilt also: $\frac{du}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E}$

(2)

$\sigma(x)$ ergibt sich mit Gleichung (1) zu:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F + \rho g A (l - x)}{A} .$$

Aus (2) folgt die Verlängerung du :

$$du = \frac{1}{E} \left[\frac{F}{A} + \rho g(l-x) \right] dx.$$

Die Summe aller Verlängerungen du muß die Verschiebung Δl des Seilendes (Bild 1.1.2a) ergeben.

$$\int_{x=0}^l du = \frac{1}{E} \int_{x=0}^l \left[\frac{F}{A} + \rho g(l-x) \right] dx$$

$$u(l) - u(0) = \frac{1}{E} \left[\frac{F}{A} x + \rho g \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^l$$

$$\Delta l = u(l) = \frac{l}{E} \left(\frac{F}{A} + \frac{1}{2} \rho g l \right).$$

Dabei ist $\frac{Fl}{EA}$ der Verschiebungsanteil aus der Fremdlast F und $\frac{\rho g l^2}{2E}$ der Verschiebungsanteil aus dem Eigengewicht.

Mit Zahlenwerten:
$$\Delta l = \frac{1150 \cdot 10^3}{21 \cdot 10^4} \left(\frac{110 \cdot 10^3}{987} + \frac{1}{2} 7850 \cdot 9,81 \cdot 1150 / 10^6 \right) \text{ mm}$$

$$\Delta l = 610,3 \text{ mm} + 242,5 \text{ mm} = \underline{\underline{852,8 \text{ mm}}}.$$

610,3 mm ist der Verschiebungsanteil aus der Fremdlast und 242,5 mm der Verschiebungsanteil aus dem Eigengewicht.

Hinweis: Die Verlängerung Δl wurde nur mit der Dehnung des Werkstoffes ermittelt und so getan, als wäre ein Seil eine homogene Stange. In Wirklichkeit ist die Verlängerung eines Seiles wegen der Verschiebbarkeit der einzelnen Seillitzen gegeneinander größer.

zu 3.

Aus Gleichung (1) erkennen wir, daß die maximale Normalkraft an der Stelle $x = 0$ am Aufhängepunkt B (Bild 1.1.1a) auftritt. Folgedessen zerreißt das Seil bei Erreichen der Zugfestigkeit R_m an der Stelle B.

Mit $F = 0$ und $x = 0$ folgt aus Gleichung (1):

$$N_{\max_{Eig}} = \rho g A l.$$

Die Reißlänge, daß ist diejenige Länge, bei der lediglich infolge des Eigengewichts der Bruch am oberen Aufhängepunkt (Stelle B, Bild 1.1.1a) eintreten würde, erhalten wir aus der folgenden Gleichung:

$$R_m = \frac{N_{\max_{Eig}}}{A} = \frac{\rho g A l_{\text{Reiß}}}{A}. \quad (\text{Die Querschnittsfläche } A \text{ verliert ihren Einfluß.})$$

Reißlänge:
$$l_{\text{Reiß}} = \frac{R_m}{\rho g}$$

Mit Zahlenwerten:

$$l_{\text{Reiß}} = \frac{1600}{7850 \cdot 9,81 \cdot 10^{-9}} \text{ mm} = 20,777 \cdot 10^6 \text{ mm} = \underline{\underline{20,777 \text{ km}}}.$$

Aufgabe 1.2:

Ein starrer Balken ist an zwei parallelen Stäben aufgehängt und mit einer Kraft F belastet (Bild 1.2). Die beiden Stäbe sind aus unterschiedlichem Material (E_1 und E_2) gefertigt und haben den gleichen Querschnitt A .

1. In welchem Abstand e von der Mitte aus muss die Kraft F angreifen, damit der starre Balken in horizontaler Lage hängt?
2. Wie groß sind dann die Spannungen in den Stäben?

(Anmerkung: Annahme $E_1 > E_2$).

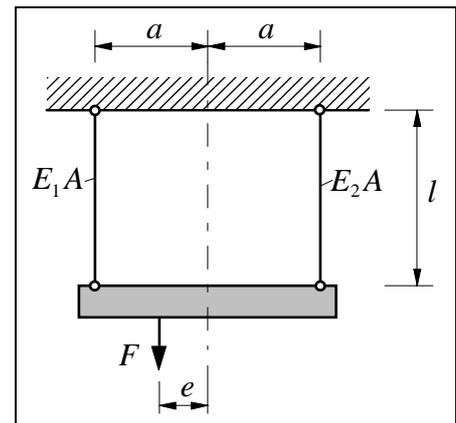


Bild 1.2: Starrer Balken, aufgehängt an zwei Stäben aus unterschiedlichem Material

Lösung:**zu 1.**

Wir schneiden die beiden Stäbe durch, zeichnen ein Freikörperbild für den starren Balken (Bild 1.2.1) und bearbeiten die Gleichgewichtsbedingungen:

Statik (Gleichgewicht, Bild 1.2.1):

$$\begin{aligned} \sum \uparrow = 0: \quad S_1 + S_2 - F &= 0 \\ F &= S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\sum M)_B = 0: \quad S_1 a - S_2 a - F e &= 0 \\ e &= \frac{a}{F} (S_1 - S_2) \end{aligned} \quad (2)$$

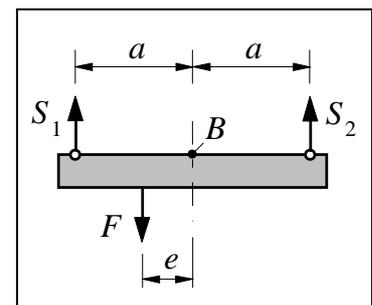


Bild 1.2.1: Freikörperbild des Balkens; Schnitt durch die Stäbe

Da keine horizontalen Kräfte vorhanden sind, ist die Gleichgewichtsbedingung $\sum \rightarrow = 0$ sowieso erfüllt.

Zur Berechnung der drei Unbekannten S_1 , S_2 und e benötigen wir drei Gleichungen. Die dritte noch fehlende Gleichung erhalten wir aus der Verträglichkeitsbedingung und den Stabverlängerungen.

Geometrische Verträglichkeitsbedingung: $\Delta l_1 = \Delta l_2$

Stabverlängerung:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{E_1 A} \quad \text{und} \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l}{E_2 A}$$

Mit den Stabverlängerungen folgt aus der Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{S_1 l}{E_1 A} = \frac{S_2 l}{E_2 A} \Rightarrow S_1 = \frac{E_1}{E_2} S_2 \quad (3)$$

Das gesuchte Maß e erhalten wir dann mit (1) und (3) aus (2):

$$e = a \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$$

zu 2.

Die Stabkräfte erhalten wir aus (1) und (3):

$$S_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{F}{1 + \frac{E_1}{E_2}} .$$

Damit liegen die Spannungen vor:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{F}{A} \frac{1}{1 + \frac{E_2}{E_1}} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{F}{A} \frac{1}{1 + \frac{E_1}{E_2}} .$$

Aufgabe 1.3:

Ein Maschinenteil (Bild 1.3) mit konstanter Dicke t wird durch sein Eigengewicht und eine Kraft F belastet.

Man ermittle den Spannungsverlauf $\sigma(x)$.

Außerdem berechne man die Spannungsverläufe in Abhängigkeit von x mit folgenden Zahlenwerten

- für die Belastung nur aus dem Eigengewicht
- für die Belastung nur aus der Kraft F
- für die Belastung aus Eigengewicht und der Kraft F

und trage jeweils die Spannungsverläufe getrennt auf:

$F = 150 \text{ kN}$, $\gamma = 0,077 \text{ Ncm}^{-3}$ (spez. Gewicht), $a = 250 \text{ mm}$, $h = 4000 \text{ mm}$, $t = 160 \text{ mm}$.

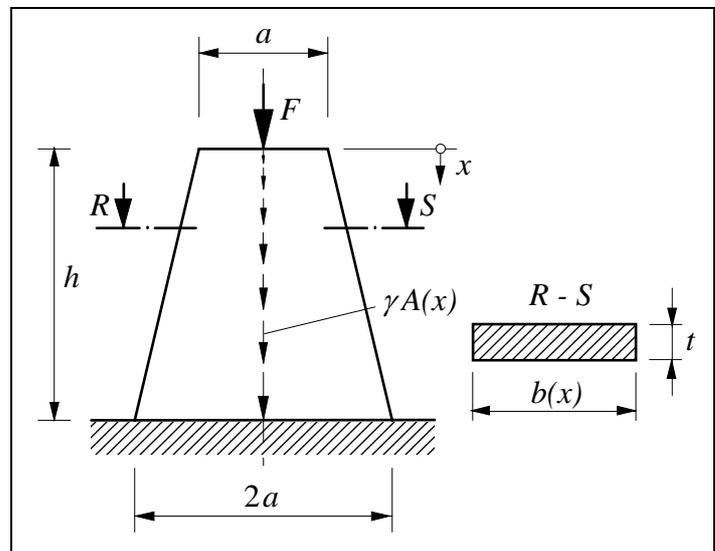


Bild 1.3: Maschinenteil durch Eigengewicht und Kraft F belastet

Lösung:

Normalspannung $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$

Für die Querschnittsfläche $A(x) = b(x) t$ folgt mit Hilfe des Strahlensatzes (Bild 1.3.1):

$$b(x) = a + 2e \quad ; \quad \frac{e}{x} = \frac{2a - a}{h}$$

$$b(x) = a + \frac{a}{h} x$$

$$A(x) = b(x) t$$

$$A(x) = a t \left(1 + \frac{x}{h}\right)$$

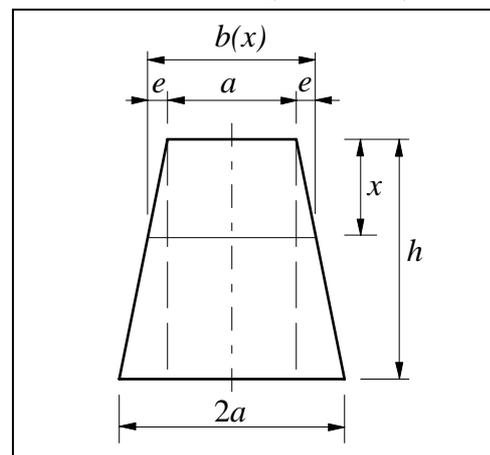


Bild 1.3.1: Zur Ermittlung der Breite $b(x)$