Physik für Ingenieure

Bachelor Basics

von

Bernd Baumann

unter Mitarbeit von

Ulrich Stein, Thorsten Struckmann und Marcus Wolff

3., überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 58577

Der Autor

Prof. Dr. rer. nat. Bernd Baumann
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Technik und Informatik
Heinrich-Blasius-Institut für Physikalische Technologien

3., überarbeitete Auflage 2016

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5857-7

http://www.europa-lehrmittel.de
Bisherige Auflagen: J. Schlembach Fachverlag
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: BALTO print, Vilnius LT-08217, Litauen

Vorwort

Durch die flächendeckende Einführung von Bachelor-Studiengängen an Hochschulen im deutschen Sprachraum sind, im Vergleich zu den früheren Diplom-Studiengängen, für viele Fächer gekürzte Stundenzahlen festgeschrieben worden. Häufig ist zu beobachten, dass die Inhalte der ursprünglichen Lehrveranstaltungen ohne substantielle Kürzungen in die Curricula der Bachelor-Studiengänge übernommen werden. Auch die in der Physikausbildung in Ingenieurstudiengängen tätigen Hochschullehrer tun sich oft schwer damit, Inhalte zu opfern. Es führt aber kein Weg daran vorbei! So interessant z. B. das Standardmodell der Elementarteilchen auch ist – dieses Thema kann in einer auf wenige Stunden beschränkten Grundlagenvorlesung zur Physik für Studierende der Ingenieurwissenschaften nicht annähernd seriös behandelt werden. Dennoch findet man entsprechende Kapitel in vielen Lehrbüchern, die für Ingenieurstudiengänge gedacht sind. *Physik für Ingenieure – Bachelor Basics* stellt einen Gegenentwurf zu diesen Büchern dar. Der Leser erhält mit vergleichsweise wenig Aufwand einen guten Einblick in die wichtigsten physikalischen Phänomene.

Da die Physikvorlesungen üblicherweise in den ersten Semestern angesiedelt sind, stellt der fehlende Vorlauf in Mathematik häufig ein Problem dar. Natürlich lässt sich dieses Problem nicht vermeiden – um es wenigstens zu entschärfen, wird die benötigte Mathematik im Anhang sehr kompakt skizziert. Dort findet der Leser auch eine einführende Darstellung der Fehlerrechnung. Der Arbeitsplan zur Ermittlung von Messergebnissen sollte bei der Ausarbeitung von Laborprotokollen hilfreich sein.

Den Lösungsweg ausgewählter Aufgaben finden Sie auf www.BerndBaumann.de und www.europa-lehrmittel.de/58577.html. Vorgegebenen Lösungswegen zu folgen reicht allerdings nicht aus. Um zu einem Verständnis zu gelangen, ist es notwendig, dass sich der Leser um das selbstständige Erzielen der Lösungen ernsthaft bemüht.

Fehlerhinweise, Anregungen und Kommentare sind stets willkommen.

Hamburg, im Sommer 2016 — Bernd Baumann

info@BerndBaumann.de

Fragen, Kommentare und Anregungen an:

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
http://www.europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

1 Mechanik

1.1 Kinematik

1.1.1 Bewegung entlang einer Geraden

Die **Kinematik** hat die mathematische Beschreibung der Bewegung materieller Körper im Raum zum Inhalt. In der Kinematik werden keine Aussagen über das Zustandekommen von Bewegungen gemacht. Dies ist Gegenstand der Dynamik (vgl. Abschnitt 1.2).

Häufig ist es gerechtfertigt, die Ausdehnung der Körper zu vernachlässigen (Modellvorstellung des **Massenpunkts**)[1]. Vorteil: Rotation und Verformung der Körper brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

Erfolgt die Bewegung entlang einer Geraden im Raum, so genügt es, zu jedem Zeitpunkt t die jeweilige Ortskoordinate x anzugeben. Trägt man x über t auf, erhält man das **Weg-Zeit-Diagramm** der Bewegung (Abb. 1.1).

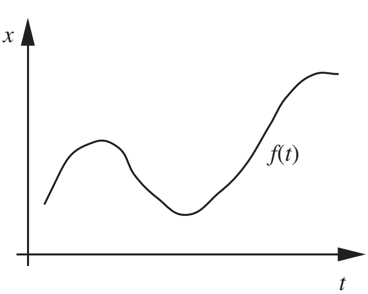


Abb. 1.1: Weg-Zeit-Diagramm

Offenbar ist x eine Funktion der Zeit:

$$x = f(t),$$

in Kurzform schreibt man $x(t)$.

Die **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitintervall $\Delta t := t_2 - t_1$ ist definiert durch

$$\boxed{\bar{v} := \frac{\Delta x}{\Delta t}.}$$

Die im Zeitintervall Δt zurückgelegte Wegstrecke $\Delta x := x(t_2) - x(t_1)$ heißt **Verschiebung** (Abb. 1.2).

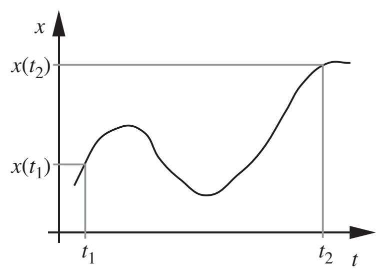


Abb. 1.2: Zeitintervall und Verschiebung. Man beachte, dass die Verschiebung für $x(t_2) < x(t_1)$ negativ ist.

Da sich die Geschwindigkeit eines Körpers i. Allg. ständig ändert, führt man die **Momentangeschwindigkeit** ein[2]:

$$\boxed{v := \frac{dx}{dt}} = \dot{x}(t).$$

Erläuterung: Hohe Geschwindigkeit bedeutet anschaulich, dass sich der Aufenthaltsort

[1] Modelle sind in der Physik von zentraler Bedeutung. Was man in der Physik unter einem Modell versteht, ist in Anhang A erläutert.

[2] Ein Punkt über dem Formelzeichen bedeutet ‚Ableitung nach der Zeit'. Der Begriff ‚Ableitung' wird in Anhang B.3 kurz erläutert.

(die Koordinate) schnell ändert. Im Weg-Zeit-Diagramm ist das dort der Fall, wo die Funktion steil ansteigt. Der Anstieg ist durch die Ableitung von x nach der Zeit t gegeben.

Wenn $v(t) = v_0 = \text{const}$, spricht man von einer **gleichförmigen Bewegung**, andernfalls von einer **ungleichförmigen Bewegung**.

Genauso wie die Koordinate, kann man die Geschwindigkeit über der Zeit auftragen (**Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm**, Abb. 1.3).

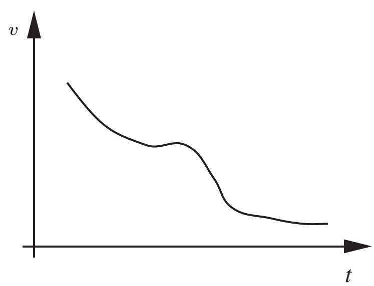


Abb. 1.3: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Insbesondere in der Dynamik zeigt sich, dass die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit von großer Wichtigkeit ist. Analog zur mittleren Geschwindigkeit wird daher die **mittlere Beschleunigung**

$$\bar{a} := \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

($\Delta v := v(t_2) - v(t_1)$) und zur Momentangeschwindigkeit die **Momentanbeschleunigung** eingeführt:

$$a := \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t).$$

Wegen $v(t) = \frac{dx}{dt}$ gilt

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Bekanntlich ist die Umkehrung der Differenziation die unbestimmte Integration[1]. Daher erhält man $v(t)$ aus $a(t)$, indem man die Beschleunigung über die Zeit integriert:

$$v(t) = \int a(t)dt.$$

Ebenso erhält man $x(t)$ durch Integration über $v(t)$, also

$$x(t) = \int v(t)dt.$$

Symbolisch kann man schreiben

$$x(t) \rightleftharpoons v(t) \rightleftharpoons a(t).$$

Dabei steht $\rightharpoonup$ für die Ableitung nach der Zeit und $\leftharpoondown$ für die Integration über die Zeit. Bei jeder unbestimmten Integration tritt eine Integrationskonstante auf. Diese muss aus einer **Anfangsbedingung** bestimmt werden.

Bewegungen mit $a(t) = a_0 = \text{const}$ heißen **gleichförmig beschleunigt**, alle anderen **ungleichförmig beschleunigt**. Beispielsweise fallen in der Nähe der Erdoberfläche alle Gegenstände mit der konstanten Beschleunigung $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ (**Erdbeschleunigung**), sofern die Wirkung des Luftwiderstands vernachlässigt werden kann.

Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen erhält man durch integrieren und unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen $v(t_0) = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit) und $x(t_0) = x_0$ (Teilchenkoordinate zur Anfangszeit t_0)

$$v(t) = a_0(t - t_0) + v_0,$$
$$x(t) = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Aufgaben

1.1.1-1 Das Weg-Zeit-Diagramm einer Bewegung habe die Form eines Trapezes. Zeichnen Sie das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm!

[1] vgl. Abschnitt B.3 im Anhang

1.1.1-2 Für einen fallenden Gegenstand gilt näherungsweise $x(t) = bt^2$ mit $b = 5\,\mathrm{m/s^2}$.
a) Bestimmen Sie seinen Ort für $t = 1\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}, 5\,\mathrm{s}$ und die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 5\,\mathrm{s}$.
b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten fünf Sekunden?
c) Berechnen Sie die momentane Beschleunigung zur Zeit $t = 5\,\mathrm{s}$.

Lösung: $v = 50\,\mathrm{m/s}, \bar{v} = 25\,\mathrm{m/s}, a = \bar{a} = 10\,\mathrm{m/s^2}$

1.1.1-3 Ein Teilchen befindet sich zur Zeit $t =: t_0 = 2\,\mathrm{s}$ am Ort $x(t_0) = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Es bewegt sich mit $v(t) = v_0 \cos(\omega t), v_0 = 2\,\mathrm{m/s}, \omega = 4\,\mathrm{s^{-1}}$. Gesucht: $a(t)$ und $x(t)$ für $t =: t_1 = 10\,\mathrm{s}$.

Lösung: $-5{,}96\,\mathrm{m/s^2}$, $-2{,}21\,\mathrm{cm}$

1.1.1-4 Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für $v(t)$ und $x(t)$ bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung her!

1.1.1-5 Ein Auto bremst mit einer Verzögerung von $6{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ und legt bis zum Stillstand 45 m zurück. Wie groß sind Bremszeit und Anfangsgeschwindigkeit?

Lösung: 3,72 s, 24,2 m/s

1.1.1-6 Eine Rakete beschleunige in der Startphase gemäß $a = ct$ mit $c = 3\,\mathrm{m/s^3}$. Geben Sie ihre Geschwindigkeit und die zurückgelegte Wegstrecke 5 s nach dem Start an.

Lösung: 37,5 m/s, 62,5 m

1.1.1-7 Die Geschwindigkeit eines Körpers, der durch ein viskoses Medium fällt, ist $v(t) = v_L(1 - e^{-Pt})$. Welche Strecke legt eine Stahlkugel in Glycerin in der Zeit $t = 1/P$ zurück, wenn sie anfänglich ruhte ($v_L = 7\,\mathrm{cm/s}$, $P = 140\,1/\mathrm{s}$)?

Lösung: 0,184 mm

1.1.2 Bewegung im Raum

Zur eindeutigen Bestimmung der Lage eines Massenpunkts im Raum sind statt einer Koordinate drei anzugeben. Diese fasst man zweckmäßigerweise in einem Vektor[1)] zusammen (**Ortsvektor**). Bewegt sich der Massenpunkt durch den Raum, so lässt sich seine Bahnkurve beschreiben, indem man zu jedem Zeitpunkt t den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ angibt. Die **Bahnkurve** (Trajektorie), zunächst für die Bewegung in der Ebene, hat also die Form

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

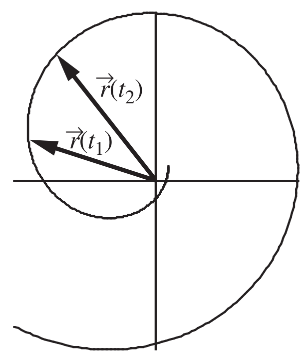


Abb. 1.4: Spiralförmige Bewegung. Die Bahnkurve kann z. B. in der Form $\vec{r}(t) = at \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$ mit $a, \omega = \mathrm{const}$ angegeben werden.

Die Geschwindigkeit ist ebenfalls durch einen Vektor zu beschreiben, den **Vektor der Momentangeschwindigkeit**:

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor liegt zu jedem Zeitpunkt tangential an der Bahnkurve (vgl. Abb. 1.5).

1) vgl. Abschnitt B.1 im Anhang

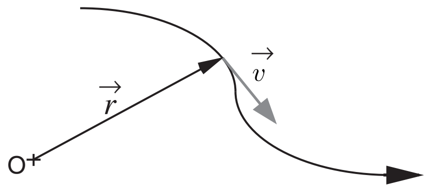


Abb. 1.5: Vektor der Momentangeschwindigkeit

Analog zur geradlinigen Bewegung definiert man den **Vektor der Momentanbeschleunigung**:

$$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix}.$$

Für den Beschleunigungsvektor erweist sich die folgende Zerlegung in Komponenten als zweckmäßig (Abb. 1.6):

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}.$$

Dabei heißt $\vec{a}_{\parallel}$ **Tangential-** oder **Bahnbeschleunigung** und $\vec{a}_{\perp}$ heißt **Zentripetal-** oder **Normalbeschleunigung**.

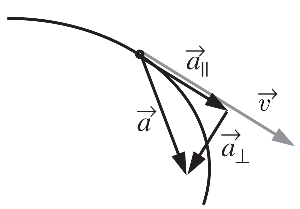


Abb. 1.6: Zerlegung des Beschleunigungsvektors in Komponenten parallel und senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor

Geschwindigkeitsänderungen (d. h. Beschleunigungen) setzen sich aus zwei Anteilen zusammen: Änderung des Betrages von $\vec{v}$ (dem entspricht $\vec{a}_{\parallel}$) und Änderung der Richtung von $\vec{v}$ (dem entspricht $\vec{a}_{\perp}$).

Eine wichtige spezielle Bewegungsform in der Ebene ist die gleichförmig beschleunigte Bewegung, definiert durch $\vec{a} = \vec{a}_0 = \text{const}$. Solange man Luftwiderstand, Tragflächeneffekte (dynamischer Auftrieb) etc. vernachlässigen kann, entsprechen Wurf- und Geschossbahnen einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

wenn ein Koordinatensystem mit nach oben weisender y-Achse gewählt wird.

Geschwindigkeitsvektor und Bahnkurve der gleichförmig beschleunigten Bewegung werden durch

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0(t - t_0) + \vec{v}_0,$$
$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$$

beschrieben.

Eine weitere wichtige Bewegungsform ist die **Kreisbewegung**. In Abbildung 1.7 sind zwei Punkte P_1 und P_2 auf einer rotierenden Scheibe dargestellt.

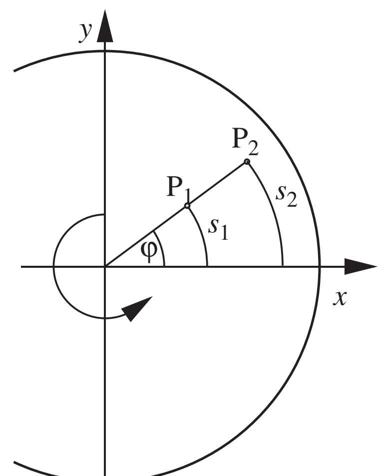


Abb. 1.7: Kreisbewegung

Offenbar legen sie in gleichen Zeiten verschiedene Strecken zurück. Der je Zeiteinheit überstrichene Winkel φ (**Drehwinkel**) ist aber für beide Punkte gleich. Wählt man ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Zentrum der Drehung liegt, so hat der Betrag des Ortsvektors eines beliebig ausgewählten Punktes einen konstanten Wert: $|\vec{r}| =: R = \text{const}$[1]. Die Bahnkurve hat die Form

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi(t) \\ R\sin\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Ableiten nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = R\omega\vec{e}_{\vec{v}}.$$

Hierbei wurde die **momentane Winkelgeschwindigkeit**

$$\omega(t) := \dot{\varphi}(t)$$

und der Einheitsvektor[2] in Richtung von $\vec{v}$

$$\vec{e}_{\vec{v}} := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

eingeführt. ω gibt an, welchen Winkel der Ortsvektor pro Zeiteinheit überstreicht.

Man überzeugt sich leicht, dass die **Bahngeschwindigkeit**, das ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors, mit ω gemäß

$$v(t) = R\omega(t)$$

zusammenhängt. Das heißt: je weiter der betrachtete Punkt von der Drehachse entfernt ist, umso schneller bewegt er sich.

Differenzieren des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit liefert den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = R\alpha\vec{e}_{\vec{v}} - R\omega^2\vec{e}_{\vec{r}},$$

wobei die **momentane Winkelbeschleunigung**

$$\alpha(t) := \dot{\omega}(t)$$

und der radial nach außen weisende Einheitsvektor

$$\vec{e}_{\vec{r}} := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

eingeführt wurden. Der erste Term in der Formel für $\vec{a}$ entspricht der Tangentialbeschleunigung, der zweite demzufolge der Zentripetalbeschleunigung.

Die **mittlere Winkelgeschwindigkeit** im Zeitintervall $\Delta t := t_2 - t_1$

$$\bar{\omega} := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

und die **mittlere Winkelbeschleunigung**

$$\bar{\alpha} := \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

sind in gewohnter Weise definiert.

Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** ($\omega =: \omega_0 = \text{const}$) ist der Zusammenhang zwischen Zeit und Drehwinkel durch

$$\varphi(t) = \omega_0(t - t_0) + \varphi_0$$

gegeben. Die Anzahl der Umläufe pro Zeiteinheit heißt **Drehzahl** oder **Drehfrequenz**. Für sie gilt

$$f := \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

($[f] = \text{s}^{-1} =: \text{Hertz (Hz)}$). Dabei ist T die **Periode** der Kreisbewegung, d. h. die Zeitdauer für einen vollständigen Umlauf.

Auch für die **gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung** gelten Formeln analog zu denen der geradlinigen Bewegung. Die Mathematik ist in beiden Fällen die gleiche – nur die Formelsymbole und deren physikalische Bedeutung sind unterschiedlich:

$$\omega(t) = \alpha_0(t - t_0) + \omega_0$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0.$$

Erfolgt die Bewegung nicht in einer Ebene, sondern im Raum, so ist die Hinzunahme einer

[1] R und φ heißen Polarkoordinaten (vgl. Abschnitt B.5 im Anhang)
[2] vgl. Abschnitt B.1 im Anhang

weiteren Koordinate notwendig. Die Bahnkurve (Trajektorie) hat die Form:

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

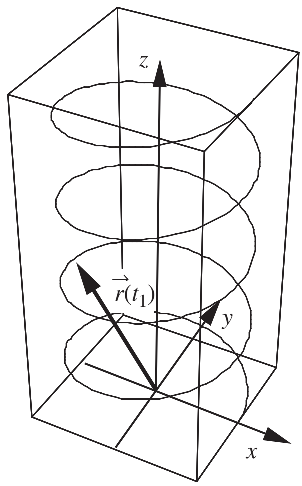


Abb. 1.8: Spiralförmige Bewegung. Bahnkurve: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ bt \end{pmatrix}$ mit $R, b, \omega = \text{const.}$ Die ersten beiden Komponenten entsprechen einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Auch $\vec{v}$ und $\vec{a}$ müssen um eine Komponente erweitert werden.

Kreisbewegungen können im Raum um unterschiedliche Achsen erfolgen. Daher beschreibt man die Winkelgeschwindigkeit durch einem Vektor, dessen Betrag mit $\dot{\varphi}(t)$ und dessen Richtung mit der Richtung der Drehachse übereinstimmt. Aus dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem **Vektor der Winkelgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$ lässt sich der Geschwindigkeitsvektor mithilfe des Kreuzprodukts[1)] berechnen:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

[1)] vgl. Abschnitt B.1 im Anhang

Konsequenterweise beschreibt man auch die Winkelbeschleunigung durch einen Vektor. Dieser ist durch

$$\vec{\alpha} := \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

definiert (**Vektor der Winkelbeschleunigung**).

Aufgaben

1.1.2-1 Ein Teilchen bewegt sich mit der Beschleunigung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ m/s^2. Es befindet sich zur Zeit $t = t_0 = 0$ am Ort $x = 4$ m und $y = 3$ m. Seine Geschwindigkeit ist im gleichen Zeitpunkt durch $\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ m/s gegeben. Berechnen Sie
a) seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2$ s!
b) seinen Ort zur Zeit $t = 4$ s,

Lösung: $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ m/s, $\begin{pmatrix} 44 \\ -9 \end{pmatrix}$ m

1.1.2-2 Die Fallgeschwindigkeit mittelgroßer Regentropfen beträgt bei Windstille ca. 8 m/s. Welche Geschwindigkeit hat ein Zug, an dessen Wagenfenstern die Tropfen Spuren hinterlassen, die um 70° von der Senkrechten abweichen?

Lösung: 79 km/h

1.1.2-3 Vom Dach eines 12 m hohen Hauses wird ein Stein steil nach oben geworfen. Dieser fällt 6,4 s nach dem Abwurf in 32 m Entfernung auf den Erdboden. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit und unter welchem Winkel wurde er abgeschleudert?

Lösung: 29,94 m/s, 80,4°

1.1.2-4 Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 35 m/s unter einem Winkel von

60° abgeschleudert. Bestimmen Sie die Wurfweite, Wurfhöhe und Flugdauer!

Lösung: 108,1 m, 46,8 m, 6,18 s

1.1.2-5 Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Punkt auf der Erdoberfläche
a) am Äquator
b) in Hamburg
relativ zum Sternenhimmel? (Erdumfang ca. 40 000 km, Hamburg liegt auf ca. 54° nördliche Breite, Bahnbewegung der Erde etc. vernachlässigen)

Lösung: ca. 1667 km/h, 980 km/h

1.1.2-6 Bei einer Fluggeschwindigkeit von 420 km/h legt die Nabe der Luftschraube während jeder Umdrehung die Strecke 3,6 m zurück. Welche Drehzahl hat die Luftschraube?

Lösung: 32,4 Hz

1.1.2-7 Ein Elektromotor mit der Drehzahl 4000 min^{-1} läuft innerhalb von 8 s bis zum Stillstand aus. Wie viele Umdrehungen führt er dabei aus?

Lösung: 266,7

1.1.2-8 Ein Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn gemäß $\varphi = at^2 + bt$ ($a = 3\,\text{rad/s}^2$, $b = 2\,\text{rad/s}$). Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung zur Zeit $t = 4$ s!

Lösung: 26 rad/s, 6 rad/s^2

1.1.2-9 Ein Elektromotor führt innerhalb der ersten 10 s nach dem Anlassen 280 Umdrehungen aus, wobei die Drehbewegung 5 s gleichförmig beschleunigt und danach gleichförmig ist. Welche Drehzahl hat der Motor erreicht?

Lösung: 37,3 Hz

1.1.2-10 Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor eines Teilchens, das sich auf der durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} A\sin(\omega t) \\ bt^3 \end{pmatrix}$ beschriebenen Bahnkurve bewegt zur Zeit $t_1 = 10$ s ($A = 10$ cm, $\omega = 2\,\text{s}^{-1}$ und $b = 0{,}01\,\text{m/s}^3$).

Lösung: $\begin{pmatrix} -0{,}3652 \\ 0{,}6000 \end{pmatrix}$ m/s^2

1.2 Dynamik

1.2.1 Newtonsche Axiome

Wie bereits erwähnt, befasst sich die Kinematik mit der mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen. Die Dynamik ist die Lehre vom Zusammenhang zwischen Bewegung und deren Ursache, der Kraft. Zu den zentralen Begriffen Teilchenort, Geschwindigkeit und Beschleunigung kommen die Begriffe Kraft und Masse hinzu.

Den Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderung (d. h. gegen Beschleunigung) nennt man **Trägheit**. Das Maß für die Trägheit heißt Masse. Eine experimentelle Anordnung zur Bestimmung der Masse ist in Abb. 1.9 dargestellt. Auszumessende und Referenzmasse werden durch eine Feder beschleunigt.

Je träger ein Körper ist, umso mehr wird er versuchen, seine Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ beizubehalten. Die **Masse** eines Körpers ergibt sich aus

$$m := m_0 \frac{v_0}{v}.$$

Dabei ist m_0 eine Referenzmasse (Kilogrammprototyp) und v_0 deren Geschwindigkeit. v ist die Geschwindigkeit des Körpers, dessen Masse bestimmt werden soll. (Einem Körper, der mit großer Geschwindigkeit weg gestoßen wird, wird nach der obigen Formel offenbar eine kleine Masse zugeschrieben.)

Diese etwas ungewöhnliche Art, die Masse einzuführen, hat den Vorteil, dass der Zusammenhang mit der Trägheit sehr deutlich wird und außerdem nur Größen verwendet werden, die vorher definiert worden sind.

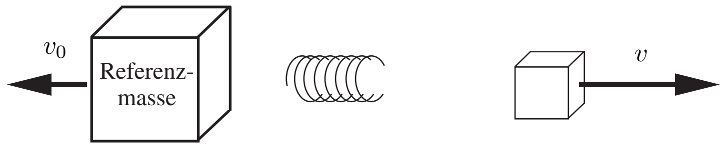


Abb. 1.9: Zur Definition der trägen Masse. Eine Feder wird zwischen einem Referenzkörper und dem Körper, dessen Masse zu bestimmen ist, gestaucht. Beide Körper werden gleichzeitig losgelassen. Dies kann so eingerichtet werden, dass sie sich in genau entgegengesetzte Richtungen auseinander bewegen. Reibungseffekte müssen vernachlässigbar klein sein.

Körper gleicher Masse nehmen bei unterschiedlicher stofflicher Zusammensetzung verschiedene Volumina ein. Um diesen Sachverhalt quantitativ zu erfassen, führt man die **Dichte** ein. Im einfachsten Fall der homogen[1) aufgebauten Körper ist die Dichte das Verhältnis aus Masse und Volumen

$$\rho := \frac{m}{V}.$$

Newton[2) hatte die Vorstellung, dass sich alle Erscheinungen der Mechanik (zumindest im Prinzip) aus wenigen Axiomen[3) ableiten lassen sollten. Die drei **Newtonschen Axiome** lauten:

1. Axiom (Trägheitsgesetz[4)) Jeder Körper verharrt in einem Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Bis Galilei glaubte man, dass alle Gegenstände zur Ruhe kommen, wenn keine äußeren Kräfte wirken[5). Durch Galilei verändert sich der Standpunkt grundsätzlich: bewegte Körper kommen aufgrund der immer vorhandenen Reibungskräfte zur Ruhe.

2. Newtonsches Axiom (Dynamisches Grundgesetz, Aktionsgesetz) Das Dynamische Grundgesetz

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}} \qquad (**)$$

kann als Definitionsgleichung für die physikalische Größe **Kraft** aufgefasst werden. m und $\vec{a}$ sind zuvor definiert worden. Somit lässt sich über die Messung der Beschleunigung schließen, welche resultierende Kraft auf einen Körper wirkt ($[\vec{F}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ =: Newton (N)).

Viel bedeutender ist das Dynamische Grundgesetz in einer anderen Funktion (**Hauptaufgabe der Mechanik**): Beachtet man, dass die Beschleunigung als erste Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit definiert ist, so ist klar, dass (**) als Differenzialgleichung[6) aufgefasst werden kann. Wenn die auf einen Körper wirkende Kraft als Funktion von $\vec{r}$, $\vec{v}$, t und evtl. weiterer Variablen gegeben ist und Anfangsbedingungen der Art $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ vorliegen, so liefert die Lösung der Differenzialgleichung $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$, d. h. die Bahnkurve des Körpers. Die Bewegung von Körpern lässt sich also mit mathematischen Mitteln aus den wirkenden Kräften bestimmen! Im Zusammenhang mit

[1) homogen: überall gleich beschaffen
[2) Sir Isaac Newton, 1643-1727
[3) Axiom: Grundsatz, der ohne Beweis als wahr angenommen wird.
[4) geht auf Galileo Galilei,1564 - 1642, zurück
[5) Aristoteles, 384 – 322 v. Chr.
[6) vgl. Anhang B.4

diesem Problemkreis wird (**) auch **Bewegungsgleichung** genannt.

(Hinweis: (**) lässt sich umstellen zu $\vec{a} = \vec{F}/m$. Gemäß dem im Abschnitt Kinematik Gesagten erhält man $\vec{r}(t)$ durch zweifaches Integrieren. Wozu braucht man also das Dynamische Grundgesetz? Das Verfahren mit der Integration funktioniert nur, wenn die Beschleunigung als Funktion der Zeit bekannt ist. Dies ist aber häufig nicht der Fall.)

Das Dynamische Grundgesetz ist die wichtigste Formel der Physik!

Newton hat das Dynamische Grundgesetz in einer allgemeiner gültigen Form angegeben:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

mit

$$\boxed{\vec{p} := m\vec{v}} \qquad (\textbf{Impuls}).$$

Diese Formel ist auch dann gültig, wenn sich die Masse im Laufe der Bewegung ändert, z. B. beim Start einer Rakete (Treibstoffausstoß).

3. Axiom (Wechselwirkungsgesetz) Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine Kraft $\vec{F}_{12}$ aus, so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1, also

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.}$$

Aufgaben

Hinweis: Auf Körper in der Nähe der Erdoberfläche wirkt die Gewichtskraft mg, die senkrecht nach unten in Richtung Erdmittelpunkt wirkt (vgl. Abschnitt 1.3.2).

1.2.1-1 Welche Kraft wirkt im Halteseil eines Aufzugs von 1500 kg Masse beim Anfahren nach oben/unten, wenn die Beschleunigung in beiden Fällen 1,5 m/s^2 beträgt?

Lösung: ca. 17,0 kN, 12,5 kN

1.2.1-2 Eine Person trägt ein 10 kg schweres Postpaket an einer Schnur (Reißfestigkeit 150 N) und betritt einen Aufzug. Welche Beschleunigung darf beim Anfahren des Aufzugs nicht überschritten werden, damit die Schnur nicht reißt?

Lösung: 5,19 m/s^2

1.2.1-3 Auf einen Körper wirke eine konstante Kraft $\vec{F}_0$. Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichung an (nicht rechnen, nachdenken!).

1.2.1-4 Die resultierende Kraft auf einen Körper der Masse m sei $F = F_0 - kt$ (F_0, k Konstanten, t Zeit). Geben Sie die Teilchenposition als Funktion der Zeit an!

Lösung: $x(t) = \dfrac{F_0}{2m}t^2 - \dfrac{k}{6m}t^3 + v_0 t + x_0$

1.2.1-5 Auf einen geöffneten Fallschirm, der mit der Geschwindigkeit v fällt, wirkt eine Kraft cv^2 entgegen der Bewegungsrichtung. Wie groß ist die konstante Endgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers?

Lösung: $\sqrt{mg/c}$

1.2.1-6 Ein Auto ($m = 1000$ kg) fährt mit konstanter Geschwindigkeit ($v_0 = 120$ km/h) auf einer ebenen Straße. Welche Strecke legt es innerhalb von 20 s zurück, wenn der Motor plötzlich ausgekuppelt wird? Welche Geschwindigkeit hat es 20 s nach dem Auskuppeln?
(Man nehme an, dass der Luftwiderstand und alle Reibungskräfte näherungsweise durch den Ansatz $F_R = -cv^2$ mit $c = 0{,}8$ kg/m beschreibbar seien!).

Lösung: 21,7 m/s, 534 m

1.2.1-7 Ein Mann (Masse 75 kg) und ein Kind (Masse 25 kg) befinden sich auf einem zugefrorenen See. Sie ziehen an den Enden eines Seils. In welchem Verhältnis stehen die Beschleunigungen von Mann und Kind?

Lösung: 1 : 3

1.2.2 Dynamik starrer Körper

Häufig können ausgedehnte Körper näherungsweise als starr (d. h. nicht verformbar) angesehen werden (Modellvorstellung des **starren Körpers**). Die Bewegung starrer Körper lässt sich als Überlagerung einer **Translationsbewegung** (der Körper nimmt zu allen Zeiten zur Anfangslage parallele Lagen ein) des Schwerpunktes[1)] und einer **Rotationsbewegung** um den Schwerpunkt auffassen. Bei der Behandlung der Bewegungsgesetze spielen Kreisbewegungen eine wichtige Rolle, da alle Bestandteile eines rotierenden Körpers auf Kreisbahnen umlaufen. Das Dynamische Grundgesetz kann in eine Form gebracht werden, die zur Behandlung von Kreisbewegungen besonders geeignet ist.

Versucht man einen drehbar gelagerten Körper in Rotation zu versetzen, so stellt man fest, dass die erzielte Wirkung (die Winkelbeschleunigung) nicht nur von der aufgewändeten Kraft, sondern genauso stark vom Abstand Drehachse – Wirkungslinie (dem **Hebelarm**) der Kraft abhängt (Abb. 1.10).

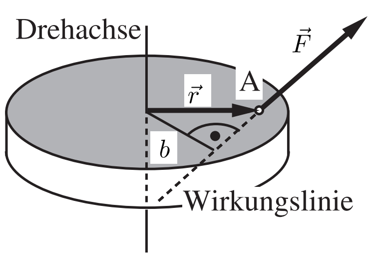


Abb. 1.10: Drehmoment einer Kraft $\vec{F}$ mit Angriffspunkt A

Das Produkt aus diesen beiden Einflussfaktoren nennt man **Drehmoment**

$$M = bF$$

oder vektoriell

$$\boxed{\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}.}$$

Im Folgenden wird ein Massenpunkt betrachtet, der sich unter der Wirkung einer Kraft auf einer Kreisbahn vom Radius r bewegt. Die Kraft $\vec{F}$ wird analog zur Beschleunigung in zwei Komponenten zerlegt (vgl. Abb. 1.11).

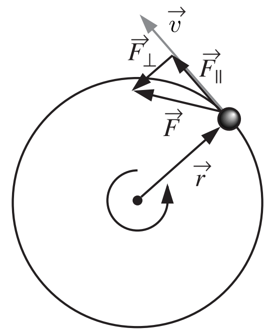


Abb. 1.11: Kraftzerlegung bei der Kreisbewegung

Die **Zentripetalkraft** $\vec{F}_\perp$ wirkt zum Drehzentrum hin und ist für die Richtungsänderung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ verantwortlich. Offenbar gilt (vgl. Kinematik der Kreisbewegung):

$$F_\perp = ma_\perp = -mr\omega^2.$$

Ebenso

$$F_\parallel = ma_\parallel = mr\alpha$$

und daher

$$M = rF_\parallel = mr^2\alpha.$$

Dieser Formel ist zu entnehmen, dass die Winkelbeschleunigung umso kleiner ausfällt, je weiter die Masse von der Drehachse entfernt ist. Die Trägheit eines Körpers hängt bei Drehbewegungen also nicht nur von der Masse, sondern auch von deren Abstand zur Drehachse ab.

[1)] Der **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt** eines Körpers lässt sich experimentell ermitteln, indem man den Körper nacheinander an mindestens zwei verschiedenen Punkten an einem Faden aufhängt. Denkt man sich den Faden jeweils nach unten verlängert, so ergibt der Schnittpunkt der Verlängerungslinien die Lage des Schwerpunkts.

Betrachtet man einen starren Körper, der aus mehreren näherungsweise punktförmigen Massen zusammengesetzt ist (vgl. Abb. 1.12), so gilt die obige Überlegung für jede der Massen.

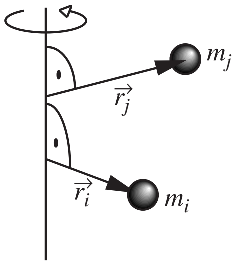


Abb. 1.12: Starrer Körper, der aus punktförmigen Massen zusammengesetzt ist

Da diese alle mit der selben Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, gilt

$$M_{\text{res}} = J\alpha,$$

wobei J **Massenträgheitsmoment** genannt wird und durch

$$J := \sum_{\text{alle Teilchen}} m_i r_i^2$$

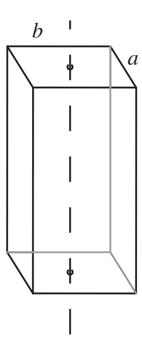
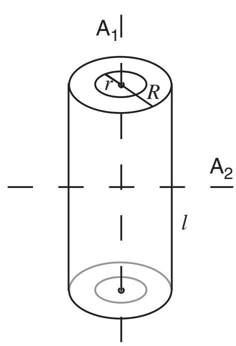
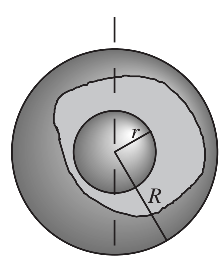
gegeben ist.

Bei kontinuierlichen Massenverteilungen tritt in der obigen Formel anstelle der Summe ein Integral (vgl. Abb. 1.13):

$$J := \int_{\text{Volumen}} r^2\, dm.$$

Wichtig ist, dass das Massenträgheitsmoment keine feste Eigenschaft des rotierenden Körpers ist, sondern immer nur in Bezug auf eine bestimmte Drehachse angegeben werden kann. Für einfache Körper sind Trägheitsmomente bezüglich verschiedener Achsen tabelliert (vgl. Tabelle 1.1).

Tabelle 1.1: Massenträgheitsmomente bezüglich einiger Symmetrieachsen einfacher Körper. Die Formeln für Vollzylinder und Vollkugel sind als Spezialfälle enthalten. Auch das Trägheitsmoment eines langen, dünnen Stabes bezüglich einer Schwerpunktachse senkrecht zur Stabachse lässt sich leicht ablesen.

<table>
<tr><th>Quader</th><th>Hohlzylinder</th><th>Hohlkugel</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$</td><td>$\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$ für A_1
$\frac{1}{4}m(R^2+r^2+\frac{1}{3}l^2)$ für A_2</td><td>$\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

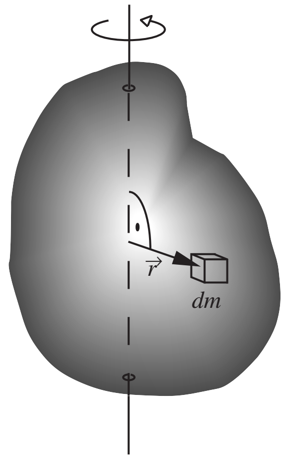


Abb. 1.13: Starrer Körper bei kontinuierlicher Massenverteilung

Für andere Achsen kann das Trägheitsmoment häufig mithilfe des **Steinerschen Satzes** berechnet werden: Das Trägheitsmoment eines Körpers der Masse m bezüglich einer Achse A sei J_A. Das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse, die durch den Körperschwerpunkt S und parallel zu A verläuft, sei J_S (vgl. Abb. 1.14). Haben die beiden Achsen den Abstand a voneinander, so gilt

$$J_A = J_S + ma^2 \ .$$

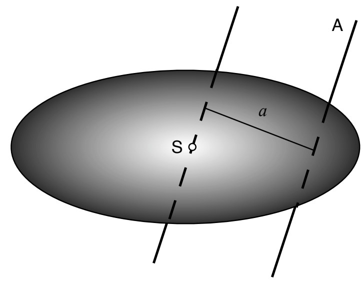


Abb. 1.14: Zwei zueinander parallele Rotationsachen im Abstand a. Eine der beiden Achsen geht durch den Schwerpunkt des Körpers.

Betrachtet man Tabelle 1.2, so stellt man fest, dass zu jedem Ausdruck in der linken Spalte ein ähnlicher Ausdruck in der rechten Spalte gehört – die Formeln für translatorische Bewegungen und für Rotationsbewegungen weisen eine große formale Ähnlichkeit auf.

Zum Beispiel lautet das Dynamische Grundgesetz der Drehbewegung in vektorieller Form

$$\vec{M}_{\text{res}} := J\vec{\alpha}.$$

Als Gegenstück zum Impuls wird der **Drehimpuls** eingeführt:

$$\vec{L} := J\vec{\omega}$$

Tabelle 1.2: Translations- und Rotationsgrößen. Der Punkt bedeutet wie üblich die Ableitung nach der Zeit.

Translationsgröße		**Rotationsgröße**	
Ortskoordinate	x	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \dot{v}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega}$
Masse	m	Massenträgheitsmoment	J
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = J\omega$
Kraft	$F = ma = \dot{p}$	Drehmoment	$M = J\alpha = \dot{L}$
Arbeit	$dW = F dx$	Arbeit	$dW = M d\varphi$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Leistung	$P = Fv$	Leistung	$P = M\omega$