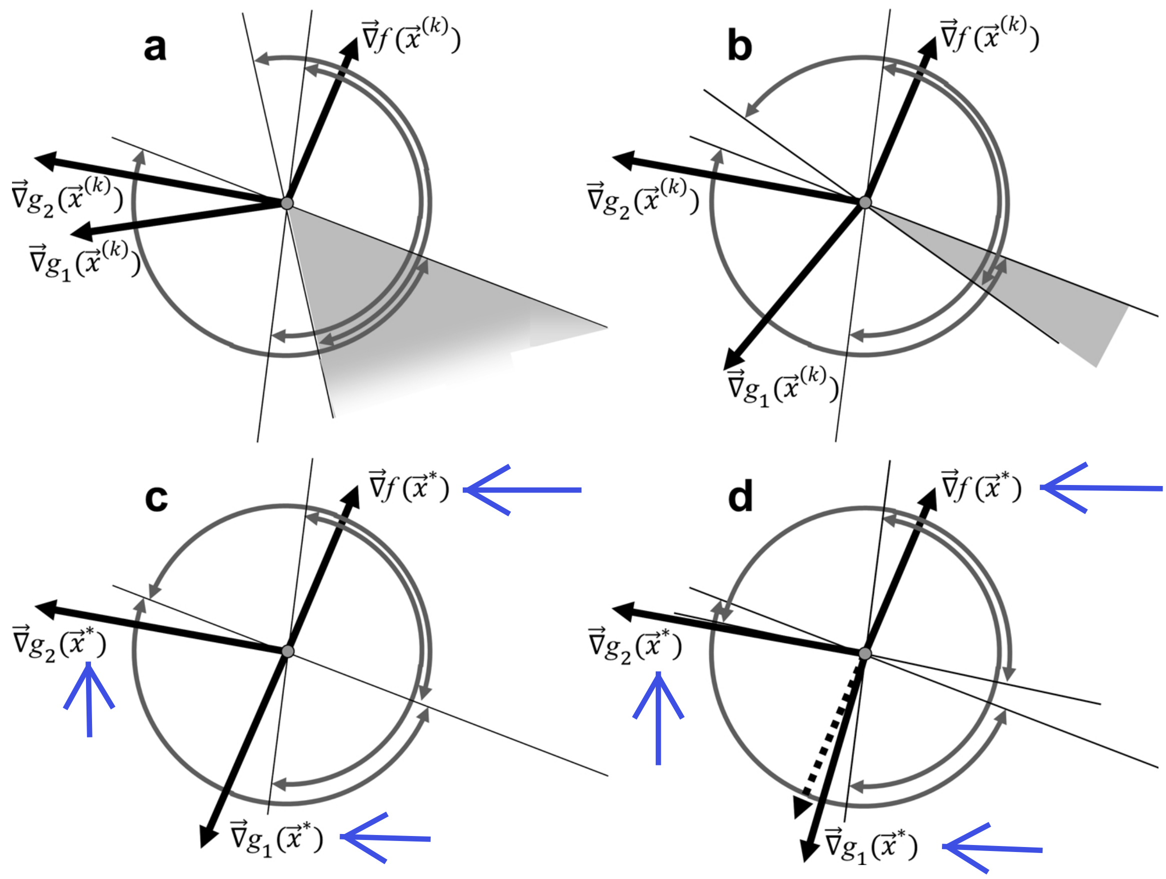

Abb. 3.11 Verschiedene mögliche Anordnungen der Gradienten einer Zielfunktion und zweier aktiven Restriktionen. Bei c) und d) ist das Optimum erreicht, weil kein zulässiger und brauchbarer Bereich mehr existiert.

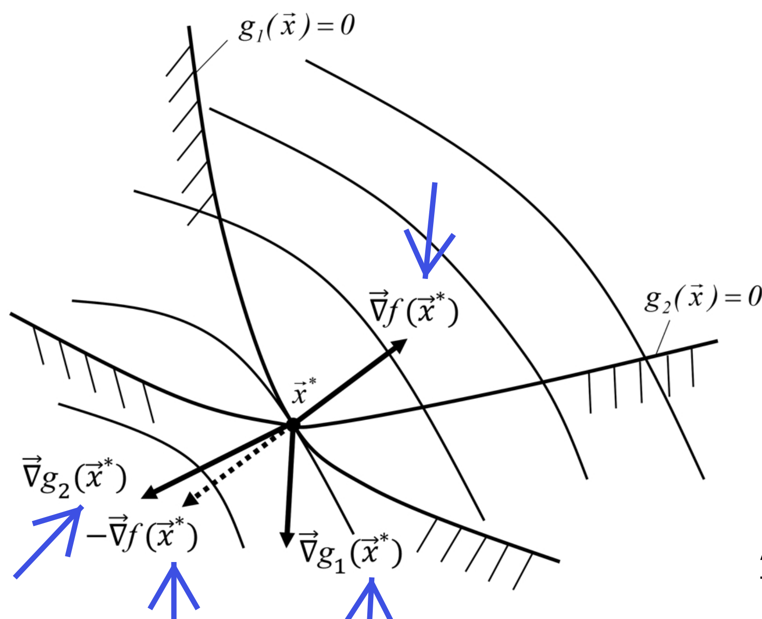

Abb. 3.12 Veranschaulichung der Kuhn-Tucker-Bedingungen im Optimum

Sei $\overrightarrow{x}^*$ ein regulärer Punkt und Lösung des Optimierungsproblems

$$\min f(\overrightarrow{x}),$$

sodass

$$\begin{aligned} &g_j(\overrightarrow{x}) \leqq 0; && j = 1, m \\ &h_k(\overrightarrow{x}) = 0; && k = 1, q \\ &x_i^L \leqq x_i \leqq x_i^U; && i = 1, n, \end{aligned} \tag{3.45}$$

oder als zentrale Differenz

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\frac{1}{2}\Delta x) - f(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \tag{7.49}$$

bestimmen. Wenn keine schwerwiegenden Gründe dagegen sprechen, wird man Vorwärtsdifferenzen verwenden, weil dann nur eine zusätzliche Analyse am Punkt $x+\Delta x$ benötigt wird, bei zentralen Differenzen dagegen zwei zusätzlichen Analysen an den Punkten $x+\frac{1}{2}\Delta x$ und $x-\frac{1}{2}\Delta x$.

Die Verallgemeinerung der Vorwärtsdifferenz bei n Designvariablen lautet

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_i} &\approx \frac{\Delta f(\overrightarrow{x})}{\Delta x_i} \qquad (7.50)\\ &= \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{\Delta x_i}.\end{aligned}$$

Hier müssen neben der Analyse am aktuellen Punkt $\overrightarrow{x}$ noch n zusätzliche, also insgesamt $n+1$, Analysen pro Iteration bestimmt werden. Für ein Optimierungsproblem mit 9 Designvariablen, das in 15 Iterationen gelöst wird, benötigt man demnach 150 Analysen. Dies treibt nicht nur die Kosten, sondern auch die Wartezeit auf das Optimierungsergebnis in die Höhe. Letztere kann man jedoch reduzieren, wenn man alle benötigten $n+1$ Analysen in einer Iteration parallel auf verschiedenen Computern rechnet.

Ein weiterer Nachteil der finiten Differenzen ist numerischer Art. Bei einer ungeschickten Wahl von Δx kann das Ergebnis sehr ungenau sein. Verstärkt wird das Problem, wenn stark oszillierende Strukturantworten vorliegen, unabhängig davon, ob es sich um Rauschen oder eine systembedingte Oszillation handelt. Solche Oszillationen können beispielsweise beim Crash auftreten. In einem solchen Fall kann das Ergebnis, wie in Abbildung 7.9 dargestellt, sogar ein falsches Vorzeichen liefern, sodass hier der direkte Einsatz eines Gradientenverfahrens auf Basis der Analyseergebnisse nicht sinnvoll ist. Hier gibt es nur die Möglichkeit, eine glättende Approximation, die den mittleren Verlauf wiedergibt, zu bestimmen und auf dieser ein Gradientenverfahren anzuwenden.

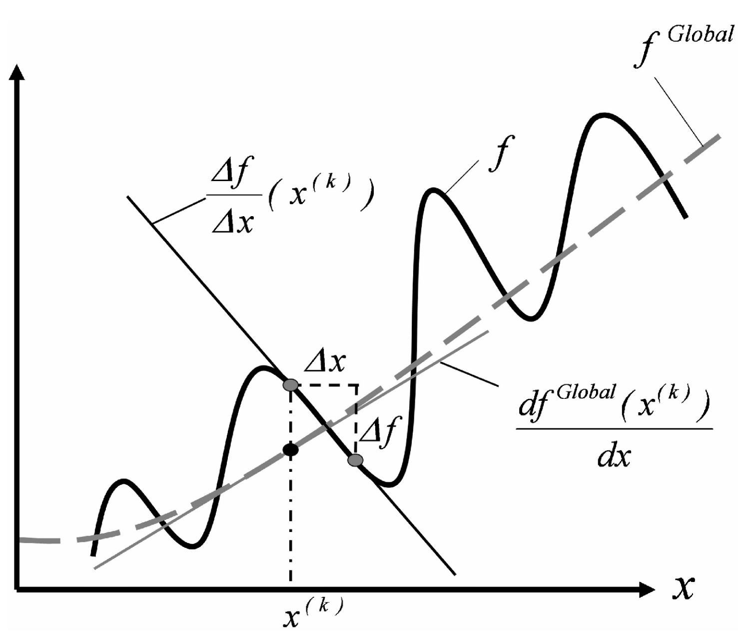

Abb. 7.9 Bildung von finiten Differenzen bei einer oszillierenden Strukturantwort f im Vergleich zur Ableitung einer glättenden Approximation f^{Global}, die den mittleren Verlauf wiedergibt

Wegen der hohen Kosten und der numerischen Unsicherheiten, die mit der Bestimmung der Sensitivitäten über finite Differenzen verbunden sind, ist es empfehlenswert, diese Möglichkeit nur dann zu wählen, wenn es keine Alternative dazu gibt. Für gewisse Analysen, wie beispielsweise lineare Statik, Modalanalyse und transiente Analyse, gibt es jedoch die Möglichkeit, die Sensitivitäten ana-

Addiert man jetzt die Summe aller Nullterme in (7.60) zu $f\left(\vec{x}, \vec{u}\right)$ hinzu, erhält man

$$f = f + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \left(F_j - \sum_{k=1}^{M} K_{jk} u_k \right). \tag{7.61}$$

Das totale Differenzial des Ausdrucks mit dem Zusatzterm auf der rechten Seite ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(\vec{x},\vec{u})}{\mathrm{d}x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial K_{jk}}{\partial x_i} u_k + K_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} - \sum_j \lambda_j K_{jk} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial K_{jk}}{\partial x_i} u_k \right).\end{aligned} \tag{7.62}$$

Die Idee ist nun, die Werte der frei wählbaren Faktoren λ_j, der so genannten adjungierten Variablen, so zu bestimmen, dass die Terme $\partial u_k / \partial x_i$ in Gleichung (7.62) herausfallen. Dies ist offenbar der Fall, wenn für alle k gilt

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} - \sum_j \lambda_j K_{jk} = 0. \tag{7.63}$$

Nutzt man aus, dass die Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist, kann die obige Gleichung vektoriell folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{K} \vec{\lambda} = \vec{\Gamma} \tag{7.64}$$

mit

$$\vec{\lambda}^{\mathrm{T}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M) \tag{7.65}$$

und

$$\vec{\Gamma}^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_2}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial u_M} \right) \tag{7.66}$$

Bei Gleichung (7.64) handelt es sich wieder um die FEM-Gleichung (7.51), jedoch jetzt mit dem Unterschied, dass der Vektor $\vec{u}$ durch den Vektor $\vec{\lambda}$ und der Lastvektor $\vec{F}$ durch den Pseudolastvektor $\vec{\Gamma}$ ersetzt worden sind. Dabei lässt sich der Pseudolastvektor analytisch aus der Basisgleichung für f bestimmen. Über Gleichung (7.64) können daraufhin unter Verwendung der faktorisierten Matrix $\boldsymbol{K}$ die adjungierten Variablen λ_j berechnet werden. Von Gleichung (7.62) verbleibt nun für das totale Differenzial von f der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}f(\vec{x},\vec{u})}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial K_{jk}}{\partial x_i} u_k \right). \tag{7.67}$$

Dabei können, wie schon bei der direkten Methode, die Terme $\partial K_{jk} / \partial x_i$ entweder analytisch oder semi-analytisch bestimmt werden. Ebenso kann man im letzteren Fall, den aus den finiten Differenzen resultierende Fehler mit der in Abschnitt 7.2.2.3 beschriebenen Methode korrigieren.

Im Gegensatz zur direkten Methode muss hier für die Zielfunktion und für jeweils jede der m Restriktionen ein Pseudolastfall gelöst werden und man erhält dadurch für jede dieser Funktionen direkt die partiellen Ableitungen nach allen Designvariablen. Bei n_{LC} physikalischen Lastfällen führt dies zu insgesamt $(m + 1 + n_{LC})$ Pseudolastfällen. Die adjungierte Methode ist somit dann empfehlenswert, wenn die Anzahl der Designvariablen n groß gegenüber der Anzahl der Restriktionen m ist. Sie findet deswegen vor allem in der Topologieoptimierung Verwendung, bei der typischerweise die Anzahl der Designvariablen sehr hoch ist und oft nur eine Restriktion auf den Füllgrad verwendet wird. Ein weiterer Vorteil ergibt sich, wenn die globale mittlere Nachgiebigkeit