Lösungen zu

Physik für Ingenieure

Bachelor Basics

3. Auflage 2016

Edition Harri Deutsch bei Europa-Lehrmittel

Europa-Nr.: 58577, ISBN 978-3-8085-5857-7

Bernd Baumann

Letzte Änderung am 9.9. 2016

Mechanik

Kinematik

Bewegung entlang einer Geraden

Aufgabe 1.1.1-1

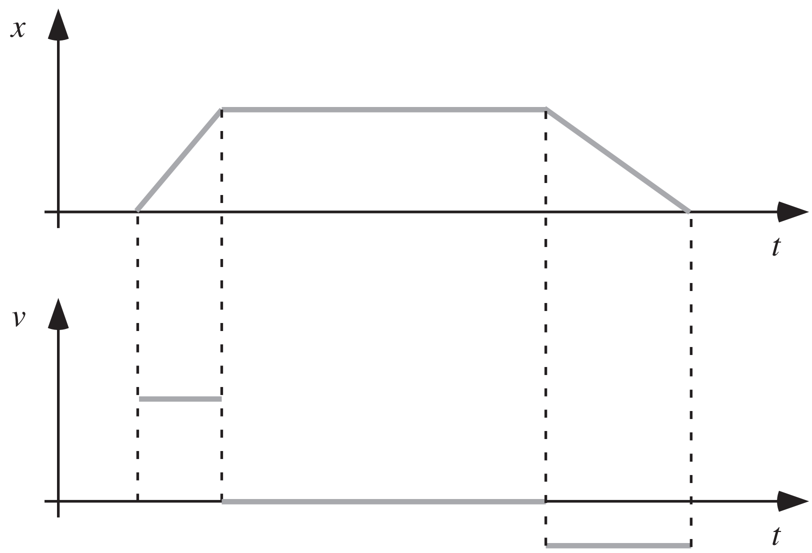

Abbildung 1: Eine reale Bewegung kann bestenfalls näherungsweise durch ein Weg-Zeit-Diagramm in der Form eines Trapezes beschrieben werden. Der abknickende Funktionsverlauf hat nämlich Sprünge im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm zur Folge. Diese würden eine unendlich große Beschleunigung erfordern. Die Kurve im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm muss an den Sprungstellen unterbrochen werden, da es sich sonst nicht um eine Funktion handeln würde.

Aufgabe 1.1.1-3

$$a(t) = \dot{v}(t) = -v_0\omega \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad a(t_1) = -5{,}96\ \mathrm{m/s^2} \quad \text{(Achtung, Bogenmaß!)}$$

$$x(t) = \int v(t)\, dt = v_0 \int \cos \omega t\, dt = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + c$$

$$x(t_0) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t_0 + c = x_0 \quad\Rightarrow\quad c = x_0 - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t_0 = -0{,}395\ \mathrm{m}$$

$$\Rightarrow\quad x(t_1) = -2{,}21\ \mathrm{cm}$$

Aufgabe 1.1.1-5

$$v(t) = a_0 t + v_0 \quad\Rightarrow\quad v_1 = a_0 t_1 + v_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad v_0 = -a_0 t_1$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + v_0 t_1$$

Einsetzen von v_0 (erste Zeile) liefert

$$x_1 = -\frac{1}{2}a_0 t_1^2 = 45\ \mathrm{m} \quad\Rightarrow\quad t_1 = 3{,}72\ \mathrm{s}$$

(die beiden Minuszeichen heben sich weg). Einsetzen ergibt $v_0 = 24{,}2\ \mathrm{m/s}$.

Bewegung im Raum

Aufgabe 1.1.2-3

$$x(t) = v_{0x}t, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h$$

Landung:

$$x(t_1) = v_{0x}t_1 = s \quad\Rightarrow\quad v_{0x} = \frac{s}{t_1} = 5{,}00\ \mathrm{m/s}$$

$$z(t_1) = \left(v_{0z} - \frac{1}{2}gt_1\right)t_1 + h = 0 \quad\Rightarrow\quad v_{0z} = \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1} = 29{,}52\ \mathrm{m/s}$$

Damit:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0z}^2} = 29{,}94\ \mathrm{m/s}, \quad \tan\alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \quad\Rightarrow\quad \alpha = 80{,}4^\circ$$

Aufgabe 1.1.2-9

$0 \le t \le t_1$:

$$\omega(t) = \alpha_0 t \quad\Rightarrow\quad \alpha_0 = \frac{\omega_1}{t_1}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega_1}{t_1}t^2 \quad\Rightarrow\quad \varphi(t_1) = \frac{1}{2}\omega_1 t_1$$

$t_1 \le t \le t_2$:

$$\varphi(t) = \omega_1(t - t_1) + \varphi(t_1) \quad\Rightarrow\quad \varphi(t_2) = \omega_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\omega_1 t_1 = \omega_1(t_2 - \frac{1}{2}t_1)$$

$$\Rightarrow\quad \omega_1 = \frac{\varphi(t_2)}{t_2 - \frac{1}{2}t_1} \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\omega_1}{2\pi} = 37{,}3\ \mathrm{Hz}$$

Aufgabe 1.1.2-10

Richtige Lösung:

$$\vec{a}(t_1) = \begin{pmatrix} -0{,}3652 \\ 0{,}6000 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$$

Dynamik

Newtonsche Axiome

Aufgabe 1.2.1-6

Dieses Problem stellt ein typisches Beispiel für die *Hauptaufgabe der Mechanik* dar.

$$F_{\text{Res}} = -cv^2 = ma = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{c}{m}dt \quad \text{(Trennung der Variablen)}$$

Integration

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{c}{m}\int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -\frac{c}{m}t + c_1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{\frac{c}{m}t - c_1}$$

1. Anfangsbedingung

$$v(t_0) = v_0 = -\frac{1}{c_1} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v_0}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{mv_0}{v_0ct + m} \quad \Rightarrow \quad v(t_1) = 21{,}7 \text{ m/s}$$

Jetzt ist v als Funktion von t bekannt, und damit ergibt sich $x(t)$ wie in Abschnitt *Kinematik* dargestellt:

$$x(t) = \int v(t)\,dt = mv_0 \int \frac{dt}{v_0ct + m} = \frac{m}{c}\ln(v_0ct + m) + c_2$$

(vgl. eine Mathematik Formelsammlung)

2. Anfangsbedingung

$$x(t_0) = \frac{m}{c}\ln m + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{m}{c}\ln m$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{m}{c}\ln(1 + \frac{v_0c}{m}t) \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = 534 \text{ m}$$

Dynamik der Kreisbewegung

Aufgabe 1.2.2-3

$$J = \frac{1}{12}ml^2, \qquad J' = \frac{1}{12}m'l'^2 = 2J = \frac{1}{6}ml^2$$

$$\varrho = \frac{m}{Al} = \frac{m'}{Al'} \quad \Rightarrow \quad m = Al\varrho, \quad m' = Al'\varrho \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{12}Al'\varrho l'^2 = \frac{1}{6}Al\varrho l^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}l'^3 = l^3 \quad \Rightarrow \quad l' = \sqrt[3]{2}\, l = 94{,}5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = 19{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 1.2.2-4

$$M = J\alpha \qquad \text{mit} \qquad J = \frac{1}{2}mR^2$$

Mit

$$m = \varrho V = \varrho\frac{\pi}{4}d^2 l \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\pi}{32}\varrho l d^4$$

$$\alpha = \frac{\omega_1}{t_1} \qquad \text{mit} \qquad \omega_1 = 2\pi f$$

$$F = \frac{M}{r} = 24{,}0 \text{ N}$$

Kräfte - ein Überblick

Nichtfundamentale Kräfte

Aufgabe 1.3.2-2

$$F_\mathrm{H} = mg\sin\alpha, \quad F_\mathrm{R} = \mu F_\mathrm{N} = \mu mg\cos\alpha$$

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{H} - F_\mathrm{R} = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0{,}3664 \text{ m/s}^2 \\ a_2 = 0{,}5863 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2, \quad x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = \frac{1}{2}a_2(t_1 - \Delta t)^2$$

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}a_2(t_1 - \Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{a_1}\, t_1 = \pm\sqrt{a_2}\,(t_1 - \Delta t)$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{\Delta t}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}} = 4{,}77 \text{ s}, \quad x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 4{,}18 \text{ m}$$

Scheinkräfte

Aufgabe 1.3.3-5

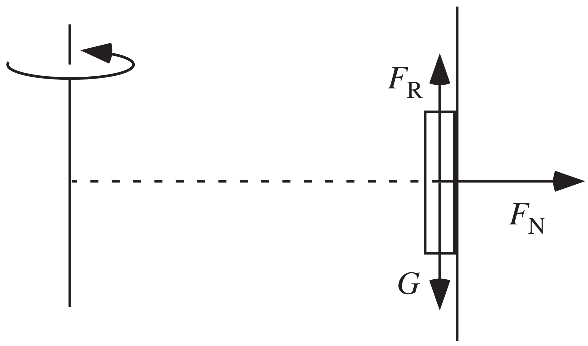

Abbildung 2: Seitenansicht

Kräftegleichgewicht:

$$F_\mathrm{R} = G \qquad \text{mit} \qquad G = mg \qquad \text{und} \qquad F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{H} F_\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{N} = F'_\mathrm{ZF} = m\omega^2 R = 2\pi^2 m f^2 D$$

Damit

$$\mu_\mathrm{H} = \frac{g}{2\pi^2 f^2 D} = 0{,}303$$

Aufgabe 1.3.3-7

$$\vec{F}'_\mathrm{C} = 2m\,\vec{v}' \times \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_\mathrm{C} = \frac{\vec{F}'_\mathrm{C}}{m} = 2\,\vec{v}' \times \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad a'_\mathrm{C} = 2\omega v' \sin \sphericalangle(\vec{v}', \vec{\omega})$$

$$\mathrm{S} \to \mathrm{N}: \quad \sphericalangle(\vec{v}', \vec{\omega}) = \varepsilon \quad a'_\mathrm{C} = \begin{cases} 1{,}24 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2} \text{ für } \varepsilon = 50^\circ \\ 0 \text{ für } \varepsilon = 0^\circ \end{cases}$$

(Ostablenkung)

$$\mathrm{N} \to \mathrm{S}: \quad \sphericalangle(\vec{v}', \vec{\omega}) = 180^\circ - \varepsilon \quad a'_\mathrm{C} = \begin{cases} 1{,}24 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2} \text{ für } \varepsilon = 50^\circ \\ 0 \text{ für } \varepsilon = 0^\circ \end{cases}$$

(Westablenkung)

$$\mathrm{O} \to \mathrm{W}: \quad \sphericalangle(\vec{v}', \vec{\omega}) = 90^\circ \quad a'_\mathrm{C} = 1{,}62 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2} \text{ für } \varepsilon = 0^\circ/50^\circ$$

(Ablenkung zur Erdachse)

$\mathrm{W} \to \mathrm{O}:$ wie $\mathrm{O} \to \mathrm{W}$ (Ablenkung weg von der Erdachse)

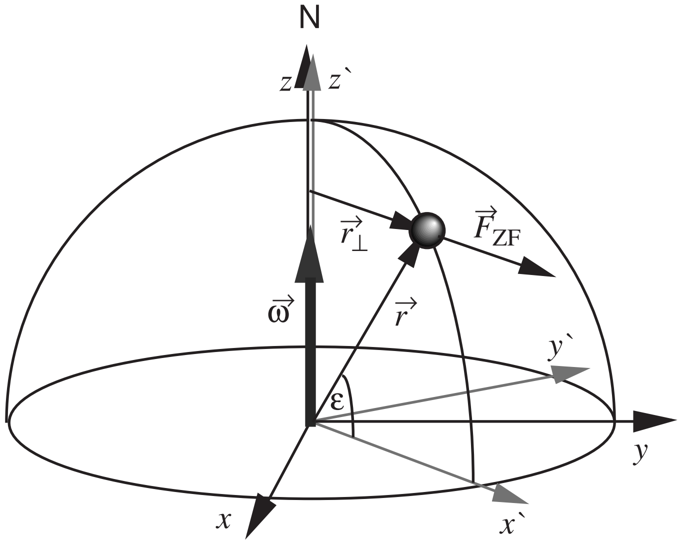

Abbildung 3: Nordhalbkugel der Erde

Erhaltungssätze

Aufgabe 1.4.1-4

$$\Delta E_{\text{Lage}} = mgh = mgs\sin\varphi \qquad (s \text{ zurückgelegte Strecke})$$

Energiesatz:

$$\Delta E_{\text{Lage}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \quad \Rightarrow \quad mgs\sin\varphi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Erfolgt das Rollen ohne Schlupf gilt $v = \omega R$ und damit

$$v = \sqrt{\frac{2mgs\sin\varphi}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Mit $J = \frac{1}{2}mR^2$ (Tabelle 1.1, $r = 0$) folgt

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\varphi}$$

Aufgabe 1.4.1-5

Trägheitsmoment eines dünnen Stabes, der um seinen Schwerpunkt rotiert (vgl. Tabelle 1.2):

$$J_{\text{S}} = \frac{1}{12}ml^2$$

Rotation um Stabende (Steinerscher Satz):

$$J = J_\mathrm{S} + ma^2 = J_\mathrm{S} + m(l/2)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Lageenergie des aufrecht stehenden Stabes (h ist die Höhe des Schwerpunktes):

$$E_\mathrm{L} = mgh = mg\frac{l}{2}$$

Rotationsenergie des Stabes:

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{6}m(l\omega)^2$$

Aus dem Energiesatz folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad \Rightarrow \quad v = \omega l = \sqrt{3gl} = 8{,}58\ \mathrm{m/s}$$

Aufgabe 1.4.1-6

$$W = \int_R^0 F\,dr = \int_R^0 -m\omega^2 r\,dr = 2m\left(\frac{\pi}{T}R\right)^2 = 1990\ \mathrm{J}$$

Impuls und Drehimpuls

Aufgabe 1.4.2-3

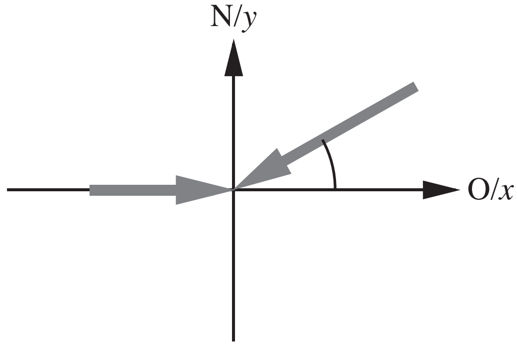

Abbildung 4: Der Stoßprozess, dargestellt in einem Koordinatensystem, dessen x-Achse nach Osten und dessen y-Achse nach Norden zeigt.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5{,}00 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = -\begin{pmatrix} 17{,}32 \\ 10{,}00 \end{pmatrix}$$

Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1{,}28 \\ -1{,}67 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2{,}10\ \mathrm{m/s} \quad \varphi = \arctan\frac{v_y}{v_x} = -52{,}5^\circ \quad \text{(Richtung SO)}$$

Aufgabe 1.4.2-4

a) Energieerhaltung ($E_{\mathrm{Lage}} = E_{\mathrm{kin}}$) impliziert:

$$v = \sqrt{2gh} = 6{,}26\ \mathrm{m/s}$$

b) Unmittelbar nach dem Stoß ist die bremsende Wirkung des Erdreichs noch nicht wirksam. Der Impulssatz lautet

$$(m + m_1)v' = mv \quad \Rightarrow \quad v' = 4{,}08\ \mathrm{m/s}$$

c) Unter der Annahme einer gleichförmig-beschleunigten Bewegung folgt

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 \qquad \text{und} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v'}{\Delta t}$$

Nach Δt umstellen und gleichsetzen führt auf

$$a = \frac{v'^2}{2\Delta x} = 833\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

d) $F = (m + m_1)a = 383\ \mathrm{kN}$

Aufgabe 1.4.2-6

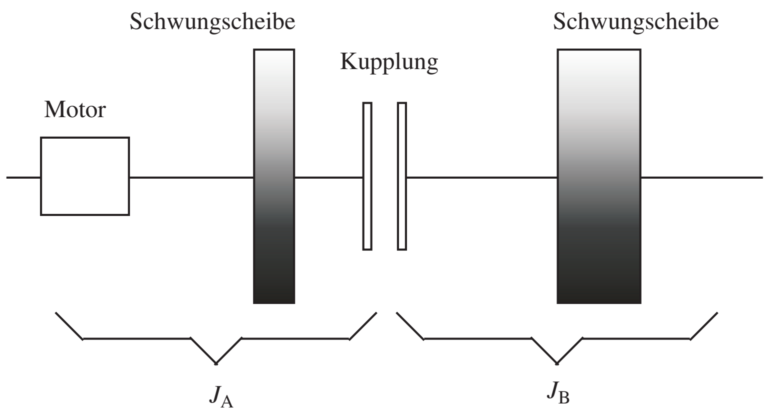

Abbildung 5: Schematische Skizze des Kupplungsprüfstandes

Energieinhalt Welle 1 vor dem Kupplungsvorgang:

$$E_1 = \frac{1}{2}J_{\mathrm{A}}\omega_1^2$$

Energieinhalt Welle 1 und 2 nach dem Kupplungsvorgang:

$$E_1 = \frac{1}{2}(J_\mathrm{A} + J_\mathrm{B})\omega_2^2$$

Dabei berechnet sich ω_2 aus dem Drehimpulserhaltungssatz:

$$\omega_2 = \frac{J_\mathrm{A}}{J_\mathrm{A} + J_\mathrm{B}}\omega_1$$

Reibungswärme:

$$W = E_1 - E_2 = 23{,}9\ \mathrm{kJ}$$

Wärme

Ideale Gase

Aufgabe 2.1-1

$$pV = mN\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}mN\overline{v^2} \quad \text{und} \quad m_{\mathrm{Gas}} = mN = \varrho V \quad \Rightarrow \quad \overline{v} := \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\varrho}}$$

Temperatur

Aufgabe 2.2-3

$$n = \frac{pV}{R_{\mathrm{m}}T} = 6{,}13 \text{ mol} \qquad (T = (25{,}00 + 273{,}15) \text{ K})$$

Wärmeleitung

Aufgabe 2.3-1

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \frac{Q}{t} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}}t$$

$$R_{\mathrm{th}} = \varrho_{\mathrm{th}}\frac{l}{A} = \frac{1}{\lambda}\frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\lambda A \Delta T t}{l} = 83{,}7 \text{ MJ}$$

Zustandsänderungen

Aufgabe 2.4-3

Isothermer Ersatzprozess:

$$\Delta Q = nR_{\mathrm{m}}T_0 \ln\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T_0} = nR_{\mathrm{m}} \ln\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} = R_{\mathrm{m}} \ln 2 = 5{,}76 \text{ J/K}$$

Aufgabe 2.4-4

Die innere Energie des Gesamtsystems beträgt am Anfang

$$U = U_1 + U_2 \qquad \text{mit} \qquad U_1 = 3n_1 R_\mathrm{m} T_1 \qquad \text{und} \qquad U_2 = 3n_2 R_\mathrm{m} T_2$$

Im thermischen Kontakt gleichen sich die Temperaturen an und es gilt

$$U = U_1' + U_2' = 3R_\mathrm{m}(n_1 + n_2)T' \quad \Rightarrow \quad T' = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = 320\ \mathrm{K}$$

Für die Entropieänderung der beiden Bestandteile gilt

$$\Delta S_i = 3n_i R_\mathrm{m} \ln \frac{T'}{T_i}$$

(vgl. Kapitel 2.4, p38). Man erhält

$$\Delta S_1 = +2{,}28\ \mathrm{kJ/K} \qquad \text{und} \qquad \Delta S_2 = -1{,}87\ \mathrm{kJ/K}$$

Die Gesamtänderung der Entropie ergibt sich damit zu

$$\Delta S = +0{,}412\ \mathrm{kJ/K}$$

Aufgabe 2.4-5

Die Definition des Wirkungsgrads der Carnot-Maschine lautet

$$\eta := \frac{\Delta W}{\Delta Q_\mathrm{zu}}$$

Die bei einem vollständigen Umlauf verrichtete Arbeit ist

$$\Delta W = \Delta W_\mathrm{AB} + \Delta W_\mathrm{CD}$$

(die beiden anderen Terme heben sich weg (vgl. Kapitel 2.4, p42)). Da es sich bei beiden Teilprozessen um isotherme Prozesse handelt gilt

$$\Delta W_\mathrm{AB} = \Delta Q_\mathrm{AB} \qquad \text{und} \qquad \Delta W_\mathrm{CD} = \Delta Q_\mathrm{CD}$$

Eingesetzt in die Formel für den Wirkungsgrad und umstellen liefert

$$\Delta Q_\mathrm{CD} = (\eta - 1)\Delta Q_\mathrm{AB} = -0{,}8\ \mathrm{kJ}$$

Die gesuchte Temperatur ergibt sich aus

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1(1 - \eta) = 360\ \mathrm{K}$$

Elektrizität und Magnetismus

Elektrostatik

Coulombsches Gesetz

Aufgabe 3.1.2-2

$$F_{\mathrm{Res}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{d_1^2} - \frac{Q_2}{d_2^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 d_2^2 = Q_2 d_1^2$$

$$\Rightarrow \quad Q_1(d-d_1)^2 = Q_2 d_1^2, \quad \text{da} \quad d = d_1 + d_2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{Q_1}(d-d_1) = \sqrt{Q_2} d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}} d = 10 \text{ mm}$$

Aufgabe 3.1.2-3

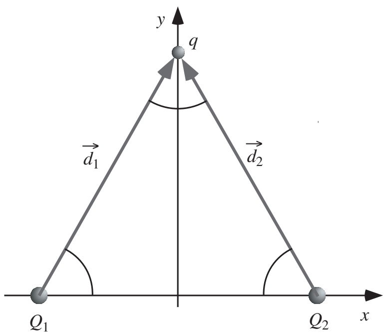

Abbildung 6: Punktladungen sitzen an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks

$$Q_1 = Q_2 =: Q = 9\ \mu\text{C}, \qquad d_1 = d_2 =: d = 30 \text{ cm}$$

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^3}\vec{d}_i$$

$$\vec{d}_1 = d\begin{pmatrix} +\cos 60^\circ \\ +\sin 60^\circ \end{pmatrix}, \qquad \vec{d}_2 = d\begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \\ +\sin 60^\circ \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^3}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}67 \end{pmatrix}\text{N}$$

Kondensatoren

Aufgabe 3.1.5-3

$$Q = C_1 U = 60 \text{ nC}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U' + C_2 U' = (C_1 + C_2)U'$$

$$\Rightarrow \quad U' = \frac{Q}{C_1 + C_2} = 857 \text{ V}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = C_1 U' = 17{,}1 \text{ nC} \quad \text{und} \quad Q_2 = C_2 U' = 42{,}9 \text{ nC}$$

$$E = \frac{1}{2}C_1 U^2 = 90{,}0\ \mu\text{J} \quad \text{und} \quad E' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U'^2 = 25{,}7\ \mu\text{J}$$

Aufgabe 3.1.5-4

$$Q = CU = 25 \text{ nC} \qquad \text{und} \qquad E = \frac{U}{s}125 \text{ kV/m}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{s}, \qquad C' = \varepsilon_\text{r}\varepsilon_0 \frac{A}{s'} \quad \Rightarrow \quad C' = \varepsilon_\text{r} C \frac{s}{s'} = 600 \text{ pF}$$

Stationäre elektrische Ströme

Elektrischer Widerstand

Aufgabe 3.2.2-5

$$U_\text{K} = U_0 - R_\text{i} I = 5{,}4 \text{ V}$$

$$R_\text{ges.} = R_\text{i} + R_\text{Leitungen} + R_\text{Anlasser} = \frac{U_0}{I}$$

$$\Rightarrow \quad R_\text{Anlasser} = \frac{U_0}{I} - R_\text{i} - R_\text{Leitungen} = 80 \text{ m}\Omega$$

$$U_\text{Anlasser} = U_\text{K} - U_\text{Leitungen} = U_\text{K} - R_\text{Leitungen} I = 4{,}8 \text{ V}$$

Aufgabe 3.2.2-6

$$P_{\mathrm{V}} = R_{\mathrm{V}} I^2 \quad \text{mit} \quad I = \frac{U_0}{R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}}} \quad \Rightarrow \quad P_{\mathrm{V}} = U_0^2 \frac{R_{\mathrm{V}}}{(R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})^2}$$

$$\frac{dP_{\mathrm{V}}}{dR_{\mathrm{V}}} = U_0^2 \frac{(R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})^2 - 2R_{\mathrm{V}}(R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})}{(R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})^4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})^2 = 2R_{\mathrm{V}}(R_{\mathrm{V}} + R_{\mathrm{i}})$$

Lösung: $R_{\mathrm{V}} = R_{\mathrm{i}}$ (Leistungsanpassung)

Außerdem: $R_{\mathrm{V}} >> R_{\mathrm{i}}$ (Spannungsanpassung)

und $R_{\mathrm{V}} << R_{\mathrm{i}}$ (Stromanpassung)

Magnetostatik

Magnetfelder

Aufgabe 3.3.1-2

(Vgl. Abb. 7)

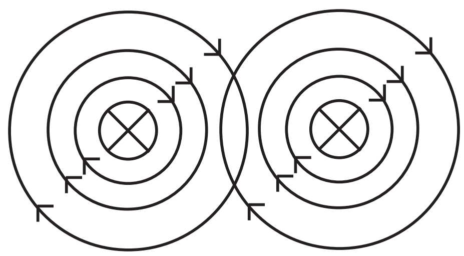

Abbildung 7: Der Strom in den beiden Leitern fließt in die Zeichenebene hinein

$$B_1 = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1}, \qquad B_2 = -\mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2}$$

$$B_1 + B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{I_1} = \frac{r_2}{I_2}$$

Unter Berücksichtigung von $r_1 + r_2 = a$ folgt

$$r_1 = a \frac{I_1}{I_1 + I_2} = 30 \text{ mm}$$

Aufgabe 3.3.1-3

$\mathcal{C}_1$: konzentrischer Kreis mit Radius $r_1 = 10\ \mathrm{mm} > d/2 = 2\ \mathrm{mm}$

$$B(r_1) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_1} = 0{,}40\ \mathrm{mT}$$

$\mathcal{C}_2$: konzentrischer Kreis mit Radius $r_2 = 1\ \mathrm{mm} < d/2 = 2\ \mathrm{mm}$. Nach dem Verkettungsgesetz trägt nur der durch $\mathcal{C}_2$ hindurchfließende Strom zum Magnetfeld bei. Unter der Annahme einer homogenen Stromdichte folgt

$$j = \frac{I}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{I'}{\pi r_2^2} \quad \Rightarrow \quad I' = I\left(\frac{2r_2}{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad B(r_2) = \mu_0 \frac{I'}{2\pi r_2} = \mu_0 \frac{2r_2 I}{\pi d^2} = 1{,}00\ \mathrm{mT}$$

Kraftwirkung von Magnetfeldern

Aufgabe 3.3.2-3

Alle Vektoren stehen senkrecht zueinander, daher:

$$F_{\mathrm{el}} = eE \quad \text{mit} \quad E = \frac{U}{d}, \quad F_{\mathrm{mag}} = evB \quad \text{mit} \quad B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Kräftegleichgewicht:

$$F_{\mathrm{el}} = F_{\mathrm{mag}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Ul}{\mu_0 dvN} = 20\ \mathrm{A}$$

Aufgabe 3.3.2-4

Das Magnetfeld steht überall senkrecht auf dem Draht der Schwingspule. Daher

$$F = IlB = 0{,}363\ \mathrm{N} \qquad \text{da} \qquad l = N\pi D$$

Elektromagnetische Induktion

Induktionsgesetz

Aufgabe 3.4.1-3

$$\phi_{\mathrm{m}} = BA = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{1}{4} \pi D^2$$

Unter Verwendung von $I = U/R$ folgt

$$U = \frac{4lR\phi_{\mathrm{m}}}{\mu_0 \pi N D^2}$$

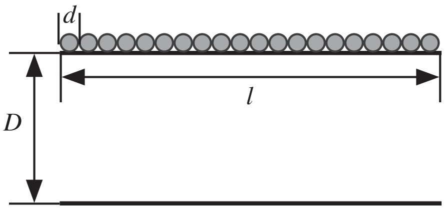

Abbildung 8: Drahtdurchmesser d und Spulenlänge l

Die Windungszahl ist $N = l/d$ und für den Widerstand kann man schreiben

$$R = \varrho\frac{L}{A} = \varrho\frac{\pi l\frac{D}{d}}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4\varrho l D}{d^3} \qquad \text{da für die Drahtlänge} \qquad L = \pi D N = \pi l\frac{D}{d}$$

gilt. Daher

$$U = \frac{16\varrho l\phi_{\mathrm{m}}}{\mu_0\pi d^2 D} = 7{,}21\ \mathrm{V}$$

Aufgabe 3.4.1-4

x-Achse: In der Zeichenebene und senkrecht zum Leiter nach rechts.
y-Achse: Im Leiter nach oben.

$$\phi_{\mathrm{m}} := \int\limits_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dA = \int\limits_S Bn\ \cos\sphericalangle(\vec{B},\vec{n})\,dA$$

n ist als Betrag eines Einheitsvektors immer Eins und der Normalenvektor der von dem Drahtrahmen aufgespannten Fläche und das Magnetfeld sind parallel (oder antiparallel): $\sphericalangle(\vec{B},\vec{n}) = 0$. Daher

$$\phi_{\mathrm{m}} = \int\limits_S B\,dA.$$

Das Magnetfeld hängt in der Zeichenebene nur von x ab:

$$B(x) = \mu_0\frac{I}{2\pi x}.$$

Daher

$$\phi_{\mathrm{m}} = \int_d^{d+a} dx\int_0^b dy\,B(x) = \mu_0\frac{I}{2\pi}\int_0^b dy\int_d^{d+a}\frac{dx}{x}$$

$$= \mu_0\frac{I}{2\pi}\ y\big|_0^b\ \cdot\ln x\big|_d^{d+a} = \mu_0\frac{Ib}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$$

Selbstinduktion

Aufgabe 3.4.2-1

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \quad \text{mit} \quad l = Nd \quad \text{(Drahtdurchmesser } d\text{)}$$

$$\text{und} \quad A = \frac{\pi}{4} D^2 \quad \text{(Spulendurchmesser } D\text{)}$$

Einsetzen und Umstellen liefert

$$N = \frac{4Ld}{\mu_0 \pi D^2} = 1267 \quad \Rightarrow \quad l = 127 \text{ mm}$$

Aufgabe 3.4.2-2

$$\phi_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = \frac{\mu_0 c t b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Die induzierte Spannung ergibt sich als zeitliche Ableitung dieses Ausdrucks zu

$$U_\mathrm{ind} = \frac{\mu_0 c b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = 1{,}39 \text{ nV}$$

Schwingungen

Freie harmonische Schwingungen

Aufgabe 4.1-2

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = \dot{z}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad a(t) = \dot{v}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Für die Geschwindigkeitsamplitude ergibt sich daher

$$\hat{v} = \omega A = 942 \text{ m/s}$$

und für die Beschleunigungsamplitude

$$\hat{a} = \omega^2 A = 5{,}92 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2$$

Die Kraftamplitude hängt über das Dynamische Grundgesetz mit der Beschleunigungsamplitude zusammen[1]:

$$\hat{F} = m\hat{a} = kA \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m\hat{a}}{A} = 395 \text{ kg/s}^2$$

Aufgabe 4.1-4

$$v(t) = \omega(t) l \quad \text{mit} \quad \omega(t) := \dot{\beta}(t) \quad \text{und} \quad \beta(t) = \beta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

1. Anfangsbedingung:

$$\beta(0) = \beta_0 \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als eine mögliche Lösung}$$

Damit

$$\dot{\beta}(t) = -\omega_0 \beta_0 \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

2. Anfangsbedingung:

$$v(0) = l\omega_0\beta_0$$

[1] Das negative Vorzeichen spielt hier keine Rolle

$$\Rightarrow \quad \beta_0 = \frac{v(0)}{\sqrt{gl}} \quad \text{da} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$s_{\max} = \beta_0 l = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v(0) = 71{,}4 \text{ cm}$$

(Einfacher geht‘s übrigens mit Hilfe des Energiesatzes)

Aufgabe 4.1-5

Aus $\omega_0 = \sqrt{\frac{amg}{J_\mathrm{A}}}$ und $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ erhält man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\mathrm{A}}{amg}}$$

Man verwendet den Satz von Steiner

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + ma^2 \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{L}{2} \qquad \text{und} \qquad J_\mathrm{S} = \frac{1}{12}mL^2$$

(vgl. Tabelle 1.1). Damit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 1{,}23 \text{ s}$$

Aufgabe 4.1-7

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \qquad \omega_0' = 2\pi f' = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{2}\omega_0$$

Gleichsetzen

$$\frac{1}{\sqrt{LC_1}} = \frac{2}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} \qquad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{3}C_2 = 80{,}7 \text{ pF} \qquad \text{und} \qquad f = 408 \text{ kHz}$$

Freie gedämpfte Schwingungen

Aufgabe 4.2-2

$$z(t) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta t) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$z(0) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\varphi) = 5 \text{ cm}$$

$$z(T) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta T) \sin(\omega T + \varphi) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta T) \sin(\varphi) = 4 \text{ cm}$$

$$(\text{da} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \sin(2\pi + \varphi) = \sin(\varphi))$$

Damit

$$q = \frac{z_0}{z_1} = \exp(\delta T) = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\ln 5/4}{T} = 9{,}62 \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad k = m \left(\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + \delta^2 \right) = 1{,}10 \text{ kg/s}^2$$

Aufgabe 4.2-3

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 3{,}96 \cdot 10^{-5} \text{ H}$$

Die Schwingfallformel kann natürlich auch auf die Spannung im Schwingkreise angewendet werden ($\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$) und daher gilt

$$\frac{U(t=0)}{U(t=20T)} \approx \frac{\hat{U} \sin \varphi}{\hat{U} \exp(-\delta \cdot 20T) \sin(\omega \cdot 20T + \varphi)} = 3$$

$$\omega \cdot 20T = \frac{2\pi}{T} \cdot 20T = 40\pi \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega \cdot 20T + \varphi) = \sin \varphi$$

Daraus folgt $3 = \exp(\delta \cdot 20T)$, woraus sich wiederum δ berechnen läßt:

$$\delta = \frac{\ln 3}{20T} = f \frac{\ln 3}{20}$$

Mit Hilfe der Übersetzungsregeln aus Tabelle 4.3 läßt sich der Abklingkoeffizient durch L und R ausdrücken:

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \Rightarrow \quad R = 2\delta L = 3{,}48\ \Omega$$

Aufgabe 4.2-4

$$z(t) = z_1(1 + \delta t)e^{-\delta t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z(t = 1 \text{ s})}{z_1} = 0{,}0103 = 1{,}03\%$$

Erzwungene Schwingungen

Aufgabe 4.3-4

$$Z = \sqrt{X_\mathrm{L}^2 + (R_\mathrm{L} + R_1)^2} = \frac{U_1}{I} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\left(\frac{U_1}{I}\right)^2 - X_\mathrm{L}^2} - R_\mathrm{L} = 83{,}4\ \Omega$$

$$U_2 = R_1 I = 41{,}7\ \mathrm{V}$$

Wellen

Wellenausbreitung entlang einer Linie

Aufgabe 5.1-1

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, dass man numerisch exakt rechnet.

Aufgabe 5.1-4

$$\xi_1(x,t) = \hat{\xi}_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_{0,1}) \qquad \text{und} \qquad \xi_2(x,t) = \hat{\xi}_2 \sin(\omega t - kx + \varphi_{0,2})$$

An einem beliebig gewählten Ort x gilt: Die Phase von Welle 1 zur Zeit t stimmt mit der Phase von Welle 2 zum späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ überein. Daher

$$\omega t - kx + \varphi_{0,1} = \omega(t + \Delta t) - kx + \varphi_{0,2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{0,1} - \varphi_{0,2} = 2\pi f \Delta t = 270^\circ$$

Pegel

Aufgabe 5.4-1

$$I = \frac{P}{A} = \frac{\eta P_0}{4\pi r^2} = 9{,}95 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$$

Aufgabe 5.4-2

a)

$$L_{I_{\text{ges}}} = 10 \log\left(10^{0{,}1 \cdot 70} + 10^{0{,}1 \cdot 73} + 10^{0{,}1 \cdot 74}\right)\ \mathrm{dB} = 77{,}4\ \mathrm{dB}$$

b)

$$L_{I_{\text{ges}}} = 10 \log\left(10^{0{,}1 \cdot 0} + 10^{0{,}1 \cdot 0}\right)\ \mathrm{dB} = 3{,}0\ \mathrm{dB}$$

(Achtung, $0\ \mathrm{dB}$ bedeutet nicht $I = 0$!)

Signalausbreitung

Aufgabe 5.5-1

a) Schwerewellen:

$$c(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{-1/2}\frac{g}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}}$$

$$c_{\mathrm{G}}(\lambda_0) = c(\lambda_0) - \lambda_0 \left.\frac{dc}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} = \sqrt{\frac{g\lambda_0}{2\pi}} - \lambda_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda_0}} = \frac{1}{2}c(\lambda_0)$$

b) Kapillarwellen: analog

Reflexion und Brechung

Aufgabe 5.6-2

a) $n_{\text{Luft,GaP}} = \dfrac{\sin 10°}{\sin 3°} = 3{,}32$ b) $n_{\text{GaP,Luft}} = \dfrac{1}{n_{\text{Luft,GaP}}} = 0{,}301$

Beugung

Aufgabe 5.7-3

Das mittlere Beugungsmaximum (Hauptmaximum) ist beidseitig durch Minima begrenzt. Daher gilt (z. B. für $n = +1$)

$$b \sin\vartheta_{+1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\lambda}{\sin\vartheta_{+1}}$$

Weiterhin (B Breite Hauptmaximum, D Abstand Spalt-Schirm)

$$\tan\vartheta_{+1} = \frac{\frac{1}{2}B}{D} \approx \sin\vartheta_{+1} \quad \Rightarrow \quad b \approx \frac{2D\lambda}{B} = 600\ \mu\text{m}$$

Stehende Wellen

Aufgabe 5.8-1

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{mit} \quad A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi\sigma}}$$

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} = 2Lf \quad \text{mit } f = \text{Grundfrequenz} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 4\varrho L^2 f^2$$

Einsetzen:

$$d = \frac{1}{Lf}\sqrt{\frac{F}{\pi\varrho}} = 0{,}239\ \mathrm{mm} \quad \text{(gilt nur für Saiten mit homogener Zusammensetzung)}$$

Optik

Geometrische Optik

Spiegel

Aufgabe 6.1.1-1

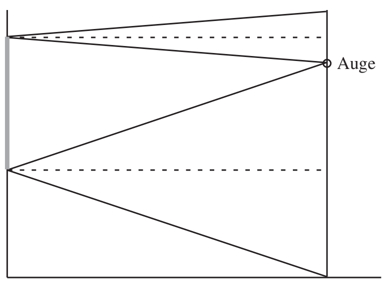

Abbildung 9: Aus dem Reflexionsgesetz folgt, dass, unabhängig von der Entfernung zwischen Spiegel und Betrachter, ein Spiegel von halber Körpergroße ausreicht. Er muss allerdings in der richtigen Höhe hängen.

Aufgabe 6.1.1-3

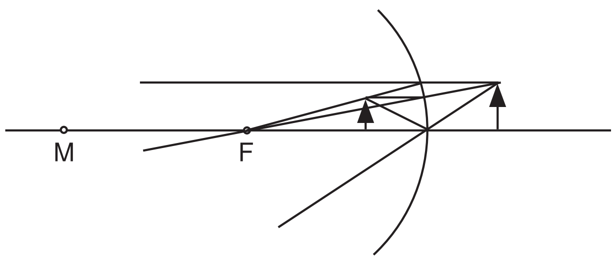

Abbildung 10: Bildkonstruktion unter Verwendung von Brennpunktstrahl, Scheitelstrahl und Parallelstrahl

$$g = -2 \text{ cm}, f = -6 \text{ cm}, B = +1 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{gf}{g-f} = +3 \text{ cm}$$

$$\beta = -\frac{b}{g} = +1{,}5 \quad \Rightarrow \quad B = \beta G = 1{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 6.1.1-4

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{gf}{g-f}$$

$$\beta = -\frac{b}{g} = -\frac{1}{g}\left(\frac{gf}{g-f}\right) = \frac{f}{f-g}$$

$$\Rightarrow \quad g = f\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = -8/12 \text{ cm}$$

$$b = -\beta g = +40/-60 \text{ cm}$$

Lichtbrechung und Linsen

Aufgabe 6.1.2-1

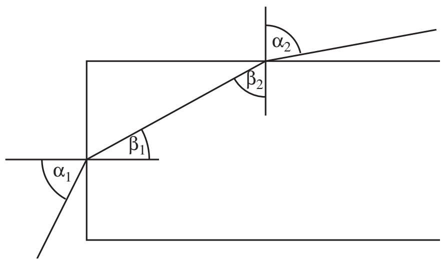

Abbildung 11: Lichtwellenleiter

$$n = \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i}$$

a) Grenzwinkel: $\alpha_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \sin \beta_2 = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \arcsin \frac{1}{n}$

$$\beta_1 + \beta_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 90° - \arcsin \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right) = 90° - \arcsin \frac{1}{n}$$

Maximalwert von α_1 ist 90° und folglich: $\arcsin \frac{1}{n} = 90° - \arcsin \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Aufgabe 6.1.2-3

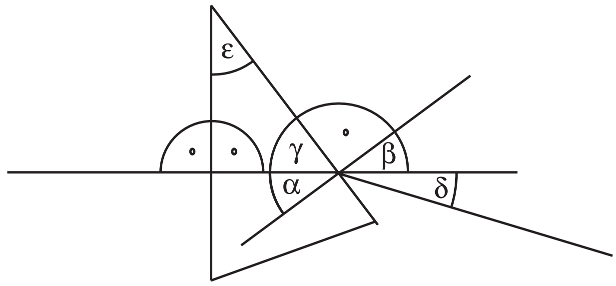

Abbildung 12: Bei senkrechtem Einfall liefert das Brechungsgesetz keine Brechung

Aus Abbildung 12 entnimmt man

$$\varepsilon + 90^\circ + \gamma = \varepsilon + 90^\circ + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \varepsilon.$$

Aus der Abbildung entnimmt man ebenfalls $\beta = \alpha$ und daher $\beta = \varepsilon$.
Damit ergibt sich

$$n = \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\varepsilon + \delta)}{\sin \varepsilon} = 1{,}488.$$

Aufgabe 6.1.2-5

$$D' = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 2{,}17 \text{ dpt}$$

unabhängig davon, ob man beide Radien positiv oder negativ ansetzt.

Aufgabe 6.1.2-6

Es gibt zwei Lösungen: $r_1 = +150$ mm, $r_2 = +87$ mm und $r_1 = -150$ mm, $r_2 = -543$ mm. Es handelt sich also um eine konvexkonkave Linse.

Aufgabe 6.1.2-7

$$g = -1 \text{ m}, r_1 = \infty, r_2 = -0{,}312 \text{ m} \qquad \text{oder} \qquad r_1 = +0{,}312 \text{ m}, r_2 = \infty$$

Einsetzen in die Linsenschleiferformel liefert $f' = 60$ cm. Aus der Abbildungsgleichung ergibt sich dann

$$b = \frac{f'g}{f' + g} = +150 \text{ cm}$$

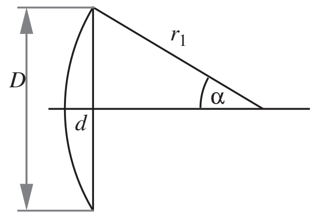

Abbildung 13: Plankonvexe Linse

Aufgabe 6.1.2-9

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{mit} \quad r_2 = \infty \quad \Rightarrow \quad r_1 = (n-1)f' = 200\ \text{mm}$$

$$\sin\alpha = \frac{D/2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8{,}63°$$

$$\tan\alpha = \frac{D/2}{r_1 - d} \quad \Rightarrow \quad d = r_1 - \frac{D}{2\tan\alpha} = 2{,}26\ \text{mm}$$

Optische Instrumente

Aufgabe 6.1.3-1

Nach Voraussetzung soll $|b| = s_0 = 250\ \text{mm}$ gelten. In diesem Fall ergibt sich die Winkelvergrößerung zu

$$v = 1 + \frac{s_0}{f'} = 3{,}5$$

Die Gegenstandsweite ergibt sich aus der Abbildungsgleichung:

$$g = -\frac{s_0 f'}{s_0 + f'} = -71\ \text{mm}.$$

Man beachte, dass die Gegenstandsweite außerhalb des Akkommodationsbereichs liegt. Ohne Lupe ließe sich der Gegenstand also nicht so nahe ans Auge führen.

Aufgabe 6.1.3-2

$$\frac{D_1}{f'_{\text{Ob}}} = \frac{D_2}{-f_{\text{Ok}}} = \frac{D_2}{f'_{\text{Ok}}} \quad \Rightarrow \quad D_2 = \frac{f'_{\text{Ok}}}{f'_{\text{Ob}}} D_1 = \frac{D_1}{v} = 3{,}75\ \text{mm}$$

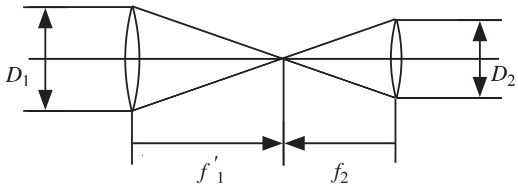

Abbildung 14: Strahlengang beim Astronomischen Fernrohr

Aufgabe 6.1.3-4

$$f'_{\mathrm{Ok}} = \frac{f'_{\mathrm{Ob}}}{v} = 33{,}3 \text{ mm}$$

Die maximale Bildweite bei der Abbildung am Objektiv ist um $\Delta a = 4$ mm größer als die Brennweite:

$$b_{\max} = f'_{\mathrm{Ob}} + \Delta a.$$

Dies führt über die Abbildungsgleichung zu einer minimalen Gegenstandsweite von

$$g_{\min} = -\frac{f'_{\mathrm{Ob}}(f'_{\mathrm{Ob}} + \Delta a)}{\Delta a} = -10{,}2 \text{ m}$$

Aufgabe 6.1.3-6

Die beiden in Abbildung 6.18 eingezeichnetn Strahlen verlassen das Okular parallel, wenn das Zwischenbild in der Brennebene des Okulars liegt. Dies geschieht, wenn

$$b = f' + t$$

Daher

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{f'b}{f' - b} = \frac{f'(f' + t)}{f' - (f' + t)} = \frac{f'(f' + t)}{-t} = -4{,}1 \text{ mm}$$

Hierbei gilt $b = b_{\mathrm{OB}}, g = g_{\mathrm{OB}}$ und $f' = f'_{\mathrm{OB}}$. Das Objekt muss sich daher $0{,}1$ mm $=$ 100 μm links von der Brennebene des Objektivs befinden.

Wellenoptik

Interferenz an dünnen Schichten

Aufgabe 6.2.2-2

Reflektiertes Licht:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = 2d\sqrt{1^2 - 0^2} = 2d = x\lambda$$

$$\Rightarrow \quad x = 2\frac{d}{\lambda} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{Dunkelheit}$$

Hinweis: Der Phasensprung findet hier an der zweiten Trennfläche statt. Dies macht aber formelmäßig keinen Unterschied zu einem Phasensprung an der ersten Trennfläche.

Aufgabe 6.2.2-3

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = x\lambda$$

$$\Rightarrow \quad x_{\min} = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\lambda_{\max}} \qquad \text{und} \qquad x_{\max} = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\lambda_{\min}}$$

Für $\alpha = 45°$ folgt:

$$x_{\min} = 1{,}98 \qquad \text{und} \qquad x_{\max} = 3{,}97.$$

Da x eine ganze Zahl sein muss, hat man $x_{\min}$ auf 2 aufzurunden und $x_{\max}$ auf 3 abzurunden. Damit erhält man für die Wellenlängen

$$\lambda = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{2} = 794 \text{ nm} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{3} = 529 \text{ nm}.$$

Optische Gitter

Aufgabe 6.2.3-2

$$400 \text{ Striche/mm} \quad \Rightarrow \quad a = 2{,}5\ \mu\text{m}$$

$$\text{konstruktive Interferenz:} \quad \vartheta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{a}\right)$$

$m = 2$:

$$\vartheta_{2,\min} = \arcsin\left(\frac{2 \cdot 0{,}4\ \mu\text{m}}{2{,}5\ \mu\text{m}}\right) = 18{,}7°,$$

$$\vartheta_{2,\max} = \arcsin\left(\frac{2 \cdot 0{,}7\ \mu\text{m}}{2{,}5\ \mu\text{m}}\right) = 31{,}1°$$

$m = 3$:

$$\vartheta_{3,\min} = \arcsin\left(\frac{3 \cdot 0{,}4\ \mu\text{m}}{2{,}5\ \mu\text{m}}\right) = 28{,}7°,$$

$$\vartheta_{3,\max} = \arcsin\left(\frac{3 \cdot 0{,}7\ \mu\text{m}}{2{,}5\ \mu\text{m}}\right) = 57{,}1°$$

$$\text{Überlappung:} \quad 28{,}7° \leq \vartheta \leq 34{,}1°$$

Quantenoptik

Wärmestrahlung

Aufgabe 6.3.1-2

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = 5796 \text{ K}$$

$$E = \sigma T^4 = 63{,}99 \text{ MW/m}^2 \quad \Rightarrow \quad P = AE = 4\pi R_\text{S}^2 E = 3{,}94 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Energieerhaltung: $A(R_\text{S})E = A(d)E' \quad \Rightarrow \quad E' = E\left(\frac{R_\text{S}}{d}\right)^2 = 1{,}4 \text{ kW/m}^2$

(R_S: Sonnenradius, d: Abstand Sonne-Erde)

Compton-Effekt

Aufgabe 6.3.3-3

a)

$$\Delta E = h(f - f') \quad \Rightarrow \quad f' = f - \frac{\Delta E}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \frac{c}{\frac{c}{\lambda} - \frac{\Delta E}{h}} = 12{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$(c = \lambda f = \lambda' f')$

b)

$$\lambda' - \lambda = \lambda_\text{C}(1 - \cos\vartheta) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(1 - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_\text{C}}\right) = 69°57'$$

Abschirmung von Röntgenstrahlung

Aufgabe 6.3.4-1

$$I(d) = I_0 e^{-\mu d} = 0{,}01\, I_0 \quad \Rightarrow \quad -\mu d = \ln 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad d = 11{,}5 \text{ cm}$$

Materiewellen

Aufgabe 6.3.5-3

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{1}{m}\frac{h}{4\pi}\frac{1}{\Delta x} = 2{,}11 \cdot 10^{-32} \text{ m/s} \qquad \text{bzw.} \qquad = 5{,}79 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Atome

Atomhülle

Stationäre Bahnen

Aufgabe 7.2.1-1

$$\Delta E = E_n - E_1 = -\frac{me^4}{8(\varepsilon_0 h)^2}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = 1{,}635 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 10{,}20\ \mathrm{eV} \quad \text{etc.}$$

LASER

Aufgabe 7.2.4-3

a)

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}580 \cdot 10^6$$

b)

$$\Delta f = f_{n\pm1} - f_n = \frac{c}{\lambda_{n\pm1}} - \frac{c}{\lambda_n} = c\left(\frac{n\pm1}{2L} - \frac{n}{2L}\right) = \pm 300\ \mathrm{MHz}$$

Röntgenstrahlung

Aufgabe 7.2.5-2

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2 \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{\frac{4\Delta E}{3hR}} + 1 \approx 29$$

Atomkerne

Aufbau der Atomkerne

Aufgabe 7.3.1-2

$$m = A_r u \approx Au, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$$

$$\Rightarrow \quad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{3u}{4\pi R_0} \approx 4{,}5 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$$

Kernprozesse

Aufgabe 7.3.2-4

a)

$$A(t) = \lambda N(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{N_0 \exp -\lambda t}{N_0} = \exp\left(-\ln 2\frac{t}{T}\right) = 0{,}1599$$

b)

$$0{,}1 = \exp\left(-\ln 2\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad t = -T \ln 0{,}1/\ln 2 = 458\ \mathrm{d}$$

Aufgabe 7.3.2-6

$$A = \lambda N_{^{40}\mathrm{K}} \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T} \qquad \text{und} \qquad N_{^{40}\mathrm{K}} = 1{,}2 \cdot 10^{-4} N_{\mathrm{K}}$$

Mit $N_{\mathrm{K}} = m/A_r u$ folgt $A = 4687$ Bq.

Moleküle

Molekülanregung

Aufgabe 7.4.2-2

$$J = 2m\,(d/2)^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kg\,m^2}$$

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2J} \approx \overline{E}_{\mathrm{rot}} = kT \quad \Rightarrow \quad l(l+1) = \frac{2JkT}{\hbar^2}$$

$$l^2 + l - \frac{2JkT}{\hbar^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad l = -1/2 + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2JkT}{\hbar^2}} = 19{,}4$$

(die andere Lösung führt auf ein negatives l und ist daher nicht sinnvoll). Etwas schneller kommt man näherungsweise zum Ziel:

$$l >> 1 \quad \Rightarrow \quad l(l+1) \approx l^2 \quad \Rightarrow \quad l \approx \sqrt{\frac{2JkT}{\hbar^2}} = 19{,}9$$

Aufgabe 7.4.2-3

$$R \approx R_0 \sqrt[3]{A} \qquad \text{mit} \qquad A = 16$$

Trägheitsmoment Kugel (vgl. Tabelle 1.1):

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m R^2$$

Trägheitsmoment Hantel (bei Rotation um Hantelachse):

$$J_{\text{Hantel}} = 2 J_{\text{Kugel}} = \frac{4}{5} m R^2 = \frac{4}{5} u R_0^2 A^{5/3} = 2{,}64 \cdot 10^{-55}\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

Der erste angeregte Rotationszustand besitzt die Energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2 J_{\text{Hantel}}} = \frac{\hbar^2}{J_{\text{Hantel}}} = 263\ \text{keV}$$

Festkörper

Elektrische Leitfähigkeit

Metalle und Nichtleiter

Aufgabe 8.2.1-1

$$\varrho_{\text{Masse}} = \frac{m}{V} \quad \text{mit} \quad m = A_r u N \quad \Rightarrow \quad n = \frac{N}{V} = \frac{\varrho_{\text{Masse}}}{A_r u}$$

$$j = \frac{I}{A} = en\mu E = en\overline{v} \quad \Rightarrow \quad \overline{v} = \frac{I}{enA} = \frac{I A_r u}{eA\varrho_{\text{Masse}}} = 0{,}294 \text{ mm/s}$$

Aufgabe 8.2.2-2

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{min}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = \Delta E$$

Daraus folgt

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{\Delta E} = 1{,}24 \ \mu\text{m}$$

Messen und Auswerten

Fehlerrechnung und Messergebnisse

Aufgaben

Aufgabe C-1

Die Messung des Elastizitätsmoduls von Stahl ergab die Werte (jeweils in $\mathrm{N/mm^2}$) 211000, 204000, 202000, 214000, 212000. Wie lautet das Messergebnis?

Mittelwert:	$\bar{E} = 208600{,}000000\ \mathrm{N/mm^2}$
Standardabweichung:	$s_E = 5272{,}570531\ \mathrm{N/mm^2}$
Standardabweichung des Mittelwerts:	$\Delta E = 2357{,}965225\ \mathrm{N/mm^2}$
Rundung auf zwei signifikante Stellen:	$\Delta E = 2{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{N/mm^2}$

Ergebnis: $E = (208{,}6 \pm 2{,}4) \cdot 10^3\ \mathrm{N/mm^2}$

Aufgabe C-2

Die Länge eines dünnen homogenen Stabes wird mit $21{,}3\ \mathrm{cm}$ bei einer Messunsicherheit von $0{,}1\ \mathrm{cm}$ angegeben, und für die Masse liegen die Messwerte $120{,}1\ \mathrm{g}$, $119{,}9\ \mathrm{g}$, $119{,}2\ \mathrm{g}$, $121{,}1\ \mathrm{g}$, $119{,}7\ \mathrm{g}$, $120{,}7\ \mathrm{g}$ vor.
a) Wie lautet das Messergebnis für die Masse?

Mittelwert:	$\bar{m} = 120{,}1166667\ \mathrm{g}$
Standardabweichung:	$s_m = 0{,}688234456\ \mathrm{g}$
Standardabweichung des Mittelwerts:	$\Delta m = 0{,}28097054\ \mathrm{g}$
Rundung:	$\Delta m = 0{,}28\ \mathrm{g}$

Ergebnis: $m = (120{,}12 \pm 0{,}28)\ \mathrm{g}$

b) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment bezüglich einer durch den Schwerpunkt und senkrecht zum Stab verlaufenden Drehachse und präsentieren Sie das Ergebnis einschließlich Messunsicherheit!

$$J = \frac{1}{12} m l^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial m} = \frac{1}{12} l^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial J}{\partial l} = \frac{1}{6} m l$$

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{1}{12} l^2 \Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{6} m l \Delta l\right)^2}$$

Ergebnis: $J = (4541 \pm 44)\ \mathrm{g\,cm^2}$

Aufgabe C-3

Eine Messreihe zur Bestimmung des Brewster-Winkels α_B lieferte die Werte $55.4°$, 60,1°, 61,5°, 56,9°, 57,2°, 59,1°.
a) Wie lautet das zugehörige Messergebnis?

Mittelwert:	$\bar{\alpha}_\mathrm{B} = 58{,}36666667°$
Standardabweichung:	$s_{\alpha_\mathrm{B}} = 2{,}265980288°$
Standardabweichung des Mittelwerts:	$\Delta\alpha_\mathrm{B} = 0{,}925082579°$
Rundung:	$\Delta\alpha_\mathrm{B} = 0{,}93°$

Ergebnis: $\alpha_\mathrm{B} = (58{,}37 \pm 0{,}93)°$

b) Bestimmen Sie die sich ergebende Brechzahl aus $n = \tan\alpha_\mathrm{B}$ und präsentieren Sie das Ergebnis einschließlich Messunsicherheit!

$$n = \tan\alpha_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial \alpha_\mathrm{B}} = \frac{1}{\cos^2\alpha_\mathrm{B}}$$

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha_\mathrm{B}}{\cos^2\alpha_\mathrm{B}}\right)^2} = \frac{\Delta\alpha_\mathrm{B}}{\cos^2\alpha_\mathrm{B}}$$

Ergebnis: $n = (1{,}624 \pm 0{,}059)$ (Achtung, Bogenmaß!)

Aufgabe C-4

Sie befinden sich auf einer Party. Plötzlich bricht ein Gewitter los. Einige Partygäste beschließen, die Entfernung des Gewitters durch Zeitmessung abzuschätzen. Die von den Gästen ermittelten Zeiten zwischen Blitz und Donner sind (jeweils in Sekunden): 5,5, 5,7, 6,4, 6,4, 5,8, 6,0, 5,9. Geben Sie die Ergebnisse für Zeitmessung und Entfernung des Gewitters an! Nehmen Sie an, dass die Schallgeschwindigkeit $340\ \mathrm{m/s}$ beträgt und wegen der unübersichtlichen Temperaturverhältnisse in der Gewitterwolke mit einer Unsicherheit von $20\ \mathrm{m/s}$ behaftet ist!
Lösung: $(5{,}96 \pm 0{,}13)$ s, $(2{,}03 \pm 0{,}13)$ km