EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Metallberufe

J. Burmester
J. Dillinger
W. Escherich
R. Gomeringer
B. Schellmann
C. Scholer

Rechenbuch Metall

Lehr- und Übungsbuch

32. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 10307

Autoren:

Burmester, Jürgen	Dipl.-Ing., Studienrat	Soest
Dillinger, Josef	Studiendirektor	München
Escherich, Walter	Studiendirektor	München
Gomeringer, Roland	Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Balingen
Schellmann, Bernhard	Oberstudienrat	Wangen i. A.
Scholer, Claudius	Dipl.-Ing., Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Metzingen

Lektorat und Leitung des Arbeitskreises:
Claudius Scholer, Metzingen

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

32. Auflage 2016
Druck 5 4 3
Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-1856-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
http://www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt
Umschlag: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar
Umschlagfotos: Sauter Feinmechanik GmbH, 72555 Metzingen
Druck: Kessler Druck + Medien GmbH & Co. KG, 86399 Bobingen

Vorwort

Das Rechenbuch Metall ist ein Lehr- und Übungsbuch für die Aus- und Weiterbildung in Fertigungs- und Werkzeugberufen. Es vermittelt rechnerische Grund- und Fachkenntnisse, fördert und vertieft das Verständnis für technische Abläufe und technologische Zusammenhänge. Das Buch eignet sich sowohl für den unterrichtsbegleitenden Einsatz als auch zum Selbststudium.

Zielgruppen:
- Industriemechaniker
- Feinwerkmechaniker
- Zerspanungsmechaniker
- Werkzeugmechaniker
- Fertigungsmechaniker
- Technischer Produktdesigner
- Verfahrensmechaniker
- Meister und Techniker

Der Inhalt des Rechenbuchs wurde dem Stand der Technik angepasst. Die Lernbereiche wurden neu gegliedert und erweitert, sodass sich die Lernfeldkonzeption im Unterricht umsetzen lässt.

Eine klare Gliederung in **Teil A Fachrechnen, Teil B Vertiefungsaufgaben** und **Teil C Projektaufgaben** unterstützt die Arbeit des Anwenders.

Im **Teil A Fachrechnen** bildet jeder Lernbereich eine in sich geschlossene Einheit mit identischem methodischem Aufbau. Nach der Einführung in das Fachgebiet werden die notwendigen Formeln hergeleitet und erläutert. Nachfolgende Musterbeispiele zeigen die technische Anwendung. Daran schließen sich Übungaufgaben an, die nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet sind. Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad sind durch einen roten Punkt (●) gekennzeichnet. Auf weitere **Vertiefungsaufgaben** im Teil B wird jeweils durch einen grünen Pfeil (►) verwiesen.

Der **Teil B Vertiefungsaufgaben** stellt einen Querschnitt durch alle Stoffgebiete dar und kann zur Leistungskontrolle und zur **Prüfungsvorbereitung** verwendet werden.

Im **Teil C Projektaufgaben** wird die Unterrichtskonzeption nach **Lernfeldern** in besonderer Weise unterstützt. Die Projektaufgaben umfassen neben den fachmathematischen Aufgaben auch Fragen der Technologie, Werkstofftechnik, Steuerungstechnik und Arbeitsplanung.

Der Inhalt des Rechenbuches wurde in der **32. Auflage** dem Stand der Technik angepasst und um 8 Seiten erweitert. Die folgenden Lernbereiche wurden ergänzt bzw. neu aufgenommen:
- **Beanspruchung auf Torsion**
- **Wahrscheinlichkeitsnetz**
- **Pneumatik/Hydraulik mit neuer Schaltplanbezeichnung**
- **Projektaufgabe Drehteil**
- **Wärmelehre**

Die zahlreichen Bilder zu den Beispielen und Aufgaben sind in Form eines **„Klebeanhanges"** erhältlich. Die **„Lösungen" zum Rechenbuch Metall** ermöglichen nicht nur das Überprüfen der Ergebnisse, sondern enthalten außerdem den ausführlichen Lösungsweg der Aufgaben.

Kritische Hinweise und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen über lektorat@europa-lehrmittel de.

Dank
Herzlich bedanken wir uns bei Herrn Roland Kilgus, der sich über viele Jahre als Lektor und Autor mit großem Engagement und mit hoher fachlicher Kompetenz für die Weiterentwicklung des Rechenbuchs Metall eingesetzt hat.

Im Sommer 2016 Autoren und Verlag

Inhaltsverzeichnis

Maschinenelemente

Fertigungsplanung

Fertigungstechnik

Teil B – Vertiefungsaufgaben

Teil C – Projektaufgaben

Lernfelder für Industrie- und Werkzeugmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall

Lern-feld	Industrie-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch	Werkzeug-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen (v_c; n; f) S. 201 Bohren (v_c; n; f) S. 217 Fräsen (v_c; n; f) S. 211 Kostenrechnen S. 190	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen (v_c; n; f) S. 201 Bohren (v_c; n; f) S. 217 Fräsen (v_c; n; f) S. 211 Kostenrechnen S. 190
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91
4	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138
5	Fertigen von Einzelteilen mit Werkzeugmaschinen	Prozesskennwerte Stichproben S. 157 Drehen (F_c; P_c; t_h) S. 201 Bohren (F_c; P_c; t_h) S. 217 Fräsen (F_c; P_c; t_h) S. 211	Formgeben von Bauelementen durch spanende Fertigung	Drehen (F_c; P_c; t_h) S. 201 Bohren (F_c; P_c; t_h) S. 217 Fräsen (F_c; P_c; t_h) S. 211 Indirektes Teilen S. 226
6	Installieren und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Hydraulische Presse S. 98	Herstellen technischer Teilsysteme des Werkzeugbaus	Biegen, Rückfedern S. 240 Tiefziehen S. 244 Exzenter- und Kurbelpressen S. 247
7	Montieren von technischen Teilsystemen	Festigkeitslehre S. 119 Lagerkräfte S. 78 Zugversuch S. 113	Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228
8	Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228	Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Ohmsches Gesetz S. 135 Leiterwiderstand S. 136
9	Instandsetzen von technischen Systemen	Reibung S. 82 Wärmelehre S. 129 Kostenrechnung S. 190	Herstellen von formgebenden Werkzeugoberflächen	Hauptnutzungszeit beim Schneiden S. 234 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Wechselspannung und Wechselstrom S. 144
10	Herstellen und Inbetriebnehmen von technischen Systemen	Zahnradmaße S. 171 Übersetzungen S. 175 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Wechselspannung und Wechselstrom S. 144 El. Leistung S. 147 El. Energiekosten S. 149	Fertigen von Bauelementen in der rechnergestützten Fertigung	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228
11	Überwachen der Produkt- und Prozessqualität	Qualitätsmanagement S. 157 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302	Herstellen der technischen Systeme des Werkzeugbaus	Trennen durch Schneiden S. 236 Werkstoffprüfung S. 113 Festigkeitslehre S. 119
12	Instandhalten von technischen Systemen	Werkstoffprüfung S. 113 Festigkeitslehre S. 119	Inbetriebnehmen und Instandhalten von technischen Systemen des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement S. 157 El. Leistung S. 147 El. Energiekosten S. 149 Projekt: Folgeschneidwerkzeug S. 293
13	Sicherstellen der Betriebsfähigkeit automatisierter Systeme	Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Projekt: Elektropneumatik S. 308	Planen und Fertigen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Spritzgießen S. 249 Projekt: Spritzgießwerkzeug S. 299 Projekt: Tiefziehwerkzeug S. 296
14	Planen und Realisieren technischer Systeme	Projekt: Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine S. 281 Projekt: Hubeinheit S. 284	Ändern und Anpassen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement S. 157 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302
15	Optimieren von technischen Systemen	Projekt: Zahnradpumpe S. 287 Projekt: Hydraulische Spannklaue S. 290	–	–

Lernfelder für Zerspanungs- und Feinwerkmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall

Lern-feld	Zerspanungs-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch	Feinwerk-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen S. 44 Flächen S. 48 Volumen S. 54 Masse S. 55 Gewichtskraft S. 55 Maßtoleranzen S. 151 Umformen, Biegen S. 240
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen (v_c; n; f) S. 201 Bohren (v_c; n; f) S. 217 Fräsen (v_c; n; f) S. 211 Kostenrechnen S. 190	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen S. 153 Konstante Bewegungen S. 65 Drehen (v_c; n; f) S. 201 Bohren (v_c; n; f) S. 217 Fräsen (v_c; n; f) S. 211 Kostenrechnen S. 190
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte S. 72 Hebel S. 76 Einfache Maschinen S. 91
4	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138	Warten technischer Systeme	Diagramme S. 61 Ohmsches Gesetz S. 135 Schaltung v. Widerständen S. 138
5	Herstellen von Bauelementen durch spanende Fertigungsverfahren	Passungen S. 153 Drehen (F_c; P_c; t_h) S. 201 Bohren (F_c; P_c; t_h) S. 217 Fräsen (F_c; P_c; t_h) S. 211	Herstellen von Dreh- und Frästeilen	Passungen S. 153 Drehen (F_c; P_c; t_h) S. 201 Bohren (F_c; P_c; t_h) S. 217 Fräsen (F_c; P_c; t_h) S. 211
6	Warten und Inspizieren von Werkzeugmaschinen	Standgrößen S. 184 Durchlauf-, Belegungszeit S. 185 Flächenpressung S. 122 Lagerkräfte S. 78 Reibung S. 82	Programmieren und Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck S. 35 Koordinaten in NC-Programmen S. 228 Maschinenstundensatz S. 194 Deckungsbeitrag S. 196
7	Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Zahnradpumpe S. 287 Hydraulische Presse S. 98	Herstellen technischer Teilsysteme	Zugversuch S. 113 Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz S. 116 Längen- und Volumenänderung S. 129 Flächenpressung S. 122 Lagerkräfte S. 78 Reibung S. 82
8	Programmieren und Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Koordinaten in NC-Programmen S. 228 Qualitätsmanagement S. 157	Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte S. 94 Logische Verknüpfungen S. 106 Projekt: Pneumatische Steuerung S. 305 Projekt: Elektropneumatik S. 308
9	Herstellen von Bauelementen durch Feinbearbeitungsverfahren	Schleifen (t_h) S. 222 Abtragen und Schneiden (t_h) S. 234 ISO-Passungen S. 154	Instandhalten von Funktionseinheiten	Lagerkräfte S. 78 Standgrößen S. 184 Durchlauf-, Belegungszeit S. 185 Flächenpressung S. 122
10	Optimieren des Fertigungsprozesses	Mechanische Leistung S. 87 Maschinen- und Prozessfähigkeit S. 163 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) S. 201 Fertigungsplanung S. 184	Feinbearbeiten von Flächen	Schleifen (t_h) S. 222 Abtragen und Schneiden S. 234 Auftragszeit S. 188 Kostenrechnung S. 190
11	Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwerte aus Stichprobenprüfung S. 157 Statistische Prozesslenkung S. 167	Herstellen von Bauteilen und Baugruppen aus Kunststoff	Spritzgießen S. 249 Projekt: Spritzgießwerkzeug S. 299 Projekt: Folgeschneidwerkzeug S. 293
12	Vorbereiten und Durchführen eines Einzelfertigungsauftrages	Fertigungstechnik: Schnittdaten, Schnittkräfte S. 201 Projekt: Hydraulische Spannklaue S. 290 Maschinenstundensatz S. 194 Deckungsbeitrag S. 196	Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwert aus Stichprobenprüfung S. 157 Statistische Prozesslenkung S. 167
13	Organisieren und Überwachen von Fertigungsprozessen in der Serienfertigung	Projekt: Frästeil Spannplatte S. 311 Projekt: Drehteil Ritzelwelle S. 314 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes S. 302	Instandhalten technischer Systeme	Maschinen- und Prozessfähigkeit S. 163 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) S. 201 Fertigungsplanung S. 184
14	–	–	Fertigen von Schweißkonstruktionen[1]	Schmelzschweißen S. 254
15	–	–	Montieren, Demontieren und Inbetriebnehmen technischer Systeme[1]	Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad S. 84 Qualitätsmanagement S. 157 Elektrotechnik S. 135
16	–	–	Programmieren automatisierter Systeme und Anlagen[1]	Projekt: Elektropneumatik S. 308

1) Schwerpunkt Maschinenbau

Mathematische und physikalische Begriffe

Begriffe	Erklärung	Beispiele
	Größen und Einheiten	
Physikalische Größen	Physikalische Größen sind objektiv messbare Eigenschaften von Zuständen und Vorgängen. Eine physikalische Größe ist das Produkt eines Zahlenwertes mit einer Einheit.	Bei der Länge l = 30 mm ist 30 der Zahlenwert und mm (Millimeter) die Einheit.
Basisgröße	Man unterscheidet Basisgrößen und Basiseinheiten. Sie sind im internationalen Einheitensystem (SI = **S**ystème **I**nternational) festgelegt.	**Basisgröße** / **Formelzeichen** Länge: l Masse: m
Basiseinheit		**Basiseinheit** / **Zeichen** Meter: m Kilogramm: kg
Abgeleitete Größen und abgeleitete Einheiten	Die abgeleiteten Größen und deren Einheiten setzen sich aus den Basisgrößen und deren Einheiten zusammen.	Kraft = Masse · Beschleunigung $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
Umrechnung von Einheiten	Einheiten können in größere oder kleinere Einheiten oder andere Maßsysteme umgerechnet werden.	$1\ \text{kg} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{1\,000\ \text{g}}{1\ \text{kg}} = 1\,000\ \text{g}$ $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3 = 10\ \text{dl} = 0{,}001\ \text{m}^3$
	Gleichungen und Formeln	
Gleichungen	Gleichungen beschreiben die Abhängigkeit mathematischer oder physikalischer Größen voneinander.	$16 + 9 = 100 - 75$ $x + 15 = 25$
Formeln	Technische oder physikalische Gleichungen mit Formelzeichen bezeichnet man als Formeln.	$s = v \cdot t$ (Weg = Geschwindigkeit • Zeit)
Formelzeichen	Formelzeichen bestehen aus *kursiv* gedruckten Buchstaben und kennzeichnen Größen. Sie ersetzen Wörter und dienen zum Rechnen mit Formeln.	m für Masse A für Fläche
Größengleichungen	Größengleichungen stellen Beziehungen zwischen physikalischen Größen dar. Sie sind unabhängig von der Wahl der Einheit und können Zahlenwerte, z. B. π, mathematische Zeichen, z. B. $\sqrt{\ }$, enthalten. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$
Zahlenwertgleichungen	Die Zahlenwerte aller Formelzeichen sind an vorgegebene Einheiten gebunden. Der Zahlenwert des Ergebnisses erhält die gewünschte Einheit nur dann, wenn alle Zahlenwerte der Gleichung in den jeweils vorgeschriebenen Einheiten eingesetzt werden. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$P = \frac{Q \cdot p}{600}$ P in kW Q in l/min p in bar
	Zahlenwerte	
Konstanten	Konstanten sind gleichbleibende Zahlenwerte oder Größen bei Berechnungen in der Mathematik und Physik.	π = 3,141 592 654... (Kreiszahl) c ≈ 300 000 km/s (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)
Koeffizienten	Koeffizienten sind Größen, die den Einfluss einer Stoffeigenschaft auf einen physikalischen Vorgang kennzeichnen.	α = 0,000 012 1/K (α = Längenausdehnungskoeffizient für Stahl)
Runden	Es gilt DIN 1333: Ist die über die angegebene Stellenzahl hinausgehende Ziffer = 5 oder > 5, wird aufgerundet. Ist die Ziffer < 5, wird abgerundet.	25,5 N ≈ 26 N 18,79 kg ≈ 18,8 kg 164,4 cm^3 ≈ 164 cm^3

Technische Mathematik

Zahlensysteme

Beim Rechnen wird allgemein das dezimale Zahlensystem verwendet. Die elektronische Datenverarbeitung (EDV) und die Automatisierungstechnik bauen jedoch auf dem dualen und hexadezimalen Zahlemsystem auf, weil die elektronischen Bauelemente nur binäre[1)] Informationen, d. h. die Zustände 0 und 1, verarbeiten können.

Zahlensysteme setzen sich aus der Basis und den Zeichen zusammen **(Tabelle 1)**.

Bezeichnungen:
z_{10} Kurzzeichen für eine Dezimalzahl[2)]
z_2 Kurzzeichen für eine Dualzahl[3)]
z_{16} Kurzzeichen für eine Hexadezimalzahl[2)]

Tabelle 1: Zahlensysteme

Zahlensystem	Basis	Zeichen
Dual	2	0, 1
Dezimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Hexadezimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Dezimales Zahlensystem

Beim dezimalen Zahlensystem werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Alle Zahlen können als Zehnerpotenzen geschrieben werden.

● **Beispiel:**

Dezimalzahl $z_{10} = 857$
$z_{10} = 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
$= 800 + 50 + 7 = 857$

Die Zehnerpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren **(Tabelle 2)**.

Duales (binäres) Zahlensystem

Beim dualen Zahlensystem werden lediglich die Ziffern „0“ und „1“ verwendet. Alle Zahlen werden als Potenzen der Basis 2 dargestellt **(Tabelle 2)**.

Tabelle 2: Dezimal-, Dual- und Hexadezimalzahlen

Zahlen im Dezimalsystem		Zahlen im Dualsystem					Zahlen im Hexadezimalsystem		
Zehnerpotenzen		Zweierpotenzen					Sechzehnerpotenzen		
10^1	10^0	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	16^2	16^1	16^0
	0	0	0	0	0	0			0
	1	0	0	0	0	1			1
	2	0	0	0	1	0			2
	3	0	0	0	1	1			3
	4	0	0	1	0	0			4
	5	0	0	1	0	1			5
	6	0	0	1	1	0			6
	7	0	0	1	1	1			7
	8	0	1	0	0	0			8
	9	0	1	0	0	1			9
1	0	0	1	0	1	0			A
1	1	0	1	0	1	1			B
1	2	0	1	1	0	0			C
1	3	0	1	1	0	1			D
1	4	0	1	1	1	0			E
1	5	0	1	1	1	1			F
1	6	1	0	0	0	0		1	0

Umwandlung von Dezimal- in Dualzahlen

● **Beispiel:**

Die Dezimalzahl $z_{10} = 14$ ist in eine Dualzahl umzuwandeln.

Lösung: Es wird das **Resteverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 2 **(Tabelle 3)**. Als Rest ergibt sich jeweils die „0“ oder die „1“. Die Zweierpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren, so erhält man: $z_2 = 1\,110$.

Tabelle 3: Umwandlung der Dezimalzahl z_{10} in eine Dualzahl z_2

14 : 2 = 7 Rest 0
7 : 2 = 3 Rest 1
3 : 2 = 1 Rest 1
1 : 2 = 0 Rest 1
Ergebnis: $z_2 =$ 1 1 1 0

Umwandlung von Dual- in Dezimalzahlen

● **Beispiel:**

Die Dualzahl $z_2 = 10\,110$ ist in eine Dezimalzahl z_{10} umzuwandeln.

Lösung: Der Dualzahl z_2 werden ihre Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^4 von rechts nach links steigend zugeordnet **(Tabelle 4)**.

Alle Stellenwerte, z. B. 16 der Zweierpotenz 2^4, werden mit der zugehörenden Dualzahl, hier „1“, multipliziert. Alle Produkte zusammen addiert ergeben die Dezimalzahl $z_{10} = 22$.

Tabelle 4: Umwandlung einer Dualzahl z_2 in eine Dezimalzahl z_{10}

Dualzahl z_2	1	0	1	1	0
Zweierpotenz	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stellenwert	16	8	4	2	1

Addition:
$z_{10} = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 22$

1) binär (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend
2) hexa (griech.) = sechs, dezimal (lat.) = 10
3) dual (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend

Hexadezimales Zahlensystem

Bei Mikroprozessoren verwendet man häufig auch das hexadezimale Zahlensystem. Bei diesem werden neben den Ziffern 0 bis 9 auch die Buchstaben A bis F benützt. Es hat den Vorteil, dass weniger Zeichen benötigt werden, als dies beim dezimalen und dualen Zahlensystem der Fall ist.

Die Zahlen werden in Potenzen der Basis 16 angegeben: 16^0, 16^1, 16^2 usw. **(Tabelle 2, vorherige Seite)**.
Die Hexadezimalzahl z_{16} = A ergibt eine Dezimalzahl z_{10} = 10 oder z_{16} = F ergibt z_{10} = 16.

Umwandlung von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen

Beispiel:

Die Dezimalzahl z_{10} = 2016 ist in eine Hexadezimalzahl z_{16} umzuwandeln.

Lösung: Auch hier wird das **Resteverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 16 **(Tabelle 1)**. Als Rest ergibt sich jeweils Zahlen von 0 bis 15. Die Zahlen von 10 bis 15 müssen in Buchstaben umgewandelt werden. Die 16er-Potenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren.

So erhält man das Ergebnis $\mathbf{z_{16} = 7\ E\ 0}$.

Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen

Beispiel:

Die Hexadezimalzahl z_{16} = A2F ist in eine Dezimalzahl z_{10} umzuwandeln.

Lösung: Der Hexadezimalzahl z_{16} werden ihre 16er-Potenzen von 160 bis 162 von rechts nach links steigend zugeordnet **(Tabelle 2)**.

Von den Buchstabenwerten A und F werden ihre Ziffernwerte gebildet. Diese Ziffernwerte werden jeweils mit ihren Stellenwerten multipliziert und alle Produkte addiert.

So ergibt sich die Dezimalzahl z_{10} = 2607.

Tabelle 1: Umwandlung einer Dezimalzahl z_{10} in eine Hexadezimalzahl z_{16}

2016 : 16 =	126 Rest 0			
126 : 16 =	7 Rest 14			
7 : 16 =	0 Rest 7			
Ergebnis: z_{16} =		7	E	0

(aus dem Rest 14 wird die Ziffer 0, siehe **Tabelle 2, vorherige Seite**)

Tabelle 2: Umwandlung der Hexadezimalzahl z_{16} in eine Dezimalzahl z_{10}

Hexadezimalzahl z_{16}	A	2	F
Ziffernwert	10	2	15
16er Potenz	16^2	16^1	16^0
Stellenwert	256	16	1

Addition: $z_{10} = 10 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 15 \cdot 1$
$= 2560 + 32 + 15 = 2607$

Aufgaben | Zahlensysteme

1. **Umwandlung von Dezimalzahlen (Tabelle 3).** Die Dezimalzahlen sind in Dualzahlen sowie in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 3	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Dezimalzahl	24	30	48	64	100	144	150	255	2000

2. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 4).** Wandeln sie die folgenden Dualzahlen in Dezimalzahlen um.

Tabelle 4	a	b	c	d	e	f
Dualzahl	100	1010	11111	110011	11110000	11111111

3. **Umwandlung von Hexadezimalzahlen (Tabelle 5).** Die Hexadezimalzahlen sind in Dezimalzahlen und in Dualzahlen umzuwandeln.

Tabelle 5	a	b	c	d	e	f
Hexadezimalzahl	68	A0	96	8F	ED	FF

4. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 6).** Die Dualzahlen sind in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 6	a	b	c	d	e	f
Dualzahlen	101010	111000	11001100	11100011	10010010	10000111

Grundrechnungsarten

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zählen zu den Grundrechnungsarten. In diesem Abschnitt werden außerdem das Potenzieren, Radizieren (Wurzelziehen) und das Bruchrechnen behandelt. Die Einführung der Rechenregeln wird mit Zahlenbeispielen erläutert. Die daraus abgeleiteten Beispiele aus der Algebra führen in das technische Rechnen mit Formeln ein.

Variable

In der Algebra werden **Variable** (Platzhalter) eingesetzt, die beliebige Zahlenwerte darstellen können **(Tabelle 1).** Als Variable werden meist Kleinbuchstaben verwendet.

Tabelle 1: Schreibweisen von Variablen

Zeichen	Beispiele
Das **Multiplikationszeichen** zwischen Zahl und Variable kann weggelassen werden.	$3 \cdot a = 3a$ $a \cdot b = ab$
Der **Faktor 1** wird meist nicht geschrieben.	$1 \cdot b = b$

Klammerausdrücke (Klammerterm)

Mathematische Ausdrücke können mit Klammern zusammengefasst werden. Die in Klammern stehenden Werte müssen zuerst berechnet werden. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 2** beschrieben.

Tabelle 2: Klammerausdrücke

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Pluszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht, können weggelassen werden. Die Vorzeichen der Glieder bleiben unverändert.	$16 + (9 - 5)$ $= 16 + 9 - 5$ $= 20$	$a + (b - c)$ $= a + b - c$
Minuszeichen vor der Klammer Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, können nur aufgelöst (weggelassen) werden, wenn alle Glieder in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.	$16 - (9 - 5)$ $= 16 - 9 + 5$ $= 12$	$a - (b - c)$ $= a - b + c$

Strich- und Punktrechnungen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division können aufgrund ihrer Rechenzeichen in Strich- (–, +) und Punktrechnungen (·, :) unterteilt werden.

Strichrechnungen

Zu den Strichrechnungen zählen die Addition und die Subtraktion. Die Rechenregeln für Strichrechnungen können **Tabelle 3** entnommen werden.

Tabelle 3: Rechenregeln für die Strichrechnungen

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Vertauschungsgesetz Zahlen und Buchstaben können vertauscht werden.	$3 - 9 + 7$ $= 7 + 3 - 9$ $= -9 + 3 + 7$ $= 1$	$a - b + c$ $= a + c - b$ $= -b + a + c$
Zusammenfassung Einzelne Glieder können zu Teilsummen zusammengefasst werden.	$3 + 7 - 9$ $= (3 + 7) - 9$	$a + b - c$ $= (a + b) - c$
Summieren von Variablen Nur gleiche Variable können addiert oder subtrahiert werden.	–	$18a - 3a + 2b - 5b$ $= 15a - 3b$

Punktrechnungen

Multiplikationen und Divisionen bezeichnet man als Punktrechnungen. Die Rechenregeln für die Multiplikation sind in der **Tabelle 1** zusammengestellt.

Tabelle 1: Rechenregeln für die Multiplikation

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Vertauschungsgesetz Faktoren dürfen vertauscht werden.	$3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ $= 5 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3$	$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$ $= c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$
Vorzeichenregeln		
Gleiche Vorzeichen Haben zwei Faktoren gleiche Vorzeichen, so wird das Produkt positiv; + mal + = +; – mal – = +	$2 \cdot 5 = 10$ $(-2) \cdot (-5) = +10 = \mathbf{10}$	$a \cdot x = ax$ $(-a) \cdot (-x) = +ax = \boldsymbol{ax}$
Ungleiche Vorzeichen Haben zwei Faktoren verschiedene Vorzeichen, so wird das Produkt negativ; – mal + = –; + mal – = –	$3 \cdot (-8) = -24$ $(-3) \cdot 8 = \mathbf{-24}$	$a \cdot (-x) = -ax$ $(-a) \cdot x = \boldsymbol{-ax}$
Produkte mit Klammern		
Faktor mit Klammer Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, in dem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert. Wenn möglich, sollte man zuerst den Inhalt der Klammer zusammenfassen und dann den Wert der Klammer mit dem Faktor multiplizieren.	$7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$ $= \mathbf{63}$ oder: $7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 9 = \mathbf{63}$	$a \cdot (b + 2b)$ $= ab + 2ab$ $= \boldsymbol{3ab}$ oder: $a \cdot (b + 2b)$ $= a \cdot 3b$ $= \boldsymbol{3ab}$
Klammer mit Klammer Zwei Klammerausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Bei Zahlen können auch zuerst die Klammerausdrücke berechnet und danach kann das Produkt gebildet werden.	$(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 3 \cdot 10 + 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 10 + 5 \cdot (-7)$ $= 30 - 21 + 50 - 35$ $= \mathbf{24}$ oder: $(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 8 \cdot 3 = \mathbf{24}$	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= \boldsymbol{ac - ad + bc - bd}$

Die Rechenregeln für die Division sind in **Tabelle 2** dargestellt. Das Rechenzeichen für die Division ist der Doppelpunkt (:) oder der Bruchstrich.

Tabelle 2: Rechenregeln für die Division

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Bruchstrich entspricht Klammer Der Bruchstrich fasst Ausdrücke in gleicher Weise zusammen wie eine Klammer und ersetzt das Divisionszeichen.	$\frac{3+4}{2} = (3+4):2 = \mathbf{3{,}5}$	$\frac{a+b}{2} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$
Vertauschungsgesetz gilt nicht! Zähler und Nenner dürfen nicht vertauscht werden.	$3:4 \neq 4:3$ $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3}$	$a:b \neq b:a$ $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$
Vorzeichenregel		
Gleiche Vorzeichen Haben Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv. + geteilt durch + = + – geteilt durch – = +	$\frac{15}{3} = 15:3 = \mathbf{5}$ $\frac{-15}{-3} = (-15):(-3) = \mathbf{+5}$	$\frac{a}{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ $\frac{-a}{-b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$
Ungleiche Vorzeichen Haben Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen, so ist das Ergebnis negativ. + geteilt durch – = – – geteilt durch + = –	$\frac{15}{-3} = 15:(-3) = \mathbf{-5}$ $\frac{-15}{3} = (-15):3 = \mathbf{-5}$	$\frac{a}{-b} = \boldsymbol{-\frac{a}{b}}$ $\frac{-a}{b} = \boldsymbol{-\frac{a}{b}}$
Klammerausdrücke		
Klammer geteilt durch Wert Ein Klammerausdruck wird durch einen Wert (Zahl, Buchstabe, Klammerausdruck) dividiert, indem man jedes einzelne Glied in der Klammer durch diesen Wert dividiert. Man kann auch den Klammerausdruck erst berechnen und danach dividieren.	$(16 - 4) : 4$ $= 16 : 4 - 4 : 4$ $= 4 - 1 = \mathbf{3}$ oder $(16 - 4) : 4 = 12 : 4 = \mathbf{3}$	$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \boldsymbol{\frac{a}{b} - 1}$

Gemischte Punkt- und Strichrechnungen

Kommen in einer Rechnung sowohl Strich- als auch Punktrechnungen oder Klammern vor, so ist die Reihenfolge der Lösungsschritte zu beachten. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 1** zusammengestellt.

Tabelle 1: Rechenregeln für gemischte Punkt- und Strichrechnungen

Reihenfolge der Lösungsschritte	Zahlenbeispiele	Algebraische Beispiele
1. Punktrechnungen 2. Strichrechnungen	$8 \cdot 4 - 18 \cdot 3$ $= 32 - 54$ $= \mathbf{-22}$	$3a \cdot 2b - 4a \cdot 6b$ $= 6ab - 24ab$ $= \mathbf{-18}\boldsymbol{ab}$
	$\frac{16}{4} + \frac{20}{5} - \frac{18}{3} = 4 + 4 - 6 = \mathbf{2}$	$\frac{16a}{4} + \frac{3b}{b} - \frac{6c}{2c} = 4a + 3 - 3 = \mathbf{4}\boldsymbol{a}$
Klammerausdrücke sowie gemischte Punkt- und Strichrechnungen: 1. Klammern 2. Punktrechnungen 3. Strichrechnungen	$8 \cdot (3 - 2) + 4\,(16 - 5)$ $= 8 \cdot 1 + 4 \cdot 11$ $= 8 + 44 = \mathbf{52}$	$a \cdot (3x + 5x) - b \cdot (12y - 2y)$ $= a \cdot 8x - b \cdot 10y$ $= \mathbf{8}\boldsymbol{ax} - \mathbf{10}\boldsymbol{by}$

Aufgaben | Gemischte Punkt- und Strichrechnung

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 5 sind zu berechnen und auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma zu runden.

1. a) $217{,}583 - 27{,}14 \cdot 0{,}043 + 12$ c) $7{,}1 + 16{,}27 + 14{,}13 \cdot 17{,}0203$ e) $857 - 3{,}52 \cdot 97{,}25 - 16{,}386 + 1{,}1$	b) $16{,}25 + 14{,}12 \cdot 6{,}21$ d) $74{,}24 - 1{,}258 \cdot 12{,}8$ f) $119{,}2 + 327{,}351 - 7{,}04 \cdot 7{,}36$
2. a) $17{,}13 + 13{,}25 + 15{,}35 : 2$	b) $34{,}89 + 241{,}17 : 21{,}35 - 12{,}46 : 2{,}2$
3. a) $243 : 0{,}04 - 92{,}17 - 13{,}325 + 124{,}3 : 3{,}5$	b) $507 : 0{,}05 - 261{,}17 - 114{,}325 + 142{,}3 : 18{,}4$
4. a) $18 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$ c) $\frac{-96}{16} + \frac{65}{-15}$	b) $120 : (-6) - (-15) : 5$ d) $\frac{148}{37} - \frac{-85}{17}$
5. a) $\frac{24{,}75 + 15}{12{,}6} + \frac{38{,}7 - 2{,}08}{0{,}36} - \frac{44{,}2 \cdot 13{,}1}{20{,}05 - 1{,}7}$ c) $(23{,}7 - 2{,}8) \cdot \frac{15{,}1 - 3{,}7}{16{,}9}$	b) $34{,}2 \cdot \frac{23{,}4 - 8{,}6}{2{,}4} - \frac{13{,}8 + 22{,}7}{27 - 3{,}5} \cdot 20{,}6$ d) $\frac{25 \cdot (20{,}1 - 16{,}58)}{(34{,}85 - 2{,}97) \cdot 4{,}6}$

Die Ergebnisse der Aufgaben 6 bis 8 sind zu berechnen.

6. a) $3a \cdot 4b - 10a \cdot 2b$ c) $-8m \cdot 2n + 7{,}5m \cdot (-2n)$	b) $25x \cdot (-10y) + 13x \cdot (-5y)$ d) $(-16a) \cdot (-5c) - (-5a) \cdot (-2c)$
7. a) $\frac{30x}{10y} + \frac{15x}{2y}$ c) $\frac{7{,}5x}{2{,}5y} + \frac{33x}{22y}$	b) $\frac{12m}{15n} - \frac{30m}{1{,}5n}$ d) $\frac{-2x}{-8y} - \frac{-15x}{-60y}$
8. a) $-3a \cdot (8x - 5x) - 2a \cdot (20x - 12x)$	b) $-3x \cdot (8x - 5x) + 3x \cdot (-12x - 33x)$

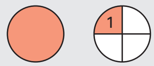
Bruchrechnen

Der Bruchterm ist ein Zahlenverhältnis und besteht aus dem Zähler und dem Nenner. Der Nenner ist die Bezugsgröße und gibt die Gesamtheit der Teile an. Der Zähler bezeichnet die Anzahl der Teile.

$$\text{Bruchterm} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Das Bruchrechnen wird in der technischen Mathematik z. B. bei Teilkopf-, Kegel- oder Wechselräderberechnungen angewandt. Es wird hier nur so weit behandelt, als es für die genannten Anwendungen notwendig ist. In **Tabelle 1** sind verschiedene Arten von Brüchen aufgeführt.

Tabelle 1: Brucharten

Art	Beispiel	Kennzeichen	Wert	Bild
Echter Bruch	$\frac{1}{3}$	Zähler < Nenner	<1	
Unechter Bruch	$\frac{5}{4}$	Zähler > Nenner	>1	
Gemischte Zahl	$1\frac{1}{4}$	Ganze Zahl und ein echter Bruch	>1	
Dezimalbruch	0,75	Dezimalkomma	<1	

Erweitern, Kürzen und Umwandlung von Bruchtermen

Brüche können erweitert, gekürzt oder umgewandelt werden. Dabei bleibt ihr Wert unverändert **(Tabelle 2)**.

Tabelle 2: Rechenregeln für Bruchterme

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
Erweitern Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert.	$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
Kürzen Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (bzw. denselben Buchstaben) dividiert.	$\frac{6}{24} = \frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{(a \cdot c):c}{(b \cdot c):c} = \frac{a}{b}$
Summen oder Differenzen Summen oder Differenzen sind vor dem Kürzen oder Erweitern zu berechnen.	$\frac{18-24}{260+20} = \frac{-6}{280} = \frac{-3}{140} = -\frac{3}{140}$	$\frac{c-b}{c+b}$ kann nicht gekürzt werden.
Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.	$\frac{3}{8} = 3:8 = 0{,}375$	–
Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch Ein endlicher Dezimalbruch wird in einen Bruch verwandelt, indem man in den Zähler alle Ziffern nach dem Komma schreibt. Der Nenner erhält eine 1 mit so vielen Nullen, wie der Zähler Stellen hat.	$0{,}48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$	–

Aufgaben | Bruchrechnen

1. Die folgenden Brüche sind so zu erweitern, dass sich der Nenner 24 ergibt.
   a) 3/4 b) 1/2 c) 5/4 d) 5/12 e) 6/8
2. Die folgenden Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen.
   a) 3/21 b) 4/48 c) 33/66 d) 36/45 e) 40/132
3. Die folgenden Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln.
   a) 3/21 b) 4/48 c) 33/66 d) 36/45 e) 40/132
4. Die folgenden Dezimalbrüche sind in Brüche zu verwandeln.
   a) 0,9375 b) 0,375 c) 0,85 d) 0,2 e) 0,333

Potenzieren

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren kann abgekürzt geschrieben werden. Die abgekürzte Schreibweise nennt man Potenz; der Rechenvorgang wird als Potenzieren bezeichnet. Eine Potenz **(Bild 1)** besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Man unterscheidet Potenzen mit positiven und Potenzen mit negativen Exponenten.

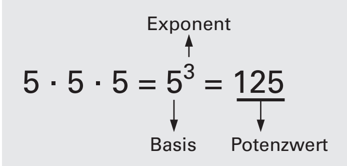


Bild 1: Potenz

Potenzen mit positiven Exponenten

● **Beispiele:**

Fläche des Quadrats **(Bild 2)**	$A = l \cdot l = l^2$ $= 5\ \text{mm} \cdot 5\ \text{mm} = (5\ \text{mm})^2 = 25\ \text{mm}^2$
Volumen des Würfels **(Bild 3)**	$V = l \cdot l \cdot l = l^3$ $= 5\ \text{mm} \cdot 5\ \text{mm} \cdot 5\ \text{mm} = (5\ \text{mm})^3$ $= 125\ \text{mm}^3$

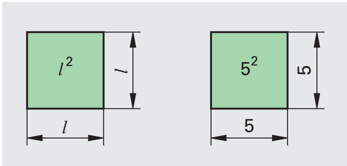


Bild 2: Quadrat

Auch Produkte, Brüche oder Klammerausdrücke können die Basis von Potenzen sein.

● **Beispiele:**

Produkt:	$(5a)^2 = 5a \cdot 5a = 25a^2$
oder	$(5a)^2 = 5^2 \cdot a^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 25a^2$
Bruch:	$\frac{3^3}{b^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{b \cdot b \cdot b} = \frac{27}{b^3}$
Klammer:	$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

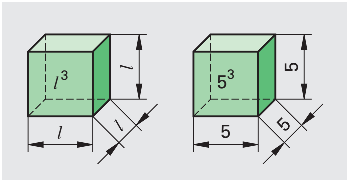


Bild 3: Würfel

Potenzen mit negativen Exponenten

Eine Potenz, die im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

● **Beispiele:**

$$\frac{1}{4^2} = 4^{-2} \qquad 15^{-3} = \frac{1}{15^3}; \qquad 15\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; \qquad \frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}; \qquad \text{g} \cdot (\text{kW} \cdot \text{h})^{-1} = \frac{\text{g}}{\text{kW} \cdot \text{h}}$$

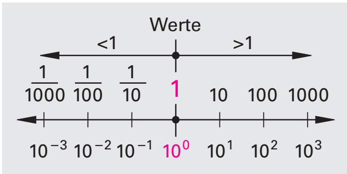


Bild 4: Zehnerpotenzen

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden **(Bild 4 und Tabelle 1).**

Die Zahl vor der Zehnerpotenz wird meist im Bereich zwischen 1 und 10 angegeben.

● **Beispiele:**

$4\,200\,000 = 4{,}2 \cdot 1\,000\,000 = \mathbf{4{,}2 \cdot 10^6}$
$0{,}000\,0042 = 4{,}2 \cdot 0{,}000\,001 = \mathbf{4{,}2 \cdot 10^{-6}}$
Die Schreibweise $4{,}2 \cdot 10^6$ ist übersichtlicher als $0{,}42 \cdot 10^7$ oder $42 \cdot 10^5$.

Tabelle 1: Zehnerpotenzen

Schreibweise als: ausgeschriebene Zahl	Zehnerpotenz	Vorsatzname
1 000 000	10^6	Mega (M)
100 000	10^5	–
10 000	10^4	–
1 000	10^3	Kilo (k)
100	10^2	Hekto (h)
10	10^1	Deka (da)
1	10^0	–
0,1	10^{-1}	Dezi (d)
0,01	10^{-2}	Zenti (c)
0,001	10^{-3}	Milli (m)
0,000 1	10^{-4}	–
0,000 01	10^{-5}	–
0,000 001	10^{-6}	Mikro (µ)

Beim Rechnen mit Potenzen gelten besondere Regeln **(Tabelle 1)**:

Tabelle 1: Potenzieren

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Formel
1. Addition und Subtraktion von Potenzen Potenzen dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl denselben Exponenten als auch dieselbe Basis haben.	$2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2$ $= 5^2 \cdot (2 + 4)$ $= 5^2 \cdot 6$ $\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	$a^3 + a^3 = 2a^3$ $\frac{7}{d^n} - \frac{4}{d^n} = \frac{3}{d^n} = 3 \cdot d^{-n}$	$ax^n + bx^n$ $= (a + b) \cdot x^n$ $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^n} = \frac{a+b}{x^n}$ $= (a+b) \cdot x^{-n}$
2. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$3^2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 3^5$ oder: $3^2 \cdot 3^3$ $= 3^{(2+3)} = 3^5$	$x^4 \cdot x^2$ $= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ $= x^6$ oder: $x^4 \cdot x^2$ $= x^{(4+2)} = x^6$	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$4^2 \cdot 6^2$ $= (4 \cdot 6)^2$ $= 24^2$ $= 576$	$6x^2 \cdot 3y^2$ $= 18x^2y^2$ $= 18(x \cdot y)^2$	$x^n \cdot y^n = (xy)^n$
4. Division von Potenzen mit gleicher Basis Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{4^3}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4$ oder: $4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$	$\frac{m^3}{m^2} = \frac{m \cdot m \cdot m}{m \cdot m} = m$ oder: $m^3 : m^2 = \frac{m^3}{m^2} = m^3 \cdot m^{-2}$ $= m^{3-2} = m^1 = m$	$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n}$ $= x^{m-n}$
5. Division von Potenzen mit gleichen Exponenten Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{15^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2$ $= 25$	$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. Multiplikation von Potenzen mit einem Faktor Werden Potenzen mit einem Faktor multipliziert, so muss zuerst der Wert der Potenz berechnet werden.	$6 \cdot 10^3$ $= 6 \cdot 1000$ $= 6000$ $7 \cdot 10^{-2} = \frac{7}{100} = 0{,}07$	–	–
7. Potenzwert mit dem Exponenten Null Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Wert 1.	$\frac{10^4}{10^4} = 10^{4-4} = 10^0 = 1$	$(m + n)^0 = 1$	$a^0 = 1$ $a \neq 0$

Radizieren (Wurzelziehen)

Das Radizieren[1] oder Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden und dem Wurzelexponenten **(Bild 1).** Der Radikand steht unter dem Wurzelzeichen; aus dieser Zahl wird die Wurzel gezogen. Der Wurzelexponent steht über dem Wurzelzeichen und gibt an, in wie viel gleiche Faktoren der Radikand aufgeteilt werden soll.

Eine Wurzelrechnung kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Der Radikand erhält im Exponenten einen Bruch. Der Zähler entspricht dem Exponenten des Radikanden, der Nenner entspricht dem Wurzelexponenten.

Beispiel: $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1} = 9^{\frac{1}{2}}$

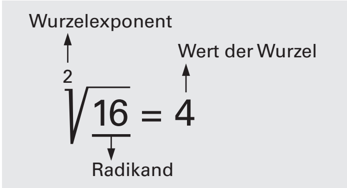


Bild 1: Darstellung einer Wurzel

Schreibweisen einer Wurzel

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Quadratwurzel

$\sqrt{16}$ (sprich Quadrat-Wurzel aus 16 oder Wurzel aus 16) bedeutet, man sucht eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Wert 16 ergibt.

Beispiel: $\sqrt{16} = 4$, denn $4 \cdot 4 = 16$

Der Wurzelexponent 2 bei der Quadratwurzel wird meist weggelassen.

Beispiel: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt[2]{4^2} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{16} = 4$

Quadratwurzel

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

Kubikwurzel

$\sqrt[3]{27}$ (sprich 3. Wurzel aus 27 oder Kubikwurzel aus 27) bedeutet, dass man eine Zahl sucht, die dreimal mit sich selbst multipliziert den Wert 27 ergibt.

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = 3$, denn $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Kubikwurzel

$$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

Tabelle 1: Radizieren

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Formel
1. Addition und Subtraktion von Wurzeln Wurzeln dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben. Man addiert (subtrahiert) die Faktoren und behält die Wurzel bei.	$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$ $= (2+3)\sqrt{6}$ $= 5\sqrt{6}$	$8\sqrt{m} - 3\sqrt{m}$ $= (8-3)\sqrt{m}$ $= 5\sqrt{m}$	$a\sqrt{m} + b\sqrt{m}$ $= (a+b)\sqrt{m}$
2. Radizieren eines Produktes Ist der Radikand ein Produkt, so kann die Wurzel entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor gezogen werden.	$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$ oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ $= 3 \cdot 4 = 12$	$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. Radizieren einer Summe oder Differenz Ist der Radikand eine Summe oder eine Differenz, so kann nur aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen werden.	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16}$ $= \sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{(a-b)}$	$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{(a-b)}$
4. Radizieren eines Quotienten Ist der Radikand ein Quotient (Bruch), so kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner getrennt gezogen werden.	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ oder $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$	$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

1) radix (lateinisch) Wurzel

Aufgaben | Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen)

1. Potenzschreibweise. Die Ausdrücke der Aufgaben a bis f sind in Potenzform zu schreiben.

a) $4a \cdot 2a \cdot a$ b) 16 dm · 2 dm · 4 dm c) 2,5 m · 6 m · 1,3 m

d) $\frac{6a}{2} \cdot \frac{5b}{3a} \cdot \frac{1}{5}b$ e) $0{,}5\text{ cm} \cdot \frac{1}{10}\text{ cm} \cdot \frac{3}{4}\text{ cm}$ f) $16\text{ m}^2 : 8\text{ m}$

2. Zehnerpotenzen. Die Zahlen sind in Zehnerpotenzen zu verwandeln.

a) 100; 1 000; 0,01; 0,001; 1 000 000; 1/1 000 000 b) 55 420; 1 647 978; 356 763; 33 200
c) 0,033; 0,756; 0,0021; 0,000 02; 0,000 000 1 d) 1/10; 5/100; 7/1 000; 33/100; 321/1 000

3. Potenzschreibweise. Die folgenden Zahlen sind in Zehnerpotenzen umzuformen.

a) Lichtgeschwindigkeit c = 299 790 000 m/s
b) Umfang des Äquators U = 40 076 594 m
c) Mittlerer Abstand der Erde von der Sonne R = 149,5 Millionen km
d) Oberflächen der Erde O = 510 100 933 km²

4. Addition und Subtraktion. Die Potenzen sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a) $5b^3 + 7b^3 + 3b^3$ b) $9m^3 - 9n^3 + 12n^3 - 5m^3 - n^3$
c) $15x^4y - 3x^2y^3 - 5x^4y$ d) $2{,}6a^2 + 5{,}9a^3 - 3{,}1a^3 + 19{,}7a^2 - a^3$

5. Multiplikation und Division. Die Potenzen sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a) $4^2 \cdot 4^3$ b) $a^5 \cdot a^4$ c) $2x^2 \cdot 4x \cdot 5x^3$ d) $0{,}5b^3 \cdot 1{,}3b^2$ e) $441x^6 : 21x^2$

f) $51a^4b^3 : 17a^2b^3$ g) $\frac{49^3}{7^3}$ h) $\frac{57^2}{19^2}$ i) $\frac{6{,}8a^2}{0{,}17a^2}$ k) $\frac{(4a)^x}{a^x}$

6. Berechnung von Wurzeln. Folgende Wurzeln sind zu berechnen bzw. vereinfacht zu schreiben.

a) $\sqrt{49}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{0{,}36}$ b) $\sqrt[3]{0{,}008}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{9a^4}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}$; $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}}$

7. Berechnung von Wurzeln. Die Ergebnisse sind auf die zweite Stelle zu runden.

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{47}$; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt{\frac{121}{9}}$ b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{49}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt{\frac{1}{121}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

8. Wurzeln mit Variablen. Wie groß ist $\sqrt{x^2 + y^2}$ für die folgenden Werte?

a) $x = 8$; $y = 6$ b) x = 10 m; y = 7,5 m c) x = 0,48 cm; y = 0,36 cm

Wie groß ist $\sqrt{c^2 - b^2}$ für die folgenden Werte?

a) $c = 15$; $b = 12$ b) c = 2,5 m; b = 1,5 m c) c = 0,2 dm; b = 0,16 dm

9. Addition und Subtraktion. Die Wurzeln sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$; b) $2\sqrt{m} + 7\sqrt{m}$; c) $2m\sqrt{b} + 3n\sqrt{b}$ d) $5\sqrt{9} - 3\sqrt{9}$; e) $c\sqrt{c} - 2\sqrt{c}$

10. Multiplikation und Division. Die Ausdrücke sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ b) $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7}$ c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a}$ d) $\sqrt{16 \cdot 49}$

e) $\sqrt{4x^2 \cdot y^2}$ f) $\sqrt{81m^4 \cdot n^2}$ g) $\sqrt{32} : \sqrt{8}$ h) $\sqrt{7ax} : \sqrt{7a}$

Allgemeine Berechnungen

Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)

Mit der Schlussrechnung wird, ausgehend von einer bekannten Größe (z. B. Stückzahl, Masse u. a.), ein Vielfaches oder ein Teil berechnet.

Bezeichnungen:
A_m Ausgangsmenge, z. B. St A_w Ausgangswert, z. B. kg
E_m Endmenge, z. B. St E_w Endwert, z. B. kg

Schlussrechnung für direkt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich im gleichen Verhältnis, d. h. sie sind direkt proportional.

Beispiel: 25 Distanzplatten haben eine Masse $m = 2\,800$ g. Welche Masse haben 6 Distanzplatten **(Bild 1)**?

Grundaussage: Die Menge A_m = 25 Distanzplatten hat die Masse $A_w = 2\,800$ g.

Berechnung des Wertes für die Menge *A* = 1 Stück (St):

1 Distanzplatte hat die Masse $\dfrac{A_w}{A_m} = \dfrac{2\,800\text{ g}}{25\text{ St}} = \mathbf{112\,\dfrac{g}{St}}$

Berechnung des Endwertes E_w für die Endmenge E_m:

E_m = 6 Distanzplatten haben die Masse $E_w = \dfrac{A_w}{A_m} \cdot E_m = \dfrac{2\,800\text{ g}}{25\text{ St}} \cdot 6\text{ St} = \mathbf{672\text{ g}}$

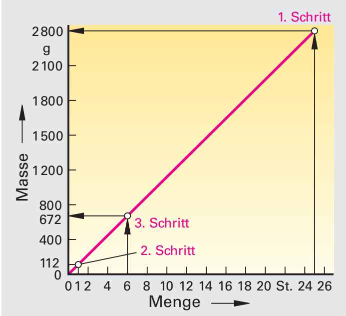


Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis

Endwert bei direkt proportionalem Verhältnis

$$E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m$$

Schlussrechnung für indirekt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich in umgekehrtem Verhältnis, d. h., sie sind indirekt proportional.

Beispiel: Für die Montage von 12 Kettensägen benötigen 4 Mitarbeiter 3 Stunden. Wie viel Stunden benötigen 6 Mitarbeiter für die gleiche Anzahl Sägen **(Bild 2)**?

Grundaussage: Die Menge A_m = 4 Mitarbeiter benötigen die Zeit A_w = 3 Stunden.

Berechnung des Wertes für die Menge *A* = 1 Mitarbeiter:

1 Mitarbeiter benötigt $A_m \cdot A_w = 4 \cdot 3$ Stunden = **12 Stunden**

Berechnung des Endwertes E_w für die Endmenge E_m:

E_m = 6 Mitarbeiter benötigen die Zeit $E_w = \dfrac{A_m \cdot A_w}{E_m} = \dfrac{4\text{ Mitarbeiter} \cdot 3\text{ h}}{6\text{ Mitarbeiter}} = \mathbf{2\text{ h}}$

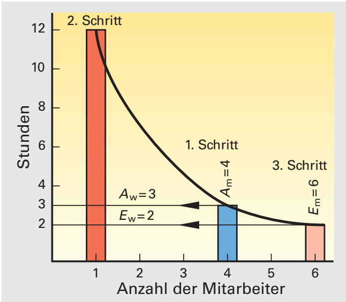


Bild 2: Indirekt proportionales Verhältnis

Endwert bei indirekt proportionalem Verhältnis

$$E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m}$$

Aufgaben | Schlussrechnung

1. **Werkstoffpreis.** Eine Gießerei berechnet für Stahlguss einen Preis von 1,08 €/kg. Wie viel kosten 185 Deckel mit einer Masse von je 1,35 kg?
2. **Schutzgasverbrauch.** Die Schweißnaht an einem Schiff ist 78 m lang. Nach 23 m geschweißter Naht wurde ein Schutzgasverbrauch von 640 l festgestellt. Wie viel l Schutzgas sind für die gesamte Fertigstellung der Naht erforderlich?
3. **Notstromaggregat.** Im 3-stündigen Betrieb verbrauchen 2 Notstromaggregate 120 l Kraftstoff. Wie lange können 3 Aggregate mit einem Treibstoffvorrat von 240 l betrieben werden?
4. **CuZn-Blech.** 4 m² eines 4 mm dicken Blechs aus CuZn37 haben eine Masse m = 136 kg. Welche Masse haben 10 m² Blech mit einer Blechdicke von 6 mm?
5. **Qualitätskontrolle.** In der Qualitätskontrolle benötigen 3 Prüfer 14 Stunden für einen Prüfvorgang. Wie viele Prüfer müssten eingesetzt werden, um die Kontrollarbeiten in etwa 8 Stunden zu schaffen?
6. **Rundstahl.** In einer Walzenstraße wird Rundstahl mit einer Querschnittsfläche von 200 mm² und einer Länge von 4500 mm hergestellt. Wie viel Meter Rundstahl erhält man, wenn bei gleicher Masse die Querschnittsfläche auf 100 mm² verkleinert wird?

Prozentrechnung

Damit man sich Größen und Werte vorstellen und sie untereinander vergleichen kann, bezieht man sie auf die Zahl 100. Den betrachteten Wert drückt man als Prozentsatz aus.

Bezeichnungen:

P_s	Prozentsatz	%	P_w	Prozentwert	z. B. €
G_w	Grundwert	z. B. €			

1. Beispiel:

Wie groß ist der Prozentwert P_w in € für einen Grundwert G_w = 500 € bei einem Prozentsatz P_s = 40 % **(Bild 1)**?

Lösung: $P_w = \frac{G_w}{100\ \%} \cdot P_s = \frac{500\ €}{100\ \%} \cdot 40\ \% = \mathbf{200\ €}$

2. Beispiel:

Von 600 gefertigten Zahnriemen sind 17 Ausschuss. Der Prozentsatz P_s für den Ausschuss ist zu berechnen.

Lösung: $P_w = \frac{G_w}{100\ \%} \cdot P_s$; $\quad P_s = \frac{100\ \%}{G_w} \cdot P_w = \frac{100\ \%}{600} \cdot 17 = \mathbf{2{,}83\ \%}$

3. Beispiel:

Ein schadhafter Behälter verlor 38,84 Liter Flüssigkeit, das sind 16 % der Flüssigkeit. Wie viel Liter Flüssigkeit enthielt der Behälter?

Lösung: $P_w = \frac{G_w}{100\ \%} \cdot P_s$; $\quad G_w = \frac{100\ \%}{P_s} \cdot P_w = \frac{100\ \%}{16\ \%} \cdot 38{,}84\ l = \mathbf{242{,}75\ l}$

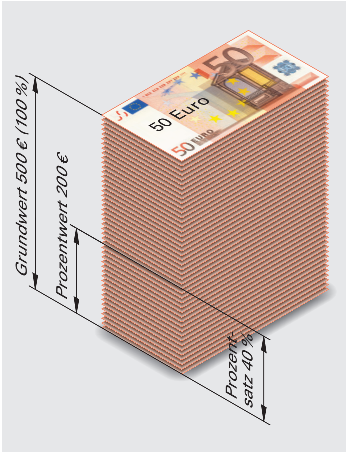


Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis

Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w}{100\ \%} \cdot P_s$$

Aufgaben | Prozentrechnung

1. **Festplatte.** Eine Bilddatei benötigt 15 MByte Speicherplatz auf einer Festplatte. Wie viel Prozent Festplattenspeicher werden für das Bild auf einer 10-GByte-Festplatte beansprucht?

2. **Scanzeit.** Ein Flachbettscanner benötigt für den Scanvorgang einer Fotografie 4 min. Das Nachfolgemodell des Scanners soll bei dem gleichen Arbeitsauftrag 24 % schneller sein.

   Berechnen Sie die Scanzeit des neuen Scannermodells.

3. **Rauchgasentschwefelung.** In den Rauchgasen eines Kraftwerkes lag der Anteil des Schwefeldioxids 62 % unter dem zulässigen Grenzwert. Durch den Einbau einer zusätzlichen Rauchgasentschwefelungsanlage konnte der Wert auf 20 % des Grenzwertes gesenkt werden. Um wie viel Prozent verringerte die Rauchgasentschwefelungsanlage den Ausstoß an Schwefeldioxid des Kraftwerkes?

4. **Gehäusegewicht.** Um wie viel Prozent vermindert sich das Gewicht eines Gehäuses, das bisher aus 1 mm dickem Stahlblech (Dichte ϱ = 7,85 kg/dm³) bestand und nun aus 2 mm dickem Aluminiumblech (Dichte ϱ = 2,7 kg/dm³) hergestellt werden soll?

5. **Zugfestigkeit.** Durch Vergüten wurde die Zugfestigkeit eines Stahles um 42 % auf 1250 N/mm² erhöht. Wie groß war die Zugfestigkeit des Werkstoffes vor der Wärmebehandlung?

6. **Lotherstellung.** In einer Schmelze sollen 150 kg des Weichlotes L-Sn63Pb37 hergestellt werden. Berechnen Sie die Einzelmassen an Zinn und Blei in der Schmelze.

7. **Aktienfonds.** Vor mehr als einem Jahr wurden 15 Anteile eines Technologiefonds zu einem Preis von 135 € mit einem Ausgabeaufschlag von 5,25 % gekauft. Der Fonds hat vom Kauftag bis heute eine Wertsteigerung von 45 %.

   a) Welcher Gesamtbetrag musste für die 15 Anteile bezahlt werden?

   b) Welcher Gewinn wäre bei einem Verkauf zu erwarten?