



Bibliothek des technischen Wissens

Horst Herr

Falko Wieneke

Bernd Mattheus

Technische Mechanik

Statik ■ Dynamik ■ Festigkeit

11., überarbeitete Auflage 2016

mit sehr vielen

Musteraufgaben (Lehrbeispielen),

Übungsaufgaben (Aufgaben mit vollständigen Lösungswegen im Anhang)

und

Vertiefungsaufgaben (Aufgaben mit Ergebnissen im Anhang)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 5021X

Autor (Hrsg.) bis zur 10. Auflage:

Horst Herr VDI, Dipl.-Ing., Fachoberlehrer 65779 Kelkheim im Taunus

Mitautoren:

Falko Wieneke Dipl.-Ing., Studiendirektor 45257 Essen

Bernd Mattheus Dr.-Ing. 45130 Essen

Lektorat:

Falko Wieneke

Lektor der 1. Auflage:

Armin Steinmüller, Dipl. Ing., Verlagslektor, 20251 Hamburg

Umschlaggestaltung:

braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagfotos:

Falko Wieneke; Vektor-Illustration: © amgun, Fotos: © anekoho und © 06photo – shutterstock.com

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern
Wiekreativ Designstudio, Uwe Wiegand, 59939 Olsberg

11. Auflage 2016

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

Diesem Buch wurden die neuesten DIN-Normen zugrunde gelegt. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass nur die DIN-Normen selbst verbindlich sind. Diese können in den öffentlichen DIN-Normen-Auslegestellen eingesehen oder durch die Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstraße 6, 10787 Berlin, bezogen werden.

ISBN 978-3-8085-5035-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: rkt, 42799 Leichlingen, www.rktypo.com

Druck: Tutte Druckerei & Verlagsservice GmbH, 94121 Salzweg/Passau

Vorwort

Man teile jede einzelne der Schwierigkeiten, die man lösen will, in so viele Teile wie möglich, und so müsste es möglich sein, sie zu lösen.
Descartes

Wer Maschinen und Anlagen konstruiert, baut oder betreibt, benötigt Kenntnisse aus der Technischen Mechanik. Innerhalb dieser Ingenieurwissenschaft, kurz mit TM bezeichnet, unterscheidet man die Teilgebiete Statik, Dynamik und Festigkeitslehre. Als Grundlagenfächer sind sie die Basis für das Verständnis des Maschinen- und Anlagenbaus und des Bauwesens. Die Technische Mechanik, ein auf die Lösung technischer Probleme angewandtes Teilgebiet der Physik, gilt in ihrer Handhabung als besonders schwierig. Für viele Studenten ist sie neben der Mathematik das größte Hindernis für einen erfolgreichen Abschluss der Studien. Ziel dieses Buches ist es, dem Lernenden zu helfen, die unumgänglichen Schwierigkeiten zu bewältigen, indem er begreift, dass die vielen Einzelheiten durch einige wenige Prinzipien geordnet werden, deren wiederholte Anwendung vom Leichten zum Schweren fortschreitend ihn befähigen, selbständig Aufgaben zu lösen.

Umfang, Auswahl und Darbietung der Lerninhalte orientieren sich an den Lehrplänen der Fachschulen für Technik (**Technikerschulen**), Fachrichtung Maschinenbau der Kultusministerien der Bundesländer. Da es sich um das Grundlagenwissen der Technischen Mechanik handelt, ist dieses Lehrbuch auch im Unterricht der **Technischen Gymnasien**, der **Fachoberschulen Technik** und für die **berufliche Fortbildung** einsetzbar. Den Studenten der Fachhochschulen oder Technischen Universitäten erleichtert das Durcharbeiten dieses Buches das Verständnis ihrer Vorlesungen. Für sie und alle anderen, die im **Selbststudium** alte Kenntnisse erneuern oder neue erwerben wollen, sind die Lektionen nach einem einheitlichen, auf der folgenden Seite beschriebenen Schema aufgebaut.

Der Beruf des Technikers verlangt es, in einer technischen Aufgabe das physikalische Problem zu erkennen und diesem eine mathematische Form zu geben, mit der gerechnet werden kann. Die Aufteilung des gesamten Stoffes in kurze, überschaubare Lektionen ermöglicht es, jeweils ein Problem in den Vordergrund zu stellen. Wo es sich anbietet, werden dabei Beispiele aus der Praxis des Maschinenbaus herangezogen. Eine Zeichnung stellt das Problem dar und aus den erkennbaren Zusammenhängen werden dann Berechnungsgleichungen und Grundlagenformeln entwickelt. Entsprechend der Zielsetzung dieses Buches wird auf die Methoden der höheren Mathematik verzichtet. Die ausgewählten Aufgaben variieren die Problemlösungsmöglichkeiten und führen zur Festigung der erworbenen Fertigkeiten und Kenntnisse.

Die vorliegende **11. Auflage** des Buches wurde im Vergleich zur 10. Auflage überarbeitet und aktualisiert. Die Gliederung der Hauptkapitel mit den Buchstaben A (Statik), B (Dynamik) und C (Festigkeitslehre) spiegelt auch die Schwerpunktthemen der **Technischen Mechanik** wieder. Durch die im Buch vielfältig aufgeführten Verweise zu den verschiedenen Kapiteln wird für den Lernenden eine Querverbindung zwischen den Kapiteln geschaffen.

Die 11. Auflage des Buches enthält eine Vielzahl an farbig gestalteten Bildern, die dem Lernenden die theoretischen Zusammenhänge anschaulich näher bringen. Zusätzliche Bilder aus der Praxis führen zu einem besseren Realitätsbezug. Angegebene Merksätze fassen die theoretischen Inhalte in einer kurzen Form zusammen. Formeln werden, wenn erforderlich, auch hergeleitet, damit ein besseres Verständnis für den Lernenden entsteht. Die hierbei verwendeten Formelzeichen richten sich nach den DIN-, EN- und ISO-Normen sowie der einschlägigen Literatur.

Das vorliegende Buch bietet dem Lernenden eine Vielzahl an **Musteraufgaben, Übungsaufgaben und Vertiefungsaufgaben** mit entsprechenden Lösungen in unterschiedlicher Tiefe. Der Lernende wird somit zu einer guten Einübung des Gelernten geführt.

Wir wünschen unseren Leserinnen und Lesern viel Freude beim Einstieg in die Technische Mechanik und bei der Anwendung der speziellen Gesetze auf die moderne Technik.

Hinweise, die zur Verbesserung und Weiterentwicklung dieses Buches beitragen, nehmen wir gerne unter der Verlagsadresse oder per E-Mail (lektorat@europa-lehrmittel.de) entgegen.

Zur Arbeit mit diesem Buch

Soll es **unterrichtsbegleitend** verwendet werden, findet der Lernende hier die im Unterricht erläuterten Erkenntnisse und Zusammenhänge und die daraus resultierenden Formeln in den thematisch ausgerichteten Lektionen. Während die Übungsaufgaben mit dem Lösungsanhang je nach Kenntnisstand der häuslichen Nacharbeit dienen, wählt der Dozent aus den Vertiefungsaufgaben diejenigen aus die seinen Intentionen entsprechen.

Beim **Selbststudium** ist es möglich, einige Lektionen, die nicht weiterführend sind, auszulassen. Sinnvoll aber ist es, jede Lektion, deren Inhalt man sich aneignen will, vollständig und in der gegebenen Reihenfolge durchzuarbeiten.

Die **Informationen (I)** befinden sich meist am Beginn der Lektionen, oft sind sie aber auch innerhalb der Lektion aufgeteilt. Die Erläuterungen der physikalisch-technischen Zusammenhänge führen in der Regel zu einer oder mehreren Formeln oder Konstruktionsverfahren.

Die Anwendung der erworbenen Kenntnisse erfolgt in **Musteraufgaben (M)**. Hier werden exemplarisch Problemstellungen aufgezeigt und ausführliche Lösungen vorgestellt, die einen möglichen Weg aufzeigen. In vielen Fällen sind alternative Lösungswege möglich.

Gegebenfalls werden in den Musteraufgaben noch spezielle Kenntnisse vermittelt.

Die darauf folgenden **Übungsaufgaben (Ü)** dienen der Wiederholung und Vertiefung sowie der Überprüfung des Gelernten durch den Studierenden.

Deshalb befinden sich **am Schluss des Buches ausführliche Lösungsgänge**. Diese Buchseiten sind mit einem **gelben Randdruck** gekennzeichnet.

Möchte der Lernende sein Wissen weiter vertiefen oder sich auf Prüfungen vorbereiten, löst er zweckmäßig die **Vertiefungsaufgaben (V)**.

Am **Schluss des Buches befinden sich die Ergebnisse dieser Vertiefungsaufgaben**. Diese Buchseiten sind mit einem **grünen Randdruck** gekennzeichnet.

Der Zweck dieses pädagogischen Prinzips I, M, Ü, V innerhalb jeder Lektion besteht darin, dass der Lernende in mehreren Stufen, d.h. mit einem zunehmenden Grad an Selbständigkeit, zum Lehrziel geführt wird. Deshalb musste nach meinem pädagogischen Verständnis auch auf die Lösungsgänge der Vertiefungsaufgaben zwingend verzichtet werden.

Die **Kombination aus Unterricht und Selbststudium**, z. B. in Abendkursen, findet in der Methodik dieses Lehrbuches eine Unterstützung durch die Verlegung von Unterrichtssequenzen in die Hausarbeit.

Das Buch ist in die Abschnitte

- A (Statik)**
- B (Dynamik)**
- C (Festigkeitslehre)**

unterteilt, und die Bezeichnung der Lektionen besteht aus einem Buchstaben und einer Zahl, und zwar vor den Überschriften der Lektionen, z. B.:

B17 **Lektion 17 im Abschnitt B**

Diese Kennzeichnung ermöglicht die Verkettung der Sachverhalte in der Technischen Mechanik durch ein besonderes Hinweissystem, z. B.:

(→ **C13**): Weitere Informationen im Abschnitt C, Lektion 13

In das Buch ist also gewissermaßen ein „**Fahrplan durch die Technische Mechanik**“ eingebaut. Dieser ermöglicht eine optimale Lehrbuchnutzung und lässt den Lernenden eher begreifen, dass, die Physik und im Speziellen die Technische Mechanik – trotz der vielen Teilgebiete und Richtungen – eine „**zusammenhängende**“ **Wissenschaft** ist, und wir hoffen, dass der pädagogische Wert seine Anerkennung findet.

Wir gehen davon aus, dass die vielen über das gesamte Buch verteilten „**Praxisbilder**“ bei den Lernenden einen zusätzlichen Motivationsschub bewirkt.

| | | |
|-----------------|--|-----------|
| A STATIK | | |
| A1 | Die Verknüpfung von Physik und Technik | 3 |
| 1.1 | Bedeutung der klassischen Physik für die Technik | 3 |
| 1.1.1 | Zweige und Entwicklungszeiträume der klassischen Physik | 3 |
| 1.2 | Bedeutung der „Mechanik der festen Körper“ für technische Problemlösungen | 4 |
| 1.2.1 | Teilgebiete der Technischen Mechanik | 4 |
| | • Statik | 4 |
| | • Kinematik | 5 |
| | • Kinetik | 6 |
| | • Dynamik | 6 |
| | • Festigkeitslehre | 6 |
| 1.3 | Lösungsmethoden der Statik | 7 |
| 1.4 | Zustandsform der Werkstoffe und Werkstoffeigenschaften | 8 |
| A2 | Kraft und Kraftmoment | 10 |
| 2.1 | Basisgrößen und abgeleitete Größen | 10 |
| 2.2 | Physikalische Größen der Statik | 10 |
| 2.2.1 | Kraft und Kraftmoment als physikalische Größen | 10 |
| | • Kräfteinheit | 10 |
| | • Gewichtskraft und die alte Kräfteinheit | 11 |
| | • Das Kraftmoment | 11 |
| 2.2.2 | Wirkungen der Kraft auf einen Körper | 12 |
| 2.2.3 | Kraft als Vektor und die Kraftmerkmale | 13 |
| | • Erweiterungssatz | 13 |
| | • Längsverschiebungssatz | 14 |
| | • Richtung einer Kraft im rechtwinkligen Koordinatensystem | 14 |
| A3 | Freiheitsgrade eines Körpers | 17 |
| 3.1 | Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene | 17 |
| 3.2 | Freiheitsgrade eines Körpers im Raum | 17 |
| A4 | Freimachen von Bauteilen | 18 |
| 4.1 | Wechselwirkungsgesetz | 18 |
| 4.2 | Freimachen | 18 |
| 4.2.1 | Regeln für das Freimachen von Bauteilen | 20 |
| A5 | Kräfte auf derselben Wirkungslinie | 24 |
| 5.1 | Hauptaufgaben der Statik | 24 |
| 5.1.1 | Die erste Hauptaufgabe der Statik | 24 |
| 5.1.2 | Die zweite Hauptaufgabe der Statik | 24 |
| 5.2 | Die zwei Kräftesysteme der Statik | 24 |
| 5.3 | Sonderfall des zentralen Kräftesystems: gemeinsame Wirkungslinie | 25 |
| 5.3.1 | Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden | 25 |
| 5.3.2 | Rechnerische Ermittlung der Resultierenden | 26 |
| A6 | Zusammensetzen von zwei Kräften, deren Wirkungslinien (WL) sich schneiden | 28 |
| 6.1 | Anwendung des Längsverschiebungssatzes | 28 |
| 6.2 | Der Parallelogrammsatz | 28 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| A7 | Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte | 32 |
| 7.1 | Die Richtungen beider Kraftkomponenten sind bekannt | 32 |
| 7.1.1 | Horizontal- und Vertikalkomponente | 32 |
| 7.2 | Größe und Richtung einer Kraftkomponente sind bekannt | 33 |
| 7.3 | Das Übertragen der Kraftrichtungen vom LP in den KP | 33 |
| A8 | Zusammensetzen von mehr als zwei in einem Punkt angreifenden Kräften | 38 |
| 8.1 | Lösung der Aufgabe mit mehreren Kräfteparallelogrammen | 38 |
| 8.2 | Lösung mittels Krafteck | 38 |
| A9 | Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik | 41 |
| 9.1 | Das geschlossene Krafteck bei Kräftegleichgewicht | 41 |
| 9.2 | Rechnerische Ermittlung der Resultierenden aus den Horizontal- und Vertikalkomponenten | 41 |
| A10 | Bestimmung unbekannter Kräfte im zentralen Kräftesystem | 45 |
| 10.1 | Kräftegleichgewicht im Zentralpunkt | 45 |
| 10.1.1 | Zeichnerische Ermittlung unbekannter Kräfte | 45 |
| 10.1.2 | Rechnerische Ermittlung unbekannter Kräfte | 46 |
| | • Die Vorzeichenregel | 46 |
| A11 | Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem | 49 |
| 11.1 | Nochmalige Definition des allgemeinen Kräftesystems | 49 |
| 11.2 | Wiederholte Konstruktion des Kräfteparallelogrammes | 50 |
| 11.3 | Verwendung von Zwischenresultierenden | 50 |
| A12 | Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden mit dem Seileckverfahren | 52 |
| 12.1 | Erforderlichkeit eines universellen Lösungsverfahrens zur zeichnerischen Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem | 54 |
| 12.2 | Zusammensetzen von zwei Kräften mit der Seileckkonstruktion | 54 |
| 12.2.1 | Lösungsverfahren | 54 |
| 12.2.2 | Konstruktionsbegründung | 55 |
| 12.2.3 | Begriffe | 55 |
| 12.3 | Zusammensetzen von mehr als zwei Kräften mit der Seileckkonstruktion | 55 |
| 12.3.1 | Lösungsschritte | 55 |
| 12.3.2 | Konstruktionsbegründung | 56 |
| A13 | Kräfte als Ursache einer Drehbewegung | 59 |
| 13.1 | Kraftmoment der Resultierenden | 59 |
| 13.2 | Drehrichtung und wirksamer Hebelarm | 59 |
| 13.2.1 | Drehsinn und Vorzeichen des Drehmomentes | 59 |
| 13.2.2 | Das resultierende Drehmoment | 60 |
| 13.2.3 | Erzeugung von Drehmomenten durch Schrägkräfte | 60 |
| 13.3 | Die zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik | 61 |
| 13.4 | Kräftepaar und der Parallelverschiebungssatz | 62 |
| A14 | Rechnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem | 65 |
| 14.1 | Der Momentensatz | 65 |
| 14.2 | Bestimmung der Resultierenden mit Hilfe des Momentensatzes | 65 |

| | | |
|------------|---|------------|
| A15 | Bestimmung der Auflagerkräfte beim Träger auf zwei Stützen | 68 |
| 15.1 | Rechnerische Bestimmung der Auflagerkräfte | 68 |
| 15.2 | Zeichnerische Bestimmung der Auflagerkräfte | 70 |
| A16 | Bestimmung von Schwerpunkten mittels Momentensatz | 73 |
| 16.1 | Der Schwerpunkt als Massenmittelpunkt | 73 |
| 16.2 | Linienschwerpunkte | 74 |
| 16.2.1 | Gerade Linie (Strecke) | 74 |
| 16.2.2 | Gerader Linienzug | 74 |
| 16.2.3 | Gekrümmte Linie | 76 |
| 16.3 | Flächenschwerpunkte | 76 |
| 16.3.1 | Schwerpunktlage von Einzelflächen | 76 |
| 16.3.2 | Schwerpunktlage von zusammengesetzten Flächen | 77 |
| 16.4 | Körperschwerpunkte | 79 |
| A17 | Bestimmung von Schwerpunkten mittels Seileckkonstruktion | 83 |
| 17.1 | Zeichnerische Bestimmung von Linienschwerpunkten | 83 |
| 17.2 | Zeichnerische Bestimmung von Flächenschwerpunkten | 84 |
| A18 | Gleichgewicht und Kippen | 85 |
| 18.1 | Die Gleichgewichtsarten | 85 |
| 18.2 | Die Standfestigkeit der Körper | 86 |
| 18.3 | Kippsicherheit | 86 |
| A19 | Regeln von Guldin | 89 |
| 19.1 | Volumenberechnung | 89 |
| 19.2 | Oberflächenberechnung (Mantelberechnung) | 90 |
| A20 | Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk | 90 |
| 20.1 | Fachwerkdefinition | 92 |
| 20.2 | Das ideale Fachwerk | 92 |
| 20.3 | Bedingung des statisch bestimmten Fachwerkes | 93 |
| 20.4 | Fachwerkformen | 93 |
| A21 | Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Krafteck | 95 |
| A22 | Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Cremonaplan | 98 |
| A23 | Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Culmann'schem Schnittverfahren | 100 |
| A24 | Rechnerische Stabkraftermittlung mittels Ritter'schem Schnittverfahren | 102 |
| A25 | Die Reibungskräfte | 105 |
| 25.1 | Äußere und innere Reibung | 105 |
| 25.2 | Haft- und Gleitreibung | 105 |
| 25.3 | Das Reibungsgesetz nach Coulomb | 106 |
| 25.3.1 | Die Reibungszahl | 106 |
| | • Die Einflussparameter der Reibungszahl | 107 |

| | | |
|------------|---|------------|
| A26 | Reibung auf der schiefen (geneigten) Ebene | 110 |
| 26.1 | Bestimmung der Reibungszahlen | 110 |
| 26.2 | Selbsthemmung | 111 |
| 26.2.1 | Selbsthemmungskriterien | 111 |
| 26.2.2 | Reibungsdreieck und Reibungskegel | 111 |
| 26.3 | Wirkkräfte auf der schiefen Ebene | 113 |
| 26.3.1 | Kraft parallel zur schiefen Ebene | 113 |
| | • Zugkraft bei Aufwärtsbewegung | 113 |
| | • Haltekraft bei Abwärtsbewegung | 114 |
| 26.3.2 | Kraft parallel zur Grundfläche der schiefen Ebene | 115 |
| | • Aufwärtsbewegung | 115 |
| | • Abwärtsbewegung | 116 |
| A27 | Reibung an Geradföhrungen | 119 |
| 27.1 | Flachföhrungen | 119 |
| 27.2 | Prismenföhrungen | 119 |
| 27.2.1 | Unsymmetrische Prismenföhrung | 120 |
| 27.2.2 | Symmetrische Prismenföhrung | 120 |
| 27.3 | Zylinderföhrungen | 121 |
| A28 | Reibung in Gleitlagern | 123 |
| 28.1 | Tragzapfen (Querlager) | 123 |
| 28.2 | Spurzapfen (Längslager) | 123 |
| A29 | Gewindereibung | 125 |
| 29.1 | Bewegungsgewinde | 125 |
| 29.1.1 | Schraube mit Flachgewinde | 125 |
| 29.1.2 | Schraube mit Spitzgewinde oder Trapezgewinde | 126 |
| 29.2 | Befestigungsgewinde | 128 |
| A30 | Seilreibung | 130 |
| A31 | Reibungsbremsen und Reibungskupplungen | 133 |
| 31.1 | Reibungsbremsen | 133 |
| 31.1.1 | Backenbremsen | 133 |
| 31.1.2 | Bandbremsen | 134 |
| | • Einfache Bandbremse | 135 |
| | • Die Summenbandbremse | 135 |
| | • Die Differentialbandbremse | 135 |
| 31.1.3 | Scheibenbremsen | 135 |
| 31.2 | Reibungskupplungen | 136 |
| A32 | Rollreibung | 138 |
| 32.1 | Der Rollwiderstand | 138 |
| 32.2 | Der Fahrwiderstand | 139 |
| 32.2.1 | Die Rollbedingung | 140 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| B | DYNAMIK | |
| B1 | Gleichförmige geradlinige Bewegung | 145 |
| 1.1 | Bewegungskriterien und Geschwindigkeit | 145 |
| 1.2 | Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit | 148 |
| B2 | Ungleichförmige geradlinige Bewegung | 151 |
| 2.1 | Merkmale einer ungleichförmigen Bewegung | 151 |
| 2.1.1 | Definition der Beschleunigung | 151 |
| 2.2 | Die ungleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung | 152 |
| 2.3 | Die gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung | 152 |
| 2.3.1 | Beschleunigung aus dem Ruhezustand | 152 |
| 2.3.2 | Gleichmäßige Beschleunigung bei vorhandener Anfangsgeschwindigkeit | 154 |
| 2.4 | Verzögerte Bewegungen | 155 |
| 2.4.1 | Die gleichmäßig verzögerte Bewegung | 155 |
| 2.5 | Freier Fall und senkrechter Wurf nach oben | 157 |
| 2.5.1 | Fallbeschleunigung | 157 |
| 2.6 | Weitere Formeln zur gleichmäßig beschleunigten (verzögerten) Bewegung | 159 |
| 2.6.1 | Gleichmäßige Beschleunigung mit $v_0 = 0$ und gleichmäßige Verzögerung mit $v_t = 0$ | 159 |
| 2.6.2 | Gleichmäßige Beschleunigung mit $v_0 \neq 0$ und gleichmäßige Verzögerung mit $v_t \neq 0$ | 159 |
| B3 | Zusammensetzung von Geschwindigkeiten | 162 |
| 3.1 | Vektoren und Skalare | 162 |
| 3.2 | Das Überlagerungsprinzip bei geradlinigen Bewegungen | 162 |
| 3.3 | Das Überlagerungsprinzip bei kreisförmigen Bewegungen | 163 |
| 3.4 | Die vektorielle Addition von Geschwindigkeiten | 164 |
| 3.5 | Führungs-, Relativ- und Absolutgeschwindigkeit | 166 |
| B4 | Freie Bewegungsbahnen | 168 |
| 4.1 | Der Grundsatz der Unabhängigkeit | 168 |
| 4.2 | Der schiefe Wurf | 168 |
| 4.2.1 | Zerlegen eines Vektors in seine Komponenten | 170 |
| 4.3 | Der waagerechte Wurf | 171 |
| B5 | Trägheit der Körper | 174 |
| 5.1 | Das erste Newton'sche Axiom | 174 |
| 5.2 | Das zweite Newton'sche Axiom | 175 |
| 5.2.1 | Die Krafteinheit | 176 |
| 5.2.2 | Die Gewichtskraft | 176 |
| B6 | Das Prinzip von d'Alembert | 179 |
| 6.1 | Erweitertes dynamisches Grundgesetz | 179 |
| 6.1.1 | Bewegung auf horizontaler Bahn | 179 |
| 6.1.2 | Bewegung auf vertikaler Bahn | 180 |
| 6.1.3 | Bewegung auf der schiefen Ebene | 182 |
| | • Die Steigung auf der schiefen Ebene | 182 |
| | • Kräfte bei beschleunigter Aufwärtsbewegung auf der schiefen Ebene | 183 |
| | • Kräfte bei beschleunigter Abwärtsbewegung auf der schiefen Ebene | 183 |

| | | |
|------------|---|------------|
| B7 | Kurzzeitig wirkende Kräfte | 186 |
| 7.1 | Die Bewegungsgröße (Impuls) | 186 |
| 7.1.1 | Die Impulsänderung eines Körpers | 186 |
| 7.1.2 | Die Impulserhaltung | 187 |
| 7.2 | Der Stoß | 188 |
| 7.2.1 | Der unelastische Stoß | 189 |
| 7.2.2 | Der elastische Stoß | 189 |
| 7.2.3 | Der halbelastische Stoß | 192 |
| 7.2.4 | Der schiefe Stoß | 192 |
| B8 | Arbeit und Energie | 193 |
| 8.1 | Die mechanische Arbeit | 193 |
| 8.1.1 | Die zeichnerische Darstellung der mechanischen Arbeit | 194 |
| 8.1.2 | Die Arbeitskomponente der Kraft | 194 |
| 8.1.3 | Der physikalische Unterschied zwischen mechanischer Arbeit und Drehmoment | 195 |
| 8.2 | Energiearten und Energiespeicherung | 195 |
| 8.3 | Die Gleichwertigkeit der mechanischen Arbeit und der mechanischen Energie | 196 |
| 8.3.1 | Hubarbeit und potentielle Energie | 196 |
| | • Arbeit auf der schiefen Ebene und die goldene Regel der Mechanik | 196 |
| 8.3.2 | Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie | 199 |
| | • Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie | 200 |
| 8.4 | Der Energieerhaltungssatz und Beispiele der Energieerhaltung | 200 |
| 8.4.1 | Energieerhaltung bei der Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie | 201 |
| 8.4.2 | Energieerhaltung beim wirklichen Stoß | 202 |
| 8.5 | Weitere Formen der mechanischen Arbeit | 203 |
| 8.5.1 | Die Kolbenarbeit | 203 |
| 8.5.2 | Die Federspannarbeit als Formänderungsarbeit | 204 |
| | • Federspannarbeit bei der Verformung aus ungespanntem Zustand | 204 |
| | • Federspannarbeit bei der Verformung einer Feder mit Vorspannung | 205 |
| B9 | Mechanische Leistung | 207 |
| 9.1 | Leistung als Funktion von Energie und Zeit | 207 |
| 9.2 | Leistung als Funktion von Kraft und Geschwindigkeit | 208 |
| B10 | Reibungsarbeit und Wirkungsgrad, Reibungsleistung | 210 |
| 10.1 | Reibungsarbeit | 210 |
| 10.2 | Energieumwandlung bei der Reibung | 211 |
| 10.2.1 | Umwandlung von Reibungsarbeit in Wärmeenergie | 211 |
| 10.2.2 | Umwandlung von Reibungsarbeit in Schwingungsenergie | 211 |
| 10.3 | Der mechanische Wirkungsgrad | 212 |
| 10.3.1 | Der Gesamtwirkungsgrad einer Maschinenanlage | 213 |
| 10.4 | Die Reibungsleistung | 214 |
| B11 | Wirkungsgrad wichtiger Maschinenelemente und Baugruppen | 216 |
| 11.1 | Gerade Führungen | 216 |
| 11.1.1 | Flachführungen | 216 |
| 11.1.2 | Symmetrische Prismenführung | 217 |
| 11.1.3 | Unsymmetrische Prismenführung | 217 |
| 11.1.4 | Zylinderführung | 217 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 11.2 | Schraubenwirkungsgrad | 218 |
| 11.2.1 | Flachgewinde | 218 |
| 11.2.2 | Spitz- und Trapezgewinde | 219 |
| B12 | Drehleistung | 222 |
| 12.1 | Rotationsbewegung | 222 |
| 12.2 | Drehzahl und Umfangsgeschwindigkeit | 223 |
| 12.3 | Berechnung der Drehleistung bei gleichförmiger Drehbewegung | 224 |
| 12.3.1 | Berechnung der Drehleistung aus Drehmoment und Drehzahl | 225 |
| B13 | Rotationskinematik | 227 |
| 13.1 | Bewegungszustände der Rotation | 227 |
| 13.1.1 | Die gleichförmige Drehbewegung | 227 |
| | • Winkelgeschwindigkeit | 227 |
| | • Die Umfangsgeschwindigkeit als Funktion der Winkelgeschwindigkeit | 228 |
| | • Die Drehleistung als Funktion der Winkelgeschwindigkeit | 228 |
| | • Der Drehwinkel bei gleichförmiger Rotation | 228 |
| 13.1.2 | Die gleichmäßig beschleunigte oder verzögerte Drehbewegung | 229 |
| | • Die Winkelbeschleunigung | 229 |
| 13.2 | Analogien zwischen Translation und Rotation | 230 |
| B14 | Rotationsdynamik | 234 |
| 14.1 | Die Fliehkraft | 234 |
| 14.1.1 | Berechnung der Fliehkraft | 234 |
| 14.2 | Coriolisbeschleunigung und Corioliskraft | 237 |
| B15 | Kinetische Energie rotierender Körper | 240 |
| 15.1 | Rotationsenergie als kinetische Energie | 240 |
| 15.2 | Das Trägheitsmoment | 241 |
| 15.2.1 | Das Trägheitsmoment einer Punktmasse | 241 |
| 15.2.2 | Das Trägheitsmoment einfacher Drehkörper | 242 |
| 15.2.3 | Trägheitsmomente weiterer wichtiger Drehkörper | 243 |
| 15.2.4 | Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper | 244 |
| | • Verschiebungssatz von Steiner | 245 |
| 15.2.5 | Reduzierte Masse | 246 |
| 15.2.6 | Der Trägheitsradius | 247 |
| 15.3 | Dynamisches Grundgesetz der Drehbewegung | 248 |
| 15.4 | Dreharbeit in Abhängigkeit von Drehmoment und Drehwinkel | 249 |
| 15.5 | Drehimpuls und Drehstoß | 250 |
| 15.5.1 | Die Drehimpuserhaltung (Drallerhaltung) | 250 |
| B16 | Übersetzungsverhältnis beim Riementrieb | 253 |
| 16.1 | Einfacher Riementrieb | 253 |
| 16.2 | Doppelter Riementrieb und Mehrfachriementrieb | 255 |
| B17 | Übersetzungen beim Zahntrieb und in Getrieben | 256 |
| 17.1 | Einfacher Zahntrieb | 256 |
| 17.2 | Doppelter Zahntrieb und Mehrfachzahntrieb | 256 |
| 17.2.1 | Die Bedeutung des Zwischenrades | 257 |

| | | |
|--|---|------------|
| 173 | Drehzahlen bei gestuften Schaltgetrieben | 258 |
| 174 | Drehzahlen bei stufenlosen Antrieben | 259 |
| 175 | Getriebewirkungsgrad in Abhängigkeit von Drehmoment und Übersetzungsverhältnis | 259 |
| B18 Kurbeltrieb | | 261 |
| 18.1 | Die Schubkurbel | 261 |
| 18.1.1 | Der Kolbenweg | 261 |
| | • Näherungsgleichung zur Berechnung des Kolbenweges | 262 |
| 18.1.2 | Die Kolbengeschwindigkeit | 262 |
| 18.1.3 | Die Kolbenbeschleunigung | 262 |
| 18.2 | Die Kurbelschleife | 262 |
| C FESTIGKEITSLEHRE | | |
| C1 Aufgabe der Festigkeitslehre | | 267 |
| 1.1 | Die drei Hauptaufgaben der Festigkeitslehre | 267 |
| 1.1.1 | Ermittlung der Bauteilabmessungen | 267 |
| 1.1.2 | Ermittlung der übertragbaren Kräfte und Momente | 267 |
| 1.1.3 | Werkstoffwahl | 267 |
| 1.2 | Der idealisierte Körper | 268 |
| 1.3 | Gültigkeitsbereich der elementaren Festigkeitslehre | 268 |
| C2 Spannung und Beanspruchung | | 269 |
| 2.1 | Äußere Kraft und die Beanspruchung durch innere Kräfte | 269 |
| 2.2 | Das Schneiden des Bauteiles zur Ermittlung der inneren Kraft und des inneren Moments... .. | 269 |
| 2.3 | Begriff und Ermittlung der Spannung | 270 |
| 2.3.1 | Normalspannungen | 270 |
| 2.3.2 | Schubspannungen | 271 |
| 2.4 | Elementarbeanspruchungen an stabförmigen Körpern | 271 |
| 2.5 | Zusammengesetzte Beanspruchungen | 272 |
| C3 Beanspruchung auf Zug oder Druck | | 273 |
| 3.1 | Die statische Beanspruchung | 273 |
| 3.2 | Beanspruchung auf Zug | 273 |
| 3.2.1 | Begriff der zulässigen Spannung | 274 |
| 3.3 | Beanspruchung auf Druck und gefährdeter Querschnitt | 275 |
| 3.4 | Beispiele für das Erkennen des gefährdeten Querschnitts | 276 |
| 3.4.1 | Ketten | 276 |
| 3.4.2 | Die Reißlänge | 277 |
| 3.4.3 | Auf Zug und Druck beanspruchte Schrauben | 278 |
| C4 Flächenpressung und Lochleibung | | 281 |
| 4.1 | Flächenpressung an ebenen Flächen | 281 |
| 4.2 | Flächenpressung an geneigten ebenen Flächen | 281 |
| 4.3 | Flächenpressung bei Gewinden | 283 |
| 4.4 | Flächenpressung an gewölbten Flächen und Lochleibung | 284 |
| 4.5 | Einflussgrößen auf die zulässige Flächenpressung | 286 |

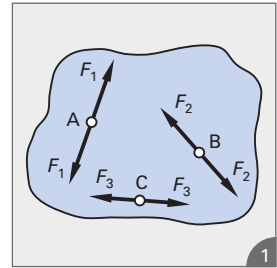
| | | |
|------------|---|------------|
| C5 | Beanspruchung auf Abscherung | 288 |
| C6 | Das Hooke'sche Gesetz für Zug und Druck | 292 |
| 6.1 | Die Kraft als Ursache von Verformungen | 292 |
| 6.2 | Arten der Formänderung eines Körpers | 292 |
| 6.2.1 | Die elastische Verformung | 293 |
| 6.2.2 | Die plastische Verformung | 293 |
| 6.3 | Das Gesetz von Hooke | 294 |
| 6.4 | Die Messung von Kräften | 295 |
| 6.4.1 | Kraftmessung aufgrund der beschleunigenden Wirkung | 295 |
| 6.4.2 | Kraftmessung aufgrund der verformenden Wirkung | 295 |
| 6.5 | Hooke'sches Gesetz und Bauteildimensionierung | 296 |
| 6.5.1 | Dehnung und Verlängerung | 296 |
| 6.5.2 | Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung | 297 |
| C7 | Querkontraktion | 301 |
| 7.1 | Definition der Querkontraktion | 301 |
| 7.2 | Zusammenhang zwischen Längsdehnung und Querdehnung | 301 |
| C8 | Belastungsgrenzen | 303 |
| 8.1 | Spannungs-Dehnungs-Diagramm | 303 |
| 8.2 | Die Grenzspannungen im σ, ε -Diagramm | 304 |
| 8.3 | Die drei verschiedenen Belastungsfälle | 304 |
| 8.3.1 | Belastungsfall I | 304 |
| 8.3.2 | Belastungsfall II | 305 |
| 8.3.3 | Belastungsfall III | 305 |
| 8.4 | Einfacher Sicherheitsbegriff und zulässige Spannungen | 306 |
| 8.4.1 | Die zulässige Spannung bei statischer Beanspruchung | 306 |
| 8.4.2 | Das Festlegen der Sicherheitszahl ν und Angaben über zulässige Spannungen | 306 |
| 8.4.3 | Einige wichtige Zusammenhänge zwischen verschiedenen Spannungen | 307 |
| C9 | Wärmespannung und Formänderungsarbeit | 310 |
| 9.1 | Wärmespannung | 310 |
| 9.1.1 | Einfluss der Temperatur auf das Werkstoffverhalten | 310 |
| 9.1.2 | Wärmedehnung metallischer Werkstoffe | 310 |
| 9.2 | Formänderungsarbeit | 312 |
| C10 | Verformung bei Scherung und Flächenpressung | 314 |
| 10.1 | Das Hooke'sche Gesetz für Scherbeanspruchung (Schub) | 314 |
| 10.2 | Die Hertz'schen Gleichungen | 315 |
| 10.2.1 | Pressung zwischen zwei Zylindern (Linienpressung) | 315 |
| 10.2.2 | Pressung zwischen zwei Kugeln (Punktpressung) | 316 |
| C11 | Auf Biegung beanspruchte Bauteile | 319 |
| 11.1 | Beanspruchungen, die oftmals in Verbindung mit der Biegung auftreten | 319 |
| 11.2 | Der Träger | 319 |
| 11.2.1 | Lagerung der Träger | 320 |
| 11.2.2 | Trägerbezeichnungen | 320 |
| | • Trägerbezeichnungen nach der Trägerlagerung | 320 |
| | • Trägerbezeichnungen nach der Bauart | 321 |
| 11.2.3 | Trägerbelastungen und Belastungssymbole | 321 |
| 11.2.4 | Der statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Träger | 321 |

| | | |
|------------|--|------------|
| C12 | Die Biegebeanspruchung | 323 |
| 12.1 | Abhängigkeit der Biegespannung vom Biegemoment | 323 |
| 12.2 | Abhängigkeit der Biegespannung von Form und Lage der Querschnittsfläche | 324 |
| 12.3 | Innere Kräfte und innere Momente bei Biegebeanspruchung | 324 |
| 12.4 | Vorzeichenregeln für Biegemomente und Querkräfte | 325 |
| 12.4.1 | Biegemomente | 325 |
| 12.4.2 | Querkräfte | 325 |
| 12.5 | Verteilung und Berechnung der Biegespannung | 325 |
| 12.6 | Zulässige Biegespannungen | 327 |
| 12.7 | Bedingungen für die Gültigkeit der Biegehauptgleichung | 329 |
| C13 | Rechnerische Ermittlung von Trägheits- und Widerstandsmomenten | 332 |
| 13.1 | Äquatoriale Trägheitsmomente | 332 |
| 13.2 | Das polare Trägheitsmoment | 332 |
| 13.3 | Der Verschiebungssatz von Steiner | 332 |
| 13.4 | Trägheitsmomente und Widerstandsmomente einiger technischer Querschnitte | 336 |
| 13.4.1 | Rechteckquerschnitt | 336 |
| 13.4.2 | Kreisquerschnitt | 336 |
| 13.4.3 | Dreieckquerschnitt | 336 |
| 13.5 | Trägheits- und Widerstandsmomente zusammengesetzter Flächen | 336 |
| C14 | Schiefe Biegung | 343 |
| 14.1 | Hauptachsen im biegebeanspruchten Querschnitt | 343 |
| 14.1.1 | Ermittlung der Hauptachsen und der Hauptträgheitsmomente | 344 |
| | • Rechnerische Ermittlung der Hauptträgheitsmomente | 344 |
| | • Zeichnerische Ermittlung der Hauptträgheitsmomente | 346 |
| 14.2 | Ermittlung der Biegespannung | 347 |
| 14.2.1 | Lastebene liegt in einer der Hauptachsen (einachsige Biegung) | 347 |
| 14.2.2 | Die Biegespannung bei zweiachsiger Biegung | 348 |
| | • Biegespannungen in symmetrischen Querschnitten | 348 |
| | • Biegespannungen in unsymmetrischen Querschnitten | 349 |
| C15 | Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Freitragler | 352 |
| 15.1 | Freitragler mit Einzellasten | 352 |
| 15.2 | Freitragler mit gleichmäßig verteilter Streckenlast | 356 |
| 15.3 | Freitragler mit gemischter Belastung | 358 |
| C16 | Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Träger auf zwei Stützen | 361 |
| 16.1 | Stützträger mit Einzellasten | 361 |
| 16.2 | Träger auf zwei Stützen mit vielen gleich großen Einzellasten | 362 |
| 16.3 | Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Streckenlast | 363 |
| 16.4 | Träger auf zwei Stützen mit Mischbelastung | 365 |
| C17 | Träger gleicher Biegespannung | 368 |
| 17.1 | Der Gedanke der wirtschaftlichen Konstruktion | 368 |
| 17.2 | Berechnung von Trägern gleicher Biegefestigkeit | 368 |
| 17.2.1 | Freitragler mit einer Einzellast am Trägerende | 368 |
| | • Rechteckquerschnitt mit konstanter Höhe und veränderlicher Breite | 369 |
| | • Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite und veränderlicher Höhe | 369 |

| | | |
|------------|--|------------|
| C18 | Verformung bei Biegebeanspruchung | 372 |
| 18.1 | Die Verformung im elastischen Bereich | 372 |
| 18.2 | Der Krümmungsradius der Biegelinie | 372 |
| 18.3 | Berechnung der Durchbiegung und des Neigungswinkels | 373 |
| 18.3.1 | Freiträger mit einer Einzellast am Trägerende | 373 |
| 18.3.2 | Träger auf zwei Stützen mit einer Einzellast in Trägermitte | 373 |
| 18.3.3 | Freiträger mit Streckenlast | 374 |
| 18.4 | Resultierende Durchbiegung | 374 |
| 18.4.1 | Resultierende Durchbiegung bei einachsiger Biegung | 374 |
| 18.4.2 | Resultierende Durchbiegung bei schiefer Biegung | 375 |
| C19 | Torsionseanspruchung | 378 |
| 19.1 | Drehmoment als Ursache der Torsion | 378 |
| 19.2 | Ermittlung des Torsionsmomentes | 378 |
| 19.3 | Berechnung der Torsionsspannung | 379 |
| 19.3.1 | Polares Widerstandsmoment für den Kreisquerschnitt | 380 |
| 19.3.2 | Polares Widerstandsmoment für den Kreisringquerschnitt | 380 |
| C20 | Verformung bei Torsion | 384 |
| 20.1 | Analogie zwischen Zug und Torsion | 384 |
| 20.2 | Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und Gleitmodul | 384 |
| 20.3 | Größe des Verdrehwinkels (Torsionswinkel) | 385 |
| C21 | Knickfestigkeit | 388 |
| 21.1 | Unterscheidung von Druckbeanspruchung und Knickbeanspruchung | 388 |
| 21.2 | Schlankheitsgrad und Einspannungsfälle | 388 |
| C22 | Knickspannung | 390 |
| 22.1 | Definition der Knickspannung | 390 |
| 22.2 | Ermittlung der Knickkraft bei elastischer Knickung | 390 |
| C23 | Unelastische Knickung (Tetmajerknickung) | 392 |
| 23.1 | Grenzschlankheitsgrad | 392 |
| 23.2 | Knickspannung bei unelastischer Knickung | 392 |
| C24 | Knickstäbe im Stahlbau | 396 |
| 24.1 | Normenwerk | 396 |
| 24.2 | Besonderheiten bei der Verwendung von Formelzeichen und Nebenzeichen | 396 |
| 24.3 | Arten der Knickung gemäß DIN 18800 | 396 |
| 24.4 | Tragsicherheitsnachweis mit dem Kappa-Verfahren (κ -Verfahren) | 397 |
| C25 | Beanspruchung auf Biegung und Zug oder Druck | 398 |
| C26 | Beanspruchung auf Zug und Schub, Druck und Schub, Biegung und Schub | 402 |
| C27 | Beanspruchung auf Biegung und Torsion | 404 |
| C28 | Dauerfestigkeit, Schwellfestigkeit, Wechselfestigkeit | 407 |
| 28.1 | Dauerstandfestigkeit | 407 |
| 28.2 | Schwellfestigkeit | 407 |
| 28.3 | Wechselfestigkeit | 407 |

| | | |
|--|--|------------|
| C29 | Ermittlung der Dauerfestigkeit | 409 |
| 29.1 | Gewalt- und Dauerbruch | 409 |
| 29.2 | Ermittlung von Schwell- und Wechselfestigkeit | 409 |
| 29.3 | Konstruktion des Dauerfestigkeitsschaubildes | 411 |
| 29.4 | Zulässige Spannungen, erweiterter Sicherheitsbegriff | 413 |
| C30 | Gestaltfestigkeit | 414 |
| 30.1 | Dauerfestigkeit und Bauteilgröße | 414 |
| 30.2 | Dauerfestigkeit und Bauteiloberfläche | 414 |
| 30.3 | Dauerfestigkeit und Bauteilform | 414 |
| 30.3.1 | Kerbwirkung | 414 |
| 30.3.2 | Berechnung der Kerbwirkung | 415 |
| 30.4 | Gestaltfestigkeit in Abhängigkeit von Bauteilgröße, Bauteilform und Bauteiloberfläche | 416 |
| C31 | Experimentelle Spannungsanalyse | 419 |
| 31.1 | Messung von Spannungen am fertigen Bauteil | 419 |
| 31.2 | Spannungsanalyse mittels Dehnungsmessstreifen | 419 |
| 31.3 | Spannungsanalyse mittels Spannungsoptik | 420 |
| 31.4 | Spannungsanalyse mittels Finite-Elemente-Methode | 421 |
| Lösungsgänge und Lösungen zu den Übungsaufgaben | | 453 |
| Ergebnisse der Vertiefungsaufgaben | | 491 |
| Sachwortverzeichnis | | 511 |
| Griechisches Alphabet | | 520 |
| Römische Ziffern | | 520 |

- V 7 An welchen Gegenständen des täglichen Gebrauchs wird die Wirkung
 - a) durch ein Drehmoment,
 - b) durch ein Biegemoment sichtbar?
- V 8 Nach welchem Kriterium wird Ihrer Meinung nach der Kräftemaßstab KM festgelegt?
- V 9 Nehmen Sie zwei Kräfte Ihrer Wahl aus dem System des nebenstehenden **Bildes 1** heraus, und fügen Sie zwei andere Kräfte hinzu, ohne das Kräftegleichgewicht zu verändern.
- V 10 Es ist ein KM: 1 cm \cong 250 N vorgeschrieben. Welche Länge hat dann der Kraftpfeil einer Kraft $F = 1371$ N?
- V 11 Zeichnen Sie eine Kraft $F = 1350$ N mit dem Winkel $\alpha = 28^\circ$ gegen die Horizontale, und zwar nach rechts oben ansteigend.
KM: 1 cm \cong 200 N.
- V 12 Nennen Sie einige typische Teile von technischen Gerätschaften, die man von ihrer Konstruktion und von ihrem Verwendungszweck her gesehen als Kraftangriffspunkt bezeichnen kann.
- V 13 Erläutern Sie das Zustandekommen der Einheit Nm für das Kraftmoment.
- V 14 Ein Kraftmoment wird in einer Rechnung mit dem Formelzeichen M_t bezeichnet.
 - a) Wie heißt ein solches Kraftmoment und was bewirkt es?
 - b) Welches andere Formelzeichen lässt die **DIN 1304** „Formelzeichen“ noch zu?
 - c) Nennen Sie Maschinenteile oder Teile technischer Gerätschaften, die zwecks Aufnahme solcher Kraftmomente konstruiert sind.



Großkugellager
des Maschinenbauunternehmens
INA-Schaeffler

A3 Freiheitsgrade eines Körpers

Verschiebt man mit Hilfe einer Kraft einen Körper, dann nimmt man Einfluss auf seine Lage, d. h. auf den Ort, an dem sich der Körper befindet. Dieser Sachverhalt wird im Teilgebiet Dynamik (\rightarrow **B1 bis B4**) eingehend betrachtet. Dort lernen Sie, dass bei den Bewegungen wie folgt unterschieden wird:

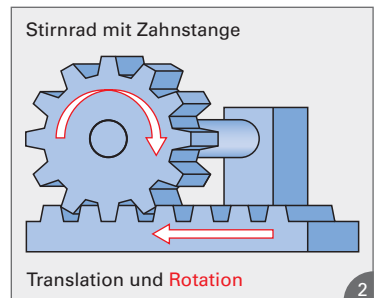
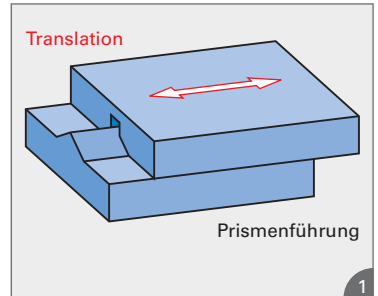
- Translation \rightarrow geradlinige Bewegung
- Rotation \rightarrow Drehbewegung

Voraussetzung für solche Bewegungen ist allerdings, dass es für den Körper Bewegungsmöglichkeiten gibt. Bei der im **Bild 1** dargestellten Prismenführung gibt es z. B. nur eine **Bewegungsmöglichkeit**, die Hin- und Herbewegung, also eine **Translationsbewegung**.

Nur eine Bewegungsmöglichkeit liegt auch bei dem im **Bild 2** dargestellten Stirnrad vor. Dieses führt eine **Rotationsbewegung** aus, verursacht durch ein **Drehmoment**.

Jede Bewegungsmöglichkeit eines Körpers wird als **Freiheitsgrad** bezeichnet.

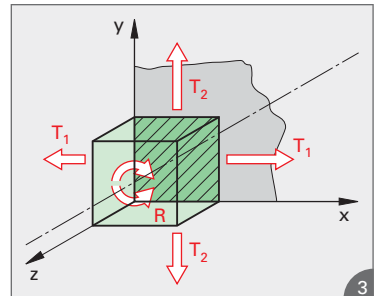
Ein Körper hat demzufolge ebensoviele Freiheitsgrade wie er Bewegungsmöglichkeiten hat. In den beiden **Bildern 1 und 2** liegt also jeweils nur ein Freiheitsgrad vor.



3.1 Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene

Wenn man voraussetzt, dass der im **Bild 3** dargestellte Körper die Ebene x-y (gerasterte Fläche) stets genau berührt, dann hat der Körper nur die Bewegungsmöglichkeiten T_1 und T_2 (Translationen) sowie R (Rotation). Man kann sich also jede beliebige Bewegung in der Ebene aus den Einzelbewegungen T_1 , T_2 und R , die in verschiedenen Zeiten oder gleichzeitig ablaufen können (\rightarrow **B2**) zusammengesetzt denken. Bewegungsmöglichkeiten bestehen also in x- und y-Richtung und um die z-Achse.

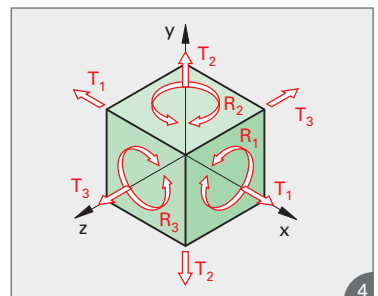
In der Ebene hat ein Körper drei Freiheitsgrade.



3.2 Freiheitsgrade eines Körpers im Raum

Jede beliebige Bewegung eines Körpers im Raum kann man sich aus den Einzelbewegungen T_1 , T_2 , T_3 und R_1 , R_2 , R_3 (**Bild 4**) zusammengesetzt denken. Somit:

Im Raum hat ein Körper sechs Freiheitsgrade.



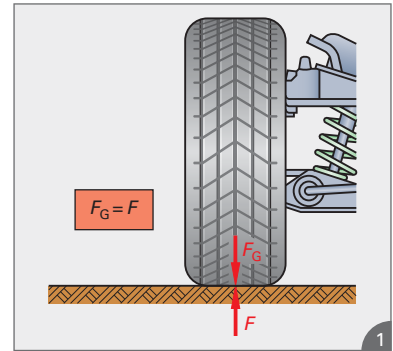
- Ü 1 Wie kann die Lage eines Körpers verändert werden? Was wird vorausgesetzt?
- Ü 2 Wie viele Freiheitsgrade hat der Planschlitten einer Spitzendrehmaschine, bezogen auf das Drehmaschinenbett?
- Ü 3 Nennen Sie die maximale Anzahl von Einzelbewegungen, auf die sich eine beliebige Bewegung zurückführen lässt.
Wie viele Freiheitsgrade können demzufolge vorliegen?

A4 Freimachen von Bauteilen

4.1 Wechselwirkungsgesetz

Viele Erfahrungen des täglichen und beruflichen Lebens zeigen, dass beim Wirken einer Kraft auf einen Körper von diesem eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung auf den Körper zurückwirkt.

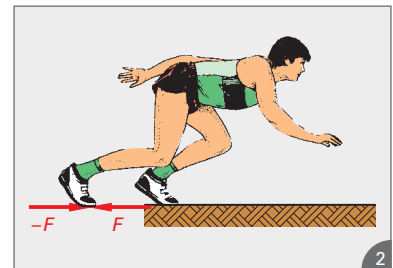
Beim Stehen auf dem Fußboden oder beim Sitzen auf einem Stuhl wirkt das Körpergewicht, also die **Gewichtskraft** F_G auf eine Unterlage. Von dieser wirkt aber, gewissermaßen als Reaktion, eine gleich große **Gegenkraft** auf den Körper zurück. Dieser Sachverhalt ist im **dritten Newton'schen Axiom** formuliert und wird auch als **Wechselwirkungsgesetz** bezeichnet. Begründet wird dies dadurch, dass zwischen der wirkenden Kraft (**Aktionskraft**) und der zurückwirkenden Kraft (**Reaktionskraft** oder **Gegenkraft**) eine Wechselwirkung besteht. Dies ist am Beispiel eines Pkw-Vorderrades (**Bild 1**) gezeigt. Es ist zu erkennen:



Wirkung = Gegenwirkung
Kraft = Gegenkraft
Aktion = Reaktion
Aktionskraft = Reaktionskraft

Kraft und Gegenkraft wirken an verschiedenen Körpern.

Das dritte Newton'sche Axiom wird auch als **Prinzip von actio und reactio** bezeichnet. Es ist ein grundlegendes Prinzip der Statik und soll deshalb an einem weiteren Beispiel (**Bild 2**) erläutert werden. Dieses Bild zeigt einen Läufer beim Tiefstart. Er wirkt mit einer Kraft F auf den Boden der Laufbahn, und der Boden wirkt mit der gleich großen Kraft $-F$ auf den Läufer zurück. Dabei ist $-F$ eine **Reibungskraft** (→ A25 bis A32), die z. B. auf einer Eisfläche kaum entstehen könnte. Der Vorgang im **Bild 2** ließe sich dann nur mit Hilfe von Spikes realisieren. Das Wechselwirkungsgesetz lautet also wie folgt:

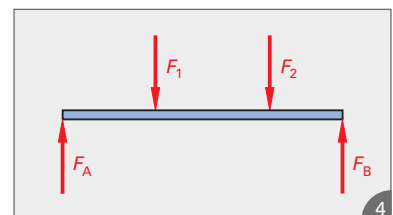


Wirkt von einem Körper eine Kraft F auf einen zweiten Körper, dann wirkt gleichzeitig eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft vom zweiten Körper auf den ersten Körper zurück.

4.2 Freimachen

Das Wechselwirkungsgesetz ist auf alle sich berührenden Körper – bei technischen Gerätschaften und Maschinen werden Körper meist als **Bauteile** bezeichnet – anwendbar, und es ist bereits bekannt, dass der Konstrukteur die wirkenden Kräfte als **Belastungskräfte** und die Reaktionskräfte als **Stützkräfte** bezeichnet. Dies wurde bereits im **Bild 4/7** gezeigt, und dieses Beispiel einer belasteten Brücke ist nochmals im **Bild 3** dargestellt. Ausgehend von den bekannten Belastungskräften werden mit Hilfe der **Gesetze der Statik** die Stützkräfte (**Bild 4**) ermittelt, so wie dies bereits beschrieben wurde (→ A1.3). Am Beispiel der Brücke ist zu erkennen:

Sowohl die Aktionskräfte (Belastungskräfte) als auch die Reaktionskräfte (Stützkräfte) greifen am Bauteil an und belasten dieses.



Um eine Aussage über die Bauteilabmessungen machen zu können, müssen alle auf das Bauteil wirkenden Kräfte, also neben den Aktionskräften auch die Reaktionskräfte, bekannt sein.

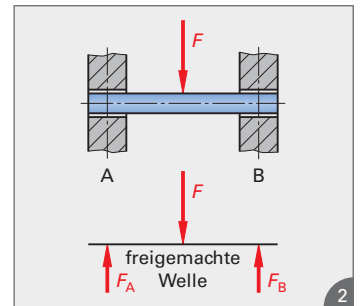
Bild 1 soll nochmals den Unterschied zwischen Belastungskräften und Stützkraften verdeutlichen. Manchmal ist auch eine begrifflich eindeutige Zuordnung schwer möglich. Dies ist deutlich an der zweiten Stütze von rechts zu erkennen: Die Fahrbahn erzeugt oben an der Stütze eine Belastungskraft, die Stütze reagiert mit einer Stützkraft von unten auf die Fahrbahn zurück. Das von der Stütze aufgenommene Fahrbahngewicht plus dem Stützengewicht wirken als Belastungskraft auf den Bogen und der Bogen wirkt mit einer entsprechenden Stützkraft zurück auf die Stütze.



Sankt-Gallen Fürstenlandbrücke

© Schlierner – Fotolia.com

Im Maschinen- und Anlagenbau sind die Belastungs- und Stützkraften meist einfacher zu erkennen. Dies wird am Beispiel einer Wellenlagerung (**Bild 2**) deutlich. Die Belastungskraft F (Aktionskraft) ruft die Lagerkräfte F_A und F_B (Reaktionskräfte) hervor. Ein weiteres Beispiel zeigen die **Bilder 3/18 und 4/18**. Es ist zu erkennen, dass für die Berechnung des Bauteils nur alle angreifenden Kräfte, nicht aber die tragenden Bauteile erforderlich sind. Man ersetzt also die tragenden Bauteile durch die dort wirkenden Kräfte und bezeichnet dies als **Freimachen der Bauteile**.



Freimachen bedeutet, dass man alle das Bauteil tragenden Teile, wie Lager, Stützen, Einspannungen etc. durch die von diesen auf das Bauteil wirkenden Reaktionskräfte ersetzt.

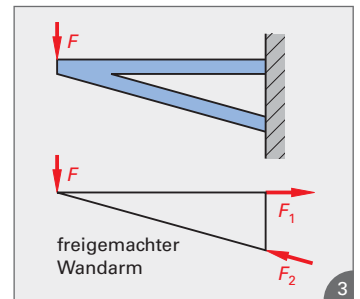
Dies wird im **Bild 3** durch ein weiteres Beispiel verdeutlicht.

Bild 4 zeigt, dass man beim Freimachen am besten in mehreren Schritten vorgeht. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge dies geschieht, z. B. könnte es wie folgt geschehen:

Schritt 1: Hebel wird vom Lager freigemacht

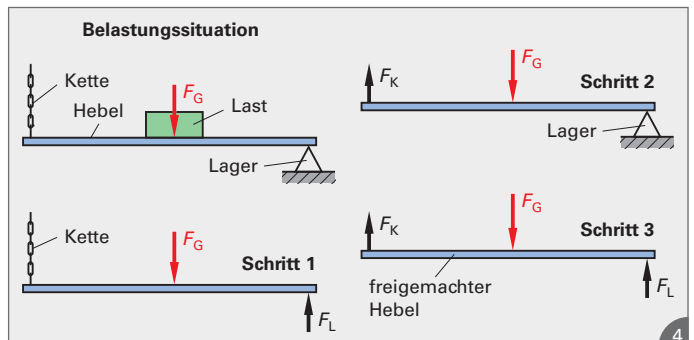
Schritt 2: Hebel wird von der Kette freigemacht

Schritt 3: Zusammenfassung der Schritte 1 und 2, d. h. dass der Hebel vollkommen freigemacht ist.

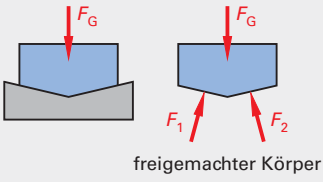
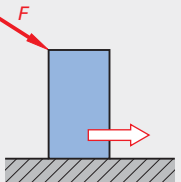
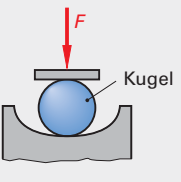
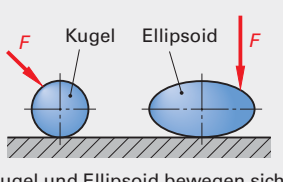
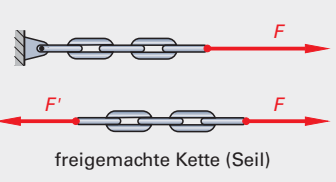
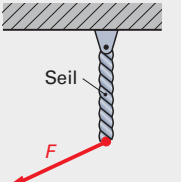
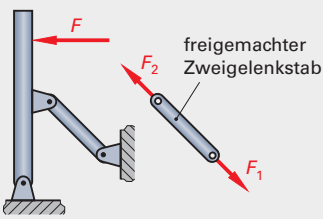
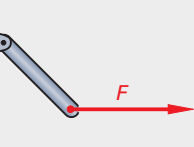
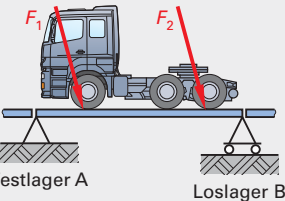
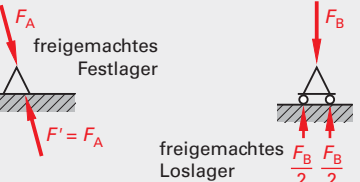


F_G ist eine Aktionskraft, F_K und F_L sind Reaktionskräfte. Es ist zu erkennen, dass Reaktionskräfte nur an den Stellen des freizumachenden Bauteils angreifen können, wo sich dieses mit anderen Bauteilen berührt. Dabei gilt als vereinbart:

Beim Freimachen wird der Angriffspunkt, die (ungefähre) Richtung der Wirkungslinie WL und der Richtungssinn (z. B. nach oben oder unten) der Reaktionskräfte, **nicht (!!!)** aber die Größe (Betrag) der Kraft ermittelt. Wichtige **Regeln für das Freimachen** von Bauteilen sind auf der nächsten Seite zusammengefasst.



4.2.1 Regeln für das Freimachen von Bauteilen

| Form des Bauteils und Regeln für das Freimachen: | Kraftübertragung in Wirkrichtung der Kraft möglich: | Kraftübertragung ist so nicht möglich: |
|---|--|---|
| <p>Ebene Flächen</p> <p>Ebene Flächen können nur senkrechte Reaktionskräfte erzeugen, d.h. es können nur senkrecht zu ihnen gerichtete Kräfte übertragen werden.</p> |  <p>freigemachter Körper</p> |  <p>Bei Überwindung der Reibungskraft rutscht der Körper.</p> |
| <p>Gewölbte Flächen</p> <p>Gewölbte Flächen erzeugen im Berührungspunkt mit anderen Körpern senkrechte Reaktionskräfte. Diese wirken in Richtung des Krümmungsradius (Radialkräfte)</p> |  <p>freigemachte Kugel</p> |  <p>Kugel und Ellipsoid bewegen sich.</p> |
| <p>Ketten und Seile</p> <p>Ketten und Seile können Kräfte nur in Spannrichtung übertragen. Die übertragenen Kräfte können nur Zugkräfte sein.</p> |  <p>freigemachte Kette (Seil)</p> |  <p>Seile bzw. Ketten werden in Kraftrichtung ausgelenkt.</p> |
| <p>Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)</p> <p>Zweigelenkstäbe (Pendelstützen) nehmen nur Zug- oder Druckkräfte in Richtung der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte auf.</p> |  <p>freigemachter Zweigelenkstab</p> |  <p>Der Pendelstab bewegt sich so lange, bis die Wirkungslinie der Kraft F durch beide Gelenkpunkte geht.</p> |
| <p>Loslager und Festlager</p> <p>Bild 9 zeigt eine belastete Brücke. Horizontal- oder Schrägkräfte entstehen z.B. beim Anfahren. Damit sich die Brücke in waagerechter Richtung frei ausdehnen kann (z.B. auch bei Erwärmung) muss auf einer Seite ein Loslager sein. Dieses ist horizontal verschiebbar. Auf der anderen Seite lagert die Brücke auf einem Festlager. Dieses verhindert die Bewegung der gesamten Brücke in waagerechter Richtung. Aus der Konstruktion beider Lager (unbeweglich und in waagerechter Richtung beweglich) ergibt sich entsprechend Bild 10:</p> <p>Loslager nehmen nur Kräfte in senkrechter Richtung zum Lager auf. Festlager können Kräfte in jeder beliebigen Richtung aufnehmen.</p> |  <p>Festlager A Loslager B</p>  <p>freigemachtes Festlager $F'_A = F_A$</p> <p>freigemachtes Loslager $\frac{F_B}{2}$ $\frac{F_B}{2}$</p> | |

- M 2 Ein Prägwerkzeug wird gemäß **Bild 1/128** zwecks Funktionsprüfung provisorisch in einer Handpresse mit zwei Maschinenschrauben M 12 kraftschlüssig eingespannt. Prägekraft $F = 8 \text{ kN}$. Berechnen Sie
- die erforderliche axiale Schraubenkraft F_S , wenn mit einer 1,5-fachen Sicherheit gegen Rutschen gearbeitet werden soll,
 - das Gewindereibungsmoment,
 - das Auflagereibungsmoment zwischen Mutter und der Berührungsfläche,
 - das gesamte Anzugsmoment für die Mutter (μ und μ_G aus **Bild 1/128**).

Lösung:

- a) Als Gesamtreibungskraft muss $F_R = 1,5 \cdot F$ erzeugt werden. Davon hat jede Schraube die Hälfte zwischen den beiden Platten zu bewirken. Somit:

$$\frac{F_R}{2} = \frac{1,5 \cdot F}{2} = \mu \cdot F_S \longrightarrow F_S = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot \mu} = \frac{1,5 \cdot 8 \text{ kN}}{2 \cdot 0,12} = 50 \text{ kN}$$

- b) $M_{RG} = F_S \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \tan(\alpha + \rho')$; Gewindetabelle: $d_2 = 10,863 \text{ mm}$; $\beta = 60^\circ$; $P = 1,75 \text{ mm}$.

$$\mu' = \tan \rho' = \frac{\mu_G}{\cos \beta/2} = \frac{0,12}{\cos 30^\circ} = \frac{0,12}{0,866} = 0,1386 \longrightarrow \rho' = 7,89^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{P}{\pi \cdot d_2} = \frac{1,75 \text{ mm}}{\pi \cdot 10,863 \text{ mm}} = 0,0513 \longrightarrow \alpha = 2,94^\circ$$

$$M_{RG} = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot \tan(2,94^\circ + 7,89^\circ) = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot \tan 10,83^\circ$$

$$M_{RG} = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot 0,1913 = 51,95 \text{ KNmm} = 51,95 \text{ Nm}$$

- c) $M_{Ra} = F_S \cdot \mu \cdot r_a$ Sechskantmutter: $r_a = 0,7 \cdot d = 0,7 \cdot 12 \text{ mm} = 8,4 \text{ mm}$

$$M_{Ra} = 50 \text{ kN} \cdot 0,12 \cdot 8,4 \text{ mm} = 50,4 \text{ kNmm} = 50,4 \text{ Nm}$$

- d) $M_{Rges} = M_{RG} + M_{Ra} = 51,95 \text{ Nm} + 50,4 \text{ Nm} = 102,35 \text{ Nm}$

- Ü 1 In einer Stellschraube mit dem metrischen ISO-Feingewinde M 20 x 1 (Nenndurchmesser $d = 20 \text{ mm}$, Steigung $P = 1 \text{ mm}$) wirkt eine Kraft $F = 5 \text{ kN}$ in axialer Richtung. Berechnen Sie das Gewindereibungsmoment beim Anziehen, wenn für geschliffene Gewinde mit $\mu = 0,08$ gerechnet werden kann.

- Ü 2 Rein festigkeitsmäßig wird bei einer Transportspindel ein Kernquerschnitt von 80 cm^2 benötigt.
- Ermitteln Sie aus der Gewindetabelle das erforderliche eingängige Trapezgewinde.
 - Liegt bei $\mu = 0,08$ Selbsthemmung vor?
 - Welches Gewindereibungsmoment ist beim Senken vorhanden, wenn die axiale Spindelkraft $F = 800 \text{ kN}$ beträgt?

- Ü 3 Wie unterscheidet sich Gewindereibung von Auflagereibung?

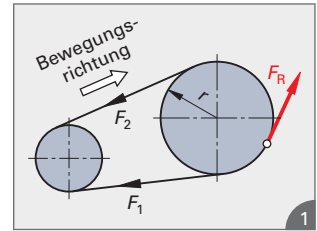
- Ü 4 Wie kann das Auflagereibungsmoment bei gegebener axialer Schraubenkraft beeinflusst werden?

- V 1 a) Übungsaufgabe Ü 1 ist für ein metrisches ISO-Gewinde M 20 bei sonst gleichen Werten durchzurechnen.
b) Wie groß ist für diesen Fall das Auflagereibungsmoment M_{Ra} , wenn für die Auflagefläche ebenfalls mit $\mu = 0,08$ gerechnet wird, und zwar bei Verwendung einer Innensechskantschraube mit $r_a = 0,5 \cdot$ Gewindenennendurchmesser.

- V 2 Welche Handkraft ist bei Vertiefungsaufgabe V 1 erforderlich, wenn ein Schraubenschlüssel mit einer wirksamen Hebellänge von 300 mm zur Verfügung steht?

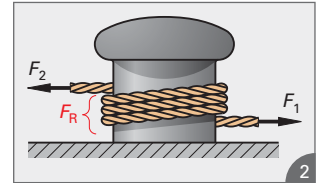
A30 Seilreibung

In **Bild 1** ist ein einfacher **Riemetrieb** dargestellt. Die Übertragung des Drehmomentes erfolgt durch das Wirken der Reibungskraft F_R zwischen den Riemenscheiben und dem Treibriemen. Stets dann, wenn ein Seil (Schnur), ein Band oder auch ein Riemen um einen Zylinder gespannt ist und so auf diesen Zylinder eine Kraft übertragen wird, spricht man von der **Seilreibung**, und aus **Bild 1** ist zu ersehen:



Die Seilreibungskraft tritt tangential am Zylinder auf und bewirkt die Übertragung eines Drehmomentes.

Als weiteres Beispiel der Seilreibung betrachten wir einen Poller (**Bild 2**). Hierrunter versteht man einen kurzen Stahlzylinder, der üblicherweise an der Anlegestelle von Schiffen befestigt ist.



Legt man ein Seil mit einigen Windungen um einen solchen Poller, so ist es mit dieser Anordnung einer Person möglich, sehr große Zugkräfte – vom angelegten Schiff erzeugt – zu halten.

Sowohl in **Bild 1** als auch in **Bild 2** herrscht Kräftegleichgewicht, und zwar ist: $F_1 = F_2 + F_R$

Das Beispiel des Pollers zeigt, dass die **übertragbare Seilkraft** F_1 von der Anzahl der um den Poller gelegten Windungen abhängt. Dabei ist F_2 die **Haltekraft**. Man kann also sagen:

Die übertragbare Seilkraft ist umso größer, je größer der Seilumschlingungswinkel um den Zylinder ist.

Eine Versuchsanordnung wie im **Bild 3** dargestellt, soll dies verdeutlichen. Um die jeweils gleiche Scheibe ist ein Seil mit verschieden großem **Umschlingungswinkel** α gelegt. Unter der Voraussetzung, dass F_2 die Haltekraft ist, und somit im Falle eines Rutschens eine Bewegung des Riemen in die Richtung von F_1 erfolgt, kann das Folgende vorausgesetzt werden:

Da F_R immer der Gleitrichtung entgegen gerichtet ist, muss F_R in die gleiche Richtung wie F_2 wirken.

Somit gilt auch hier:

$$F_1 = F_2 + F_R \quad \text{d. h. } F_1 > F_2$$

Dabei wird festgestellt, dass die zu haltende Kraft F_1 von der Haltekraft F_2 und vom Umschlingungswinkel α abhängt.

Da die übertragbare Kraft auch von der Materialpaarung, d. h. von der Reibungszahl μ abhängt, muss sein:

übertragbare Seilkraft in N

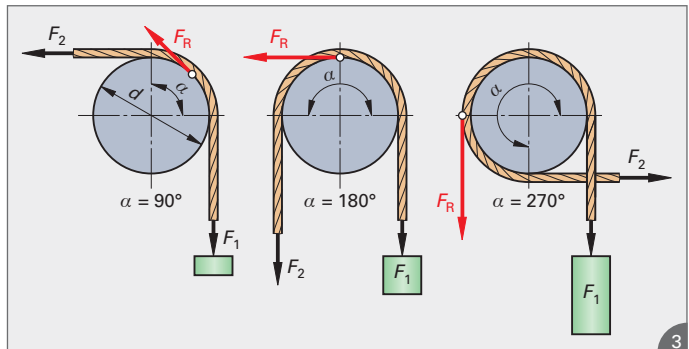
$$F_1 = f(F_2, \mu, \alpha)$$

1

übertragbare Seilkraft in N

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$

2



Aus diesem gedanklichen Ansatz hat der deutsche Physiker und Ingenieur J. A. **Eytelwein** (1765 bis 1849) eine Gleichung entwickelt, die **Eytelwein'sche Gleichung** (Gleichung 2).

Der von ihr beschriebene Sachverhalt ist das **Seilreibungsgesetz**. Darin ist:

e Basis des natürlichen Logarithmus = 2,718...

(Euler'sche Zahl)

μ Reibungskoeffizient zwischen Seil und Zylinder (Scheibe)

α Umschlingungswinkel im Bogenmaß

Im **Hebezeugbau** ist es üblich, mit Tabellen zu arbeiten, die **$e^{\mu\alpha}$ -Werte** enthalten. Man kann diese Werte aber auch sehr leicht mit einem Taschenrechner ermitteln.

Mit $F_1 = F_2 + F_R$ ergibt sich $F_R = F_1 - F_2 = F_2 \cdot e^{\mu\alpha} - F_2$. Somit ergibt sich durch Ausklammern von F_2 :

Seilreibungskraft in N

$$F_R = F_2 \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$$

1

Aus Gleichung 2/130 ergibt sich $F_2 = F_1/e^{\mu\alpha}$. Setzt man dies in Gleichung 1 ein, dann ergibt sich eine weitere Gleichung 2 für die Berechnung der Seilreibungskraft.

Seilreibungskraft in N

$$F_R = F_1 \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$$

2

Multipliziert man noch die Seilreibungskraft F_R mit dem Zylinder- bzw. Scheibenradius $r = d/2$, dann hat man eine Berechnungsgleichung 3 für das Seilreibungsmoment.

Seilreibungsmoment in Nm

$$M_R = F_R \cdot \frac{d}{2}$$

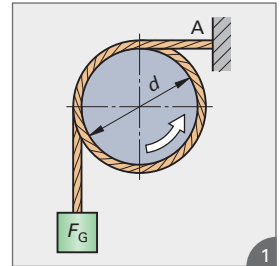
3

| | |
|-------|-----|
| F_R | d |
| N | m |

M 1

Gemäß **Bild 1** ist um einen Zylinder ein Seil geschlungen. Die Anzahl der Seilwindungen beträgt $n = 2,25$, und die Reibungszahl ist $\mu = 0,35$.

- Welche Kraft wird vom Seil in die Verankerung A übertragen, wenn sich der Zylinder in die angegebene Richtung dreht und wenn $F_G = 2 \text{ kN}$ ist?
- Wie groß ist das Seilreibungsmoment M_R bei einem Zylinderdurchmesser $d = 500 \text{ mm}$?



Lösung:

- Bezogen auf die obigen Gleichungen ist: Ankerkraft F_1
Gewichtskraft $F_G = F_2 = 2 \text{ kN}$

Somit:

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

$$F_1 = 2 \text{ kN} \cdot 140,82$$

$$F_1 = \mathbf{281,64 \text{ kN}}$$

Bei $\mu = 0,35$ und $\alpha = 2,25 \cdot 2 \pi \text{ rad} = 14,1372 \text{ rad}$
ergibt sich für

$$e^{\mu\alpha} = 2,718^{0,35 \cdot 14,1372} = 2,718^{4,948} = \mathbf{140,82}$$

- $M_R = F_R \cdot \frac{d}{2} = (F_1 - F_2) \cdot \frac{d}{2} = (281,64 \text{ kN} - 2 \text{ kN}) \cdot \frac{0,5 \text{ m}}{2} = 279,64 \text{ kN} \cdot 0,25 \text{ m}$

$$M_R = \mathbf{69,91 \text{ Nm}}$$

Ü 1

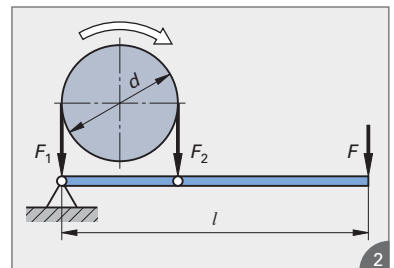
In der Anordnung der Metaufgabe M 1 soll nun die Scheibe stillstehen, und es ist $\mu = 0,45$ und $F_G = 15,8 \text{ kN}$. Wie viele volle Windungen muss das Seil um die Scheibe gelegt sein, wenn die Ankerkraft höchstens 100 N sein soll?

Ü 2

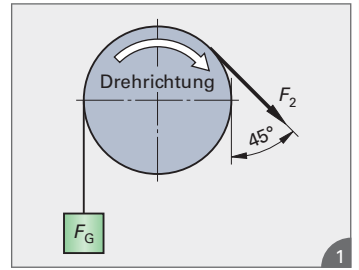
Bild 2 zeigt eine einfache Bandbremse (\rightarrow A31) mit dem Bremscheibendurchmesser $d = 250 \text{ mm}$.

Es wirkt die Kraft $F = 200 \text{ N}$, der Reibungskoeffizient beträgt $\mu = 0,3$ und die Länge des Bremshebels ist $l = 600 \text{ mm}$. Zu berechnen sind

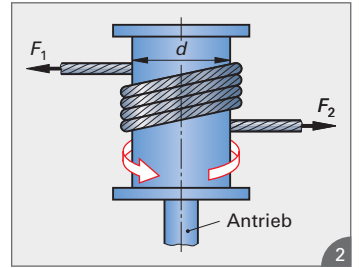
- die Seilkraft F_2
- die Seilreibungskraft F_R
- das Bremsmoment M_R



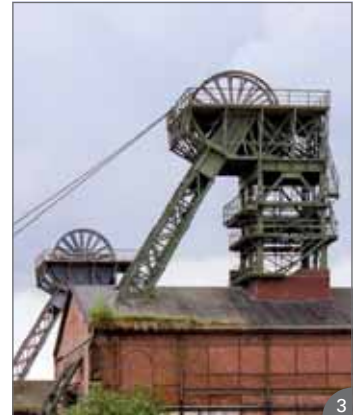
V 1 Ein Gewicht $F_G = 981 \text{ N}$ wird mit einem Lederriemen ($\mu = 0,26$), der über eine sich drehende Scheibe gelegt worden ist, angehoben (**Bild 1**). Welche Kraft F_2 ist dabei aufzuwenden?



V 2 Die im **Bild 2** dargestellte **Spillanlage** funktioniert dergestalt, dass ein Seil um eine von einem Motor angetriebene und sich andauernd drehende Trommel gelegt wird. Soll die Kraft F_2 erzeugt werden, so ist mit der Handkraft F_1 zu ziehen. Dadurch spannt sich das vorher lose um die Trommel gelegte Seil, und nach Gleichung 2/131 wird die Kraft F_2 erzeugt.



- Im speziellen Fall beträgt die Windungszahl 4.
- a) Wie groß ist die erzeugte Zugkraft F_2 bei einer Handkraft $F_1 = 250 \text{ N}$ und dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,25$?
 - b) Welches Drehmoment wird bei einem Trommeldurchmesser $d = 600 \text{ mm}$ erzeugt?



Schachtanlage

Deutlich ist die Seilumschlingung, ca. 130° , zu erkennen.

© reel – Fotolia.com

Maschinenhaus einer Schachtanlage

Die große Seilscheibe ist vom Seil mit etwa 2 Windungen umschlungen.

© ullsteinbild – imageBROKER / T. Frey



A31 Reibungsbremsen und Reibungskupplungen

Die Bremswirkung der Reibungsbremsen beruht auf Reibungskräften zwischen festen Körpern und den speziellen Hebelverhältnissen an und in der Bremse.

31.1 Reibungsbremsen

Reibungsbremsen werden in mehreren, völlig unterschiedlichen Bauarten hergestellt und in Abhängigkeit vom Verwendungszweck eingesetzt. Insbesondere unterscheidet man wie folgt:

- Backenbremse** → **Außenbackenbremse** (Klotzbremse), **Innenbackenbremse** (Trommelbremse)
- Bandbremse** → **Einfache Bandbremse**, **Summenbandbremse**, **Differentialbandbremse**
- Scheibenbremse** → Verwendung vor allem in der Kfz-Technik

31.1.1 Backenbremsen

Bei den Außenbackenbremsen wird zwischen der **einfachen Bandbremse** und der **Doppelbackenbremse** (s. M 2/134) unterschieden. Die **Bilder 1, 2 und 3** zeigen einfache Backenbremsen mit unterschiedlicher Lage des Hebellagers. Wie aus den folgenden Ableitungen zu ersehen ist, hängt die erforderliche **Betätigungskraft** F sehr von dieser Lage des Hebellagers ab:

| überhöhtes Hebellager D | unterzogenes Hebellager D | tangentiales Hebellager D |
|---|--|--|
| | | |
| <p>F_R bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 + \mu \cdot F_N \cdot l_2 - F \cdot l = 0$</p> | <p>$F_R$ bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 - \mu \cdot F_N \cdot l_2 - F \cdot l = 0$</p> | <p>$F_R$ bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 - F \cdot l = 0$</p> |
| <p>Hebelkraft in N</p> $F = F_N \cdot \frac{l_1 \pm \mu \cdot l_2}{l}$ | <p>Hebelkraft in N</p> $F = F_N \cdot \frac{l_1 \mp \mu \cdot l_2}{l}$ | <p>Hebelkraft in N</p> $F = F_N \cdot \frac{l_1}{l}$ |
| <p>⊕ bei Rechtslauf; ⊖ bei Linkslauf Selbsthemmung tritt bei Linkslauf ein mit $l_1 - \mu \cdot l_2 = 0$ Selbsthemmungskriterium: $l_1 \leq \mu \cdot l_2$</p> | <p>Selbsthemmung tritt bei Rechtslauf ein mit $l_1 - \mu \cdot l_2 = 0$ Selbsthemmungskriterium: $l_1 \leq \mu \cdot l_2$</p> | <p>unabhängig von Rechts- oder Linkslauf, d. h.: keine Selbsthemmung</p> |

Bremsmoment der Außenbackenbremse in Nm

$$M_{Br} = F_R \cdot \frac{d}{2} = \mu \cdot F_N \cdot \frac{d}{2}$$

M 1 An einer einfachen Backenbremse mit überhöhtem Hebellager D gemäß **Bild 1** mit den Abmessungen $d = 300$ mm, $l = 600$ mm, $l_1 = 250$ mm, $l_2 = 100$ mm wirkt eine Betätigungskraft $F = 580$ N. Berechnen Sie bei einem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,3$

- a) die Normalkraft F_N bei Rechtslauf und Linkslauf,
- b) das Bremsmoment M_{Br} bei Rechtslauf und Linkslauf.

Damit ergibt sich:

| |
|---|
| Drehimpulserhaltung (Drallerhaltung) in kgm^2/s^2 |
| $J_0 \cdot \omega_0 = J_t \cdot \omega_t$ |

| | |
|---------------------------|--------------------------------|
| J_0, J_t | ω_0, ω_t |
| kgm^2/s^2 | $\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$ |

Ist der Drehstoß (Momentenstoß) $M \cdot t = 0$, dann ist der Drehimpuls am Anfang der Drehbewegung ebenso groß wie am Ende, d. h. $L = \text{konstant}$.

Daraus folgt unmittelbar, und man beachte bei dieser Überlegung die Versuchsanordnung des **Bildes 1/250**:

Verkleinert sich bei einem rotierenden Körper das Trägheitsmoment, dann vergrößert sich, **ohne Energiezufuhr von außen**, die Winkelgeschwindigkeit und damit die Drehzahl.

Dies bedeutet konkret am Beispiel des **Bildes 1/250**: Wird die Gleithülse nach oben verschoben, dann verkleinert sich die Drehzahl, wird hingegen die Gleithülse nach unten geschoben, dann vergrößert sich die Drehzahl, und zwar ohne Energiezufuhr von außen. Den gleichen Effekt erzielen z. B. Eiskunstläufer, die durch das möglichst nahe Heranziehen ihrer Gliedmaßen an ihre „Drehachse“ eine enorme Drehzahlsteigerung in der **Pirouette** erzielen, ein Sachverhalt, der auch jederzeit auf einem Drehstuhl nachvollzogen werden kann.

M 7 Ein Fliehkraftpendel gemäß **Bild 1/250** dreht mit $n_1 = 500 \text{ min}^{-1}$ und hat dabei ein Massenträgheitsmoment von $J_1 = 3 \text{ kgm}^2$. Nach Trennung von einem Antrieb wird mit einer Verstellvorrichtung der „wirksame Radius“ verkleinert. Dabei ändert sich das Massenträgheitsmoment auf $J_2 = 0,8 \text{ kgm}^2$.

Wie groß ist dann die Drehzahl n_2 ? Vergleichen Sie vor der Lösung nochmals die Bilder 1/240 und 2/240.

Lösung:

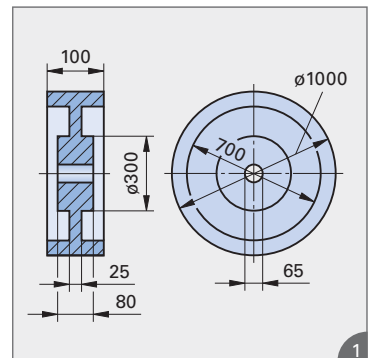
$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 \quad \longrightarrow \quad J_1 \cdot \frac{\pi \cdot n_1}{30} = J_2 \cdot \frac{\pi \cdot n_2}{30}$$

$$J_1 \cdot n_1 = J_2 \cdot n_2$$

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{J_1}{J_2} = 500 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{3 \text{ kgm}^2}{0,8 \text{ kgm}^2} = 1875 \text{ min}^{-1}$$

Ü 2 Ein Schwungrad (**Bild 1**) verrichtet an einer Exzenterpresse durch Energieabgabe mechanische Arbeit (Stanzkraft mal Stanzweg im Pressenwerkzeug). Die Schwungrad Drehzahl verkleinert sich dabei von der Leerlaufdrehzahl $n_0 = 110 \text{ min}^{-1}$ auf die Drehzahl n_1 . Umgekehrt wird die Drehzahl während der Energiezufuhr durch einen Elektromotor wieder von n_1 auf n_0 vergrößert. Das Schwungrad besteht aus Gusseisen mit der Dichte $\rho = 7,25 \text{ kg/dm}^3$. Berechnen Sie

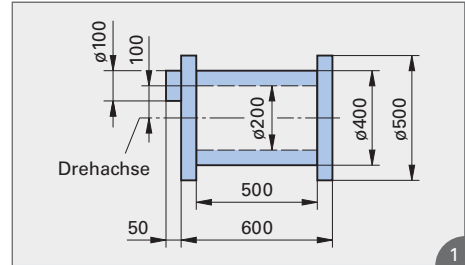
- das Trägheitsmoment des Schwungrades. Bei der Berechnung der Trägheitsmomente der drei Hohlzylinder, aus denen sich das Schwungrad zusammensetzt, muss mit Gleichung 4/243 (dickwandiger Hohlzylinder) gearbeitet werden.
- das Gesamtarbeitsvermögen W_{rot} des Schwungrades bei der Drehzahl n_0 ,
- die Drehzahl n_1 , wenn das Schwungrad die Energie für die Nutzarbeit $W_n = 1200 \text{ Nm}$ liefert,
- die Beschleunigungszeit,
- die Winkelbeschleunigung α , wenn der Elektromotor das Schwungrad im Drehwinkel $\varphi = 1,5 \text{ rad}$ von n_1 auf n_0 beschleunigt,
- die für die Beschleunigung erforderliche Motorleistung,
- die auf den Schwungrad Durchmesser bezogene reduzierte Masse (Ersatzmasse) m_{red} ,
- den Trägheitsradius i ,
- die Auslaufzeit des Schwungrades, wenn es bei n_0 vom Antrieb getrennt wird und in Lagern mit dem Durchmesser $D = 150 \text{ mm}$ gelagert ist ($\mu = 0,05$).



V 2 Eine Kreisscheibe mit der Dichte $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$ (Stahlguss) hat einen Durchmesser von 500 mm und eine Dicke von 100 mm. Welche Beschleunigungsleistung ist erforderlich, wenn die Scheibe aus dem Zustand der Ruhe in $t = 2 \text{ s}$ auf die Drehzahl $n = 300 \text{ min}^{-1}$ gebracht wird?
Welches Arbeitsvermögen (Rotationsenergie) besitzt dann die Scheibe?

V 2 **Bild 1** zeigt eine Trommel mit angesetztem Exzenterzapfen. Werkstoff ist Gusseisen mit der Dichte $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$. Berechnen Sie

- das Trägheitsmoment der Trommel mit angesetztem Exzenterzapfen,
- die reduzierte Masse m_{red} bezogen auf den Durchmesser 400 mm,
- die erforderliche Umfangskraft F_u am Durchmesser 400 mm, wenn dort mit $a_t = 5 \text{ m/s}^2$ beschleunigt werden soll,
- das für diesen Fall erforderliche Drehmoment,
- den Trägheitsradius i .



Betonmischer als Beispiel für eine exzentrische Anordnung einer Masse Beton (im Mischer)

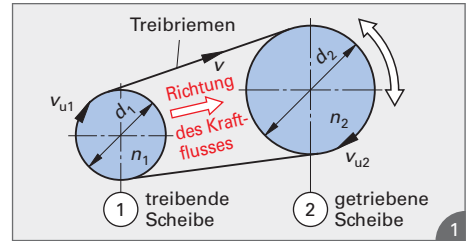
© Equatore – Fotolia.com



B16 Übersetzungsverhältnis beim Riementrieb

16.1 Einfacher Riementrieb

Beim **einfachen Riementrieb** (Bild 1) wird die getriebene Scheibe ② von der treibenden Scheibe mit Hilfe eines Treibriemens oder einer Kette (Kettentrieb) angetrieben. Aus Bild 1 erkennt man:



- treibende Scheibe: ungerade Indizes
- getriebene Scheibe: gerade Indizes

Erfolgt der Antrieb mit einem Flach- oder Keilriemen, dann muss mit einem **Schlupf** des Riemens – insbesondere in der Anlaufphase – gerechnet werden. Beim Anlauf mit Zahnriemen oder Ketten ist ein **schlupffreier Antrieb** gewährleistet, d. h., dass ein Durchrutschen nicht möglich ist. Setzt man einen solchen schlupffreien Antrieb voraus, dann ist beim **Kraftfluss von der treibenden Scheibe zur getriebenen Scheibe** sichergestellt, dass die Riemengeschwindigkeit v mit den Umfangsgeschwindigkeiten der Scheiben v_{u1} und v_{u2} identisch ist. Somit:

$$v_{u1} = v_{u2} \longrightarrow \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$

Daraus ergibt sich die **Grundgleichung für den einfachen Riementrieb**:

Grundgleichung für den einfachen Riementrieb

$$d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2$$

- Index 1 \longrightarrow treibende Scheibe
- Index 2 \longrightarrow getriebene Scheibe

Das Produkt aus Durchmesser d_1 und Drehzahl n_1 der treibenden Scheibe ist also gleich dem Produkt aus Durchmesser d_2 und Drehzahl n_2 der getriebenen Scheibe. Somit gilt auch:

Drehzahlverhältnis = reziprokes Durchmesser Verhältnis

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Beim einfachen Riementrieb verhalten sich die Drehzahlen der Riemen- oder Kettenscheiben umgekehrt wie deren Durchmesser.

Daraus ergibt sich, dass die kleinere Scheibe stets die größere Drehzahl hat. Eine wichtige Rechengröße bei den Übersetzungen ist das **Übersetzungsverhältnis**:

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{n_1}{n_2}$$

- n_1 Drehzahl der treibenden Scheibe
- n_2 Drehzahl der getriebenen Scheibe

Das Verhältnis der Drehzahlen in Richtung des Kraftflusses heißt Übersetzungsverhältnis i .

Da $\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$ (**Gleichung 2**) und da nach **Gleichung 2/227** die Winkelgeschwindigkeiten ω den Drehzahlen n proportional sind, gelten auch die beiden folgenden Gleichungen:

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Beim Riementrieb verhalten sich die Drehzahlen wie die Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben und umgekehrt wie die Scheibendurchmesser.

Zusammenfassend kann somit geschrieben werden:

Übersetzungsverhältnis beim einfachen Riementrieb

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

M 1

Die Riemenscheibe auf der Arbeitsspindel einer Maschine hat einen Durchmesser von 200 mm und ihre Drehzahl beträgt 652 min^{-1} . Der Durchmesser der Scheibe am Antriebsmotor beträgt 90 mm.

- Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben in m/min?
- Wie groß ist die Motordrehzahl?
- Welches Übersetzungsverhältnis liegt vor?
- Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der treibenden Scheibe?

Lösung: Die Motorriemenscheibe ist die treibende Scheibe mit den Indizes 1, die Riemenscheibe auf der Arbeitsspindel ist die getriebene Scheibe mit den Indizes 2.

$$\text{a) } v_{u1} = v_{u2} \longrightarrow \pi \cdot d_2 \cdot n_2 = \pi \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 0,652 \text{ min}^{-1} = \mathbf{409,66 \text{ m/min}}$$

$$\text{b) } \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \longrightarrow n_1 = n_2 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 652 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{200 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = \mathbf{1448,89 \text{ min}^{-1}}$$

$$\text{c) } i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1448,89 \text{ min}^{-1}}{652 \text{ min}^{-1}} = \mathbf{2,22} \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{200 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = \mathbf{2,22}$$

Anmerkung: Es verhalten sich $n_1 : n_2 = 2,22 : 1$, d. h., dass in Kraftflussrichtung eine Drehzahlverkleinerung stattgefunden hat. In diesem Zusammenhang spricht man in der technischen Praxis auch von einer **Untersetzung**. Es ist folgende **Schreibweise für das Übersetzungsverhältnis** üblich:

| | | | | |
|------------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|---------------------|
| Drehzahlverkleinerung | \longrightarrow | z. B. $i = 2,22 = 2,22 : 1$ | \longrightarrow | Untersetzung |
| Drehzahlvergrößerung | \longrightarrow | z. B. $i = 0,45 = 1 : 2,22$ | \longrightarrow | Übersetzung |

$$\text{d) } \omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 1448,89 \text{ min}^{-1}}{30} = \mathbf{151,727 \text{ s}^{-1}}$$

Probe: $v_{u1} = \omega_1 \cdot r_1 = 151,727 \text{ s}^{-1} \cdot 0,045 \text{ m} = 6,8277 \text{ m/s} = 6,8277 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s/min}$
 $v_{u1} = \mathbf{409,66 \text{ m/min}}$

Ü 1

Was wird im Zusammenhang mit Übersetzungen als „in Kraftrichtung“ bezeichnet?

Ü 2

Ein Treibriemen läuft mit einer Geschwindigkeit $v = 4,8 \text{ m/s}$. Die Antriebsscheibe hat einen Durchmesser $d_1 = 320 \text{ mm}$. Das Übersetzungsverhältnis ist $2,8 : 1$. Berechnen Sie

- den Durchmesser der getriebenen Scheibe,
- die Drehzahl der getriebenen Scheibe,
- die Winkelgeschwindigkeit der treibenden Scheibe.

Ü 3

Was wird in der Antriebstechnik als „Schlupf“ bezeichnet?

V 1

Antriebsdrehzahl $n_1 = 2860 \text{ min}^{-1}$, Durchmesser der treibenden Scheibe $d_1 = 120 \text{ mm}$, Durchmesser der getriebenen Scheibe $d_2 = 168 \text{ mm}$. Gesucht sind:

- Drehzahl n_2 ,
- Übersetzungsverhältnis i ,
- Winkelgeschwindigkeit ω_1 .

V 2

Ein Motor für das Gebläse einer Trockenanlage hat eine Drehzahl $n_1 = 1450 \text{ min}$. Das Übersetzungsverhältnis beträgt $i = 1 : 1,6$. Wie groß muss der Durchmesser d_1 Riemenscheibe auf der Motorwelle sein, wenn auf der angetriebenen Gebläsewelle eine Riemenscheibe mit dem Durchmesser $d_2 = 75 \text{ mm}$ angebracht ist?

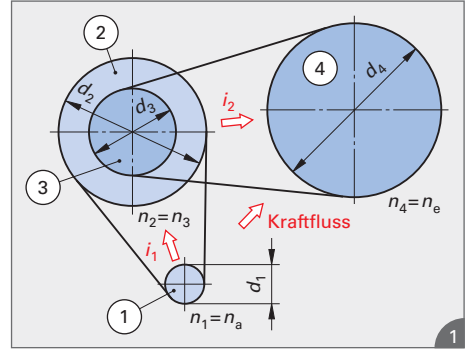
16.2 Doppelter Riemetrieb und Mehrfachriemetrieb

Beim **doppelten Riemetrieb (Bild 1)** erfolgt der Antrieb von einer Scheibe mit dem Durchmesser d_1 und der

Anfangsdrehzahl $n_1 = n_a$

über die Scheibe mit dem Durchmesser d_2 , die mit der Scheibe mit dem Durchmesser d_3 auf der gleichen Welle, der Zwischenwelle sitzt, auf die Scheibe mit dem Durchmesser d_4 und der

Enddrehzahl $n_4 = n_e$



Die beiden Scheiben auf der Zwischenwelle haben naturgemäß die gleiche Drehzahl, d. h.: $n_2 = n_3$.

Es ergeben sich die **Einzelübersetzungsverhältnisse** $i_1 = \frac{n_1}{n_2}$; $i_2 = \frac{n_3}{n_4}$. Mit $n_2 = n_3$ wird $i_2 = \frac{n_2}{n_4}$.

Ausschlaggebend für die Übersetzung von Scheibe ① auf Scheibe ④, die **Gesamtübersetzung**, ist das **Gesamtübersetzungsverhältnis**.

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_a}{n_e}$$

Multipliziert man die Einzelübersetzungsverhältnisse i_1 und i_2 miteinander, so erhält man:

Der Kraftfluss ist von n_a nach n_e gerichtet.

$$i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_3}{n_4} \text{ und da } n_2 = n_3 \text{ wird } i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_4} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_a}{n_e} = i_{\text{ges}}$$

Entsprechendes gilt für den Dreifach-, Vierfach-, ... usw., also für den **Mehrfachriemetrieb**:

Beim Mehrfachriemetrieb errechnet sich das Gesamtübersetzungsverhältnis als Produkt aller Einzelübersetzungsverhältnisse.

Mit den Einzelübersetzungsverhältnissen als die Quotienten der

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots = \frac{n_a}{n_e}$$

Durchmesser erhält man: $i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_4}{d_3} \cdot \frac{d_6}{d_5} \cdot \dots = \frac{n_a}{n_e}$.

Damit ergibt sich folgende **Grundgleichung** (Gleichung 4):

Grundgleichung für den Mehrfachriemetrieb

$$n_a \cdot d_1 \cdot d_3 \cdot d_5 \cdot \dots = n_e \cdot d_2 \cdot d_4 \cdot d_6 \cdot \dots$$

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = \frac{\omega_a}{\omega_e}$$

M 2 $n_a = 1500 \text{ min}^{-1}$, $d_1 = 80 \text{ mm}$, $d_2 = 200 \text{ mm}$, $d_3 = 125 \text{ mm}$, $d_4 = 280 \text{ mm}$. Berechnen Sie i_{ges} , n_e und ω_a .

Lösung: $i_{\text{ges}} = \frac{d_2 \cdot d_4}{d_1 \cdot d_3} = \frac{200 \text{ mm} \cdot 280 \text{ mm}}{80 \text{ mm} \cdot 125 \text{ mm}} = 5,6 = 5,6 : 1$

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_a}{n_e} \longrightarrow n_e = \frac{n_a}{i_{\text{ges}}} = \frac{1500 \text{ min}^{-1}}{5,6} = 267,86 \text{ min}^{-1}$$

$$i_{\text{ges}} = \frac{\omega_a}{\omega_e} = 5,6 \longrightarrow \omega_a = i_{\text{ges}} \cdot \omega_e = i_{\text{ges}} \cdot \frac{\pi \cdot n_e}{30} = 5,6 \cdot \frac{\pi \cdot 267,86}{30} \text{ s}^{-1} = 157,08 \text{ rad/s}$$

Ü 4 $d_1 = 112 \text{ mm}$, $d_2 = 560 \text{ mm}$, $d_3 = 125 \text{ mm}$, $n_a = 1120 \text{ min}^{-1}$, $i_{\text{ges}} = 6:1$. Berechnen Sie n_e und d_4 .

V 3 $d_1 = 560 \text{ mm}$, $d_2 = 125 \text{ mm}$, $d_3 = 250 \text{ mm}$, $n_a = 280 \text{ min}^{-1}$, $n_e = 1400 \text{ min}^{-1}$. Berechnen Sie i_{ges} und d_4 .

B17 Übersetzungen beim Zahntrieb und in Getrieben

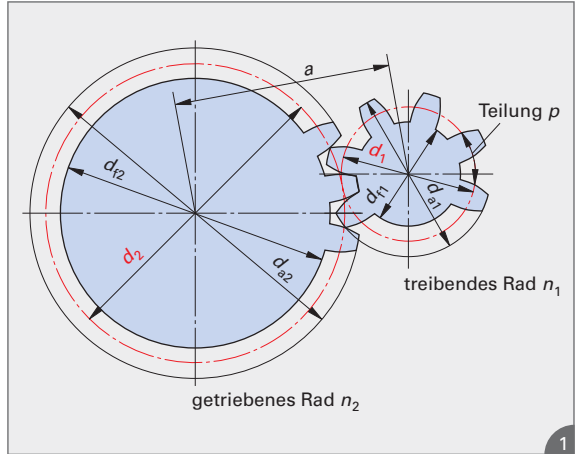
17.1 Einfacher Zahntrieb

Bild 1 zeigt das Schema eines **einfachen Zahntriebes**. Die Bezeichnungen haben folgende Bedeutung:

- d_f Fußkreisdurchmesser
- d_a Kopfkreisdurchmesser
- d Teilkreisdurchmesser
- p Teilung = Abstand der Zähne auf dem Teilkreisumfang
- a Achsabstand

Die Anzahl der Zähne eines Zahnrades wird als **Zähnezahl** z bezeichnet.

Beim Ineinandergreifen ist durch diesen **Formschluss** sichergestellt, dass eine **schlupffreie Kraftübertragung** vorliegt. Dabei „berühren“ sich die beiden Teilkreise d_1 und d_2 , die deswegen bei der Berechnung des Übersetzungsverhältnisses wichtig sind. Aus **Bild 1** ergibt sich:



Die **Geometrie der Verzahnung** wird innerhalb des Faches **Maschinenelemente** behandelt. Dort werden weitere **Verzahnungskriterien**, z.B. **Profilverschiebung** und **Zähnezahl** berücksichtigt.

| Teilkreisumfang in mm |
|-------------------------------|
| $U = p \cdot z = \pi \cdot d$ |

Stellt man **Gleichung 1** nach dem Durchmesser d des Teilkreises um, so ergibt sich $d = p/\pi \cdot z$. Man bezeichnet den Quotienten p/π als **Modul** m . Somit ergibt sich für den **Teilkreisdurchmesser** und den **Modul**:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| d | p | z | m |
| mm | mm | 1 | mm |

| Teilkreisdurchmesser in mm |
|----------------------------|
| $d = m \cdot z$ |

| Modul in mm |
|---------------------|
| $m = \frac{p}{\pi}$ |

Da sich die Teilkreise d_1 und d_2 berühren, können diese **entsprechend dem Riementrieb** für die Berechnung des Übersetzungsverhältnisses herangezogen werden.

Beim Zahntrieb werden die Zähne so konstruiert, dass sich die Teilkreise berühren. Damit verhalten sich die Drehzahlen umgekehrt wie die Zähnezahlen.

In Verbindung mit **Gleichung 2** ergibt sich:

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{m \cdot z_2}{m \cdot z_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

| Übersetzungsverhältnis beim einfachen Zahntrieb |
|---|
| $i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$ |

17.2 Doppelter Zahntrieb und Mehrfachzahntrieb

Im **Bild 1/257** ist ein **doppelter Zahntrieb** in Draufsicht abgebildet. Wie beim doppelten Riementrieb bzw. beim Mehrfachriementrieb wird das Gesamtübersetzungsverhältnis durch Multiplikation der Einzelübersetzungsverhältnisse berechnet.

In Analogie zum Mehrfachriementrieb und in Verbindung mit **Gleichung 2** ergeben sich die beiden **Gleichungen 5 und 6** für das **Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb**.

| Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb |
|---|
| $i_{ges} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots$ |

| Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb |
|---|
| $i_{ges} = \frac{n_a}{n_e}$ |