

Aufgabensammlung Mathematik für Wirtschaft und Technik



Edition
Harri 
Deutsch 

Aufgabensammlung Mathematik für Wirtschaft und Technik

Dorothea Reimer
Wolfgang Gohout

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 54326

Dr. Dorothea Reimer

Akademische Oberrätin im Bereich Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler der
Professur für Statistik und Ökonometrie an der Justus-Liebig-Universität Gießen

Professor Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Wolfgang Gohout

Professor für Operations Research, Statistik und Mathematik
Studiengangleiter Wirtschaftsingenieurwesen an der Hochschule Pforzheim

3. Auflage 2020

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5435-7

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur 3. Auflage

Die ersten Auflagen der vorliegenden Aufgabensammlung haben bei unseren Studierenden am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Justus-Liebig-Universität in Gießen und an der Fakultät für Technik der Hochschule Pforzheim großen Zuspruch gefunden. Da bekanntlich Übung den Meister macht, haben wir die Aufgabensammlung um weitere „Zusatzaufgaben“ erweitert, auch diesmal wieder ohne Musterlösungen als zusätzliche Herausforderung für aktive Leser.

Für Hinweise auf missverständliche Formulierungen oder Fehler sind wir unseren Lesern natürlich dankbar. Schließlich bedanken wir uns bei dem Verlag Europa-Lehrmittel, Edition Harri Deutsch, und speziell bei Herrn Horn für die Unterstützung und wünschen den Lesern wieder viele Erfolgserlebnisse und gute Fortschritte beim Erlernen ihrer Mathematik.

Gießen, im Juni 2020

Pforzheim, im Juni 2020

Dorothea Reimer
Dorothea.Reimer@wirtschaft.uni-giessen.de

Wolfgang Gohout
Wolfgang.Gohout@hs-pforzheim.de

Inhaltsverzeichnis

A	Mathematische Grundlagen	1
A1	Mathematische Logik	1
A2	Mengenlehre	5
A3	Grundlagen der Arithmetik und Algebra	8
A4	Kombinatorik	34
A5	Relationen, Ordnungen, Abbildungen	39
A6	Funktionen	41
A7	Folgen und Reihen	53
A8	Finanzmathematik	62
B	Analysis von Funktionen einer Variablen	75
B1	Grenzwerte und Ableitungen	75
B2	Extrema und Elastizitäten	89
B3	Integralrechnung	105
B4	Differential- und Differenzgleichungen	118
C	Analysis von Funktionen mehrerer Variabler	133
C1	Eigenschaften und partielle Ableitungen	133
C2	Extrema und Sattelpunkte	145
C3	Mehrfachintegrale	156
D	Lineare Algebra	167
D1	Vektorrechnung	167
D2	Matrixalgebra	182
D3	Lineare Gleichungssysteme	201
D4	Quadratische Form und Definitheit	219
D5	Eigenwerte und -vektoren	223
	Literaturempfehlungen	229

A Mathematische Grundlagen

A1 Mathematische Logik

Aufgabe A1.1

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Geben Sie bei den Aussagen den Wahrheitswert an!

- a) Die Lahn ist länger als der Rhein.
- b) Mein Bruder ist dein Onkel.
- c) Mathe macht Spaß.
- d) Haben die Beatles „Yesterday“ gesungen?
- e) Ich weiß, was eine Aussage ist.
- f) Herr Ober, ein Bier!
- g) Auf anderen Planeten gibt es intelligente Lebewesen.
- h) Hilfe, Überfall!
- i) $1 + 1 = 2$
- j) $\sqrt{x^y}$

Aufgabe A1.2

Wenn $A \Rightarrow B$ gilt, gilt dann auch

- a) $B \Rightarrow A$,
- b) $\neg A \Rightarrow \neg B$,
- c) $\neg B \Rightarrow \neg A$?

Aufgabe A1.3

Ermitteln Sie den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg C),$$

wenn A eine wahre, B und C jedoch falsche Aussagen sind!

Aufgabe A1.4

Schreiben Sie folgende Aussagen in symbolischer Form!

- Es gibt eine reelle Zahl x für die $x > 0$ und $x^2 - 25 = 0$ gilt.
- Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist.

Aufgabe A1.5

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion!

- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Zusatzaufgabe A1.6

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Geben Sie bei den Aussagen den Wahrheitswert an!

- Ein Tag hat 25 Stunden.
- Otto find' ich gut.
- Wenn Hubert kleiner ist als Georg und Georg kleiner ist als Otto, dann ist Otto größer als Hubert.
- Muss ein Volkswirt rechnen können?
- Es war einmal ein Schneider, der hatte eine Fliegenklatsche.
- Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.
- Paris ist die Hauptstadt von Frankreich.

Zusatzaufgabe A1.7

Wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C$ gilt, gilt dann auch

- $C \Rightarrow A$,
- $A \Rightarrow C$,
- $B \Rightarrow \neg A$,
- $\neg C \Rightarrow \neg B$,
- $\neg A \Rightarrow \neg C$?

Zusatzaufgabe A1.8

Schreiben Sie folgende Aussagen in symbolischer Form!

- Es gibt genau eine reelle Zahl, die mit Fünf multipliziert gleich Eins ergibt.
- Für jede reelle Zahl ist das Produkt mit 1 gleich der Zahl selbst.

Zusatzaufgabe A1.9

„Übersetzen“ Sie folgende Ausdrücke in die deutsche Sprache!

- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists x \in \mathbb{R} : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Lösungen zum Abschnitt A1**Lösung zu Aufgabe A1.1**

	keine Aussage	Aussage	wahr	falsch	Wahrheitswert unbekannt
a)		×		×	
b)		×			×
c)	×				
d)	×				
e)		×			×
f)	×				
g)		×			×
h)	×				
i)		×	×		
j)	×				

Lösung zu Aufgabe A1.2

a) und b) gelten nicht, c) ist zutreffend.

Lösung zu Aufgabe A1.3

A wahr; B, C falsch $\Rightarrow D := \neg A \vee B$ ist falsch.

$\Rightarrow D \wedge$ beliebig ist falsch

\Rightarrow Die Aussage, also die Implikation „ \Rightarrow “, ist wahr.

Lösung zu Aufgabe A1.4

- a) $\exists x \in \mathbb{R} : (x > 0 \wedge x^2 - 25 = 0)$
 b) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösung zu Aufgabe A1.5

- a) Induktionsanfang $n = 1$:

$$1(1+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \quad \text{gilt für } n = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (*)$$

gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Beweis: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ (*) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- b) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad \text{gilt für } n = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{gelte für ein } n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \stackrel{!}{=} 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} & \stackrel{(*)}{=} 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
 & = 1 - \frac{2}{2^n 2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
 & = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
 & = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

A2 Mengenlehre

Aufgabe A2.1

Man schreibe mit Hilfe der Symbolik der Mengenlehre

- die Menge A der ersten fünf Buchstaben des griechischen Alphabets,
- die Menge B aller reellen Zahlen zwischen $+2$ und -1 , die Grenzen jeweils ausgeschlossen, ohne die Null,
- die Menge C aller natürlichen Zahlen zwischen 5 und 15 einschließlich der Grenzen.

Aufgabe A2.2

Erläutern Sie die Unterschiede zwischen \emptyset , $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ und 0 !

Aufgabe A2.3

Gegeben sei die Menge $A = \{4, \{6, 7\}, \emptyset\}$. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

- | | | | |
|------------------------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $6 \in A$; | b) $\{6, 7\} \subset A$; | c) $\{4\} \in A$; | d) $\{4\} \subset A$; |
| e) $4 \in A$; | f) $4 \subset A$; | g) $\emptyset \subset A$; | h) $\{\emptyset\} \subset A$; |
| i) $\emptyset \in A$; | j) $\{\emptyset\} \in A$; | k) $\{\{6, 7\}\} \subset A$. | |

Aufgabe A2.4

Geben Sie zu der Menge $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ die Potenzmenge an!

Aufgabe A2.5

Sei $\Omega = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10\}$ und $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

- Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und tragen Sie die Elemente von Ω in die entsprechenden Teilflächen ein!
- Geben Sie folgende Ereignisse an:
 - A und B und C ,
 - A oder B ,
 - Entweder $(A$ und $B)$ oder $(A$ und $C)$, nicht beide,
 - C und $(A$ ohne $B)$,
 - A , aber weder B noch C .

Aufgabe A2.6

Wie lautet $(A \setminus B) \cup B$, wenn

- $A \cap B = \emptyset$,
- $A \cap B \neq \emptyset$ und $A \neq A \cap B \neq B$,
- $A \cap B = B$,
- $A \cap B = A$?

Man veranschauliche sich dies am Venn-Diagramm.

Lösungen zum Abschnitt A2

Lösung zu Aufgabe A2.1

- $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2, x \neq 0\}$
- $C = \{5, 6, \dots, 15\} = \{n \in \mathbb{N} : 5 \leq n \leq 15\}$

Lösung zu Aufgabe A2.2

\emptyset ist die **leere Menge**, also die Menge, die kein Element enthält.

$\{0\}$ ist die **Menge** mit dem (einzigem) Element 0.

$\{\emptyset\}$ ist die **Menge** mit dem Element \emptyset , das selbst wieder eine Menge ist.

0 ist **keine Menge**, sondern eine Zahl.

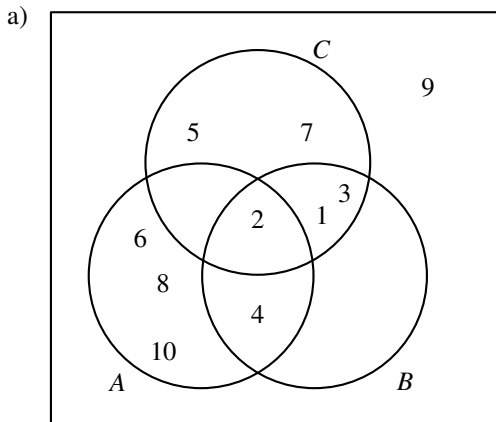
Lösung zu Aufgabe A2.3

- a) falsch b) falsch c) falsch d) wahr
 e) wahr f) falsch g) wahr h) wahr
 i) wahr j) falsch k) wahr

Lösung zu Aufgabe A2.4

$$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, A\}$$

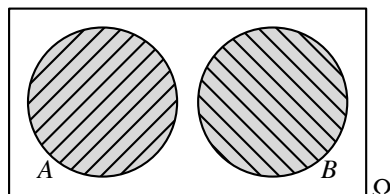
Lösung zu Aufgabe A2.5



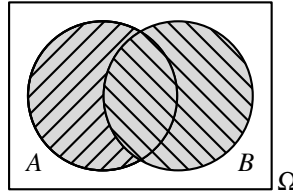
- b)
- $A \cap B \cap C = \{2\}$
 - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$
 - $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C) = \{4\}$
 - $C \cap (A \setminus B) = \emptyset$
 - $A \setminus (B \cup C) = \{6, 8, 10\}$

Lösung zu Aufgabe A2.6

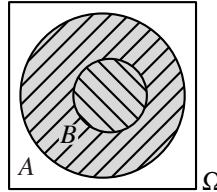
- a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$
 $\Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A \cup B$



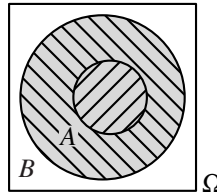
- b) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$,
gilt übrigens **stets!**



- c) $A \cap B = B$
 $\Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$



- d) $A \cap B = A$
 $\Rightarrow (A \setminus B) \cup B = B$



A3 Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Aufgabe A3.1

Transformieren Sie die folgenden Zahlen in die jeweils angegebenen Zahlensysteme:

- $11,6875_{10}$ in das Dualsystem,
- 3451_{10} in das Hexadezimalsystem,
- 101011100010_2 in das Hexadezimalsystem,
- $110110011,0101_2$ in das Dezimalsystem.

Aufgabe A3.2

Geben Sie zu den folgenden Zahlen an, zu welcher der Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sie gehören: -2 ; 5 ; $2,7$; $3/8$; π ; e ; $7i$; $\sqrt{3}$; $5+i$.

Aufgabe A3.3

Berechnen Sie folgende Summen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{i=1}^{10} i, & \text{b) } & \sum_{i=1}^n (2i + 10), & \text{c) } & \sum_{j=1}^5 \frac{3j(-1)^j - 1}{3j}, \\ \text{d) } & \sum_{i=4}^8 \frac{2i + 3(-1)^i}{i^2}, & \text{e) } & \sum_{i=-2}^4 \frac{(-i)^3}{2^i}, & \text{f) } & \sum_{i=1}^4 \frac{i^2}{i+1} + \sum_{i=1}^2 \frac{i(i-1)}{i^2}, \\ \text{g) } & \sum_{j=-2}^3 (-3)^j 2^{10-j}, \end{aligned}$$

Aufgabe A3.4

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

$$\text{a) } 7 + 12 + 17 + 22 + 27, \quad \text{b) } -3 + 4/2 - 5/3 + 6/4 - \dots$$

Aufgabe A3.5

Für welchen Wert j ergibt nachfolgender Ausdruck stets null?

$$\sum_{i=1}^n 2ij - 4 \left(\sum_{i=2}^{n+1} 4i - 4n \right)$$

Aufgabe A3.6

Gegeben sei die folgende Tabelle von n^2 Zahlen:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

Geben Sie unter Verwendung des Summenzeichens die Summe aller Elemente an, die

- in der 2-ten bis $(n-k)$ -ten Spalte stehen,
- in der ℓ -ten bis n -ten Zeile stehen,
- auf der Hauptdiagonalen stehen,
- auf der Nebendiagonalen stehen,
- im oberen Dreieck (einschließlich der Hauptdiagonalen) stehen,
- außerhalb der Hauptdiagonalen stehen!

Aufgabe A3.7

Wie groß ist die Summe

- a) der geraden b) der ungeraden

Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $|101 - k| < 26$?

Aufgabe A3.8

Berechnen Sie folgende Produkte:

- a) $\prod_{i=1}^5 2$, b) $\prod_{i=0}^3 4$, c) $\prod_{i=2}^5 2i$, d) $\prod_{i=5}^{10} (2i-3)$,
 e) $\prod_{i=-3}^3 (15+3i)$, f) $\prod_{j=-2}^3 \frac{2 \cdot 3^j}{3+j}$, g) $\prod_{i=1}^n \frac{2i+2}{6i}$, h) $\prod_{i=-2}^0 \frac{i^2-1}{i+3}$.

Aufgabe A3.9

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 i(j+2)$, b) $\sum_{i=3}^5 \sum_{j=-1}^1 i^{j+1}$, c) $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{i+jn}{6}$, d) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{i+j-1}{m \cdot n}$,
 e) $\prod_{i=0}^2 \prod_{j=1}^3 j^i$, f) $\sum_{i=-1}^1 \prod_{j=1}^3 (i+2j)$, g) $\prod_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i i^{3-j}$.

Aufgabe A3.10

Geben Sie die Ergebnisse der folgenden Operationen an:

- a) $1 + 2 \cdot 3^4$, b) $4^{(3^2)}$, c) $(4^3)^2$.

Aufgabe A3.11

Fassen Sie, sofern möglich, vereinfachend zusammen (Produkte statt Summen bzw. Ausklammern):

- a) $10^2 + 4 \cdot 15^3$, b) $7^4 + 11^4 + 13^4$, c) $ax^2 + ay^2 + 2axy$,
 d) $c^2 + c^x$, e) $a^x + 2a^{x+y} - na^{x-3}$.

Aufgabe A3.12

Berechnen Sie durch Umformen und ohne Taschenrechner:

- a) $3^4 \cdot 27^2 \cdot 9^{-5}$, b) $\left(\frac{a^2 b^4}{c}\right)^3 : \left(\frac{b^5 c^{-2}}{a}\right)^2$, c) $\sqrt{a^4 b c^{-2}} + \frac{3a^2 \sqrt{b}}{c}$,
 d) $\frac{10^2}{5^2 \cdot \sqrt{2^3}}$, e) $\lg 16 - \lg 64 + \lg 8$, f) $\frac{x^3 + 5x^2 - 11x + 21}{x + 7}$,
 g) $125^{-1/2} \cdot \sqrt{5} \cdot 25^2$, h) $(16^3)^2 \cdot (18^4)^{-2} \cdot 12^{(-2^3)} \cdot 3^{(3^3)}$.

Aufgabe A3.13

Wie lautet die Lösung der folgenden Gleichung? $\frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3} = 2$

Aufgabe A3.14

Üben Sie das Arbeiten auf Ihrem Taschenrechner:

- a) $\lg 123 =$ f) $\ln 123 =$
 b) $\lg 1,23 =$ g) $\ln 1,23 =$
 c) $\lg e =$ h) $\ln e =$
 d) $\lg 1000 =$ i) $\ln 1000 =$
 e) $\lg(3e) =$ j) $\ln(3e) =$

Aufgabe A3.15

- a) Welche numerische Beziehung besteht zwischen $\lg x$ und $\ln x$?
 b) Bestimmen Sie den Logarithmus der Zahl 46 zur Basis 5,3!
 c) Ist $x = \log_{50} 100$ größer oder kleiner als 1?

Aufgabe A3.16

Bestimmen Sie die Logarithmen der folgenden Ausdrücke:

- a) $x \cdot y$, b) $\frac{x}{y}$, c) $\frac{x^2}{y^3}$, d) $x^{(5^3)} \cdot y^6 \cdot z^3$, e) $x^2 \cdot y + x \cdot y^2$,
 f) $x^2 \cdot \sqrt[5]{y^3}$, g) $\sqrt[3]{x} \cdot y^{-1/3}$, h) $a \cdot \sqrt[6]{x^{-6}}$, i) $a^{\log_a(b)}$.

Aufgabe A3.17

Wie lauten die dualen Logarithmen der folgenden Zahlen:
25; 10; 4; 2; 1; 0,125?

Aufgabe A3.18

Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

a) $\lg(a) + \lg(b) - \lg(c)$, b) $-\lg(x) - \lg(y)$, c) $\lg(2) + 2 \cdot \lg(x) - 2 \cdot \lg(a)$,

d) $3 \cdot (\lg(3) - 2 \cdot \lg(x) - 0,5 \cdot \lg(y))$, e) $\frac{1}{2} \cdot \lg(a) - \frac{1}{2} \cdot \lg(a^2 - x)$,

f) $\lg \sqrt{3} - 3 \cdot \lg 9 - 12 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Aufgabe A3.19

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $\lg x = 1,2345$; b) $\ln x - 4 = 1$; c) $\ln x^2 = 20$;

d) $\lg(3x - 5) = 2$; e) $\lg(\sqrt{x+1}) = 1$; f) $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$;

g) $\lg(\lg x) = 0$; h) $\lg(\ln x) = 1$; i) $\ln(\lg x) = 1$;

j) $\lg x = 4$; k) $x - 2 \lg 4 = \lg 8$; l) $3^x - 5 = 8$.

Aufgabe A3.20

Bestimmen Sie Lösungen folgender Gleichungen und die Definitionsbereiche der enthaltenen Ausdrücke:

a) $\frac{5}{x} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x+2}$; b) $\frac{x^2 - 231}{x+9} - 9x = 4x$;

c) $7 - x = \sqrt{x-1}$; d) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$.

Aufgabe A3.21

Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ auf analytischem Wege!