EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Aufgabensammlung Mathematik für Wirtschaft und Technik

Dorothea Reimer
Wolfgang Gohout

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 54326

Dr. Dorothea Reimer
Akademische Oberrätin im Bereich Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler der Professur für Statistik und Ökonometrie an der Justus-Liebig-Universität Gießen

Professor Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Wolfgang Gohout
Professor für Operations Research, Statistik und Mathematik
Studiendekan Wirtschaftsingenieurwesen an der Hochschule Pforzheim

1. Auflage 2009

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5432-6

http://www.europa-lehrmittel.de
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das Erlernen mathematischer Methoden erfordert vor allem Übung. Daher haben die Autoren die vorliegende Aufgabensammlung als Begleitmaterial ihrer Vorlesungen am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Justus-Liebig-Universität in Gießen und an der Fakultät für Technik der Hochschule Pforzheim zusammengestellt. Die Aufgaben umfassen sowohl den klassischen Stoff einer einführenden Mathematik-Vorlesung als auch propädeutische Bereiche zur Wiederholung und Auffrischung von Schulkenntnissen.

Die Lösungen wurden bewusst von den Aufgaben räumlich getrennt, um ein vorzeitiges „Spicken“ zu erschweren. Sie folgen den Aufgabenstellungen jeweils am Ende eines Abschnitts. Die Leser sollten nach Möglichkeit die Aufgaben so lange bearbeiten, bis sie sicher sind, dass sie sie auch in einer Klausur so abgeben würden. Danach kann man sich der Lektüre der Lösungen widmen.

Obwohl die Aufgaben dieser Sammlung schon lange in den Übungen und Tutorien der Autoren sowie zur Klausurvorbereitung unserer Studenten verwendet werden, sind wir uns durchaus bewusst, dass noch einige (hoffentlich wenige) Fehler drin stecken können. Für entsprechende Hinweise wären wir natürlich dankbar.

Nun bedanken wir uns noch bei dem Verlag Harri Deutsch und speziell Herrn Horn für die Unterstützung und wünschen den Lesern viele Erfolgserlebnisse und gute Fortschritte beim Erlernen ihrer Mathematik.

Gießen, im August 2009

Dorothea Reimer
Dorothea.Reimer@wirtschaft.uni-gießen.de

Pforzheim, im August 2009

Wolfgang Gohout
Wolfgang.Gohout@hs-pforzheim.de

Inhaltsverzeichnis

A. Mathematische Grundlagen

A1. Mathematische Logik

Aufgabe A1.1

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Geben Sie bei den Aussagen den Wahrheitswert an!

a) Die Lahn ist länger als der Rhein.
b) Mein Bruder ist dein Onkel.
c) Mathe macht Spaß.
d) Haben die Beatles „Yesterday“ gesungen?
e) Ich weiß, was eine Aussage ist.
f) Herr Ober, ein Bier!
g) Auf anderen Planeten gibt es intelligente Lebewesen.
h) Hilfe, Überfall!
i) $1+1=2$
j) $\sqrt{x^y}$

Aufgabe A1.2

Wenn $A \Rightarrow B$ gilt, gilt dann auch

a) $B \Rightarrow A$,
b) $\neg A \Rightarrow \neg B$,
c) $\neg B \Rightarrow \neg A$?

Aufgabe A1.3

Ermitteln Sie den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage

$$\big((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C)\big) \quad \Rightarrow \quad (\neg A \Rightarrow \neg C),$$

wenn A eine wahre, B und C jedoch falsche Aussagen sind!

Aufgabe A1.4

Schreiben Sie folgende Aussagen in symbolischer Form!

a) Es gibt eine Zahl x für die $x > 0$ und $x^2 - 25 = 0$ gilt.

b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist.

Aufgabe A1.5

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion!

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) \;=\; \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} \;=\; 1 - \dfrac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Lösungen zum Abschnitt A1

Lösung zu Aufgabe A1.1

	keine Aussage	Aussage	wahr	falsch	Wahrheitswert unbekannt
a)		$\times$		$\times$	
b)		$\times$			$\times$
c)	$\times$				
d)	$\times$				
e)		$\times$			$\times$
f)	$\times$				
g)		$\times$			$\times$
h)	$\times$				
i)		$\times$	$\times$		
j)	$\times$				

Lösung zu Aufgabe A1.2

a) und b) gelten nicht, c) ist zutreffend.

Lösung zu Aufgabe A1.3

A wahr; B, C falsch $\Rightarrow D := \neg A \vee B$ ist falsch.
$\Rightarrow D \wedge$ beliebig ist falsch
$\Rightarrow$ Die Aussage, also die Implikation „$\Rightarrow$", ist wahr.

Lösung zu Aufgabe A1.4

a) $\exists x \in \mathbb{R}: \ (x > 0 \wedge x^2 - 25 = 0)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: \ 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Lösung zu Aufgabe A1.5

a) Induktionsanfang $n = 1$:

$$1\,(1+1) = 2 = \frac{1\,(1+1)\,(1+2)}{3} \quad \text{gilt für } n = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} \tag{$*$}$$

gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{3}$$

Beweis: $\quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

$$\begin{aligned}
&\underset{(*)}{=} \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} + \frac{3\,(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

b) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad \text{gilt für } n = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{gelte für ein } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} \overset{!}{=} 1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Beweis:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} &\underset{(*)}{=} 1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 1-\frac{2}{2^n 2}+\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 1-\frac{2}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= 1-\frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

A2. Mengenlehre

Aufgabe A2.1

Man schreibe mit Hilfe der Symbolik der Mengenlehre

a) die Menge A der ersten fünf Buchstaben des griechischen Alphabets,
b) die Menge B aller reellen Zahlen zwischen +2 und –1, die Grenzen jeweils ausgeschlossen, ohne die Null,
c) die Menge C aller natürlichen Zahlen zwischen 5 und 15 einschließlich der Grenzen.

Aufgabe A2.2

Erläutern Sie die Unterschiede zwischen $\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$ und 0!

Aufgabe A2.3

Gegeben sei die Menge $A = \{4, \{6,7\}, \varnothing\}$. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

a) $6 \in A$; b) $\{6,7\} \subset A$; c) $\{4\} \in A$; d) $\{4\} \subset A$;
e) $4 \in A$; f) $4 \subset A$; g) $\varnothing \subset A$; h) $\{\varnothing\} \subset A$;
i) $\varnothing \in A$; j) $\{\varnothing\} \in A$; k) $\{\{6,7\}\} \subset A$.

Aufgabe A2.4

Geben Sie zu der Menge $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ die Potenzmenge an!

Aufgabe A2.5

Sei $\Omega = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 10\}$ und $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

a) Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und tragen Sie die Elemente von Ω in die entsprechenden Teilflächen ein!

b) Geben Sie folgende Ereignisse an:
   - A und B und C,
   - A oder B,
   - Entweder (A und B) oder (A und C), nicht beide,
   - C und (A ohne B),
   - A, aber weder B noch C.

Aufgabe A2.6

Wie lautet $(A \backslash B) \cup B$, wenn

a) $A \cap B = \varnothing$, b) $A \cap B \neq \varnothing$ und $A \neq A \cap B \neq B$,

c) $A \cap B = B$, d) $A \cap B = A$?

Man veranschauliche sich dies am Venn-Diagramm.

Lösungen zum Abschnitt A2

Lösung zu Aufgabe A2.1

a) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2, x \neq 0\}$

c) $C = \{5, 6, \ldots, 15\} = \{n \in \mathbb{N} : 5 \le n \le 15\}$

Lösung zu Aufgabe A2.2

$\varnothing$ ist die **leere Menge**, also die Menge, die kein Element enthält.

$\{0\}$ ist die **Menge** mit dem (einzigen) Element 0.

$\{\varnothing\}$ ist die **Menge** mit dem Element $\varnothing$, das selbst wieder eine Menge ist.

0 ist **keine Menge**, sondern eine Zahl.

Lösung zu Aufgabe A2.3

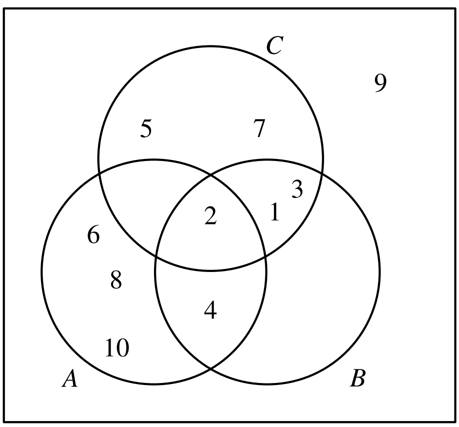
a) falsch	b) falsch	c) falsch	d) wahr
e) wahr	f) falsch	g) wahr	h) wahr
i) wahr	j) falsch	k) wahr	

Lösung zu Aufgabe A2.4

$\mathfrak{P}(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, A\}$

Lösung zu Aufgabe A2.5

a)

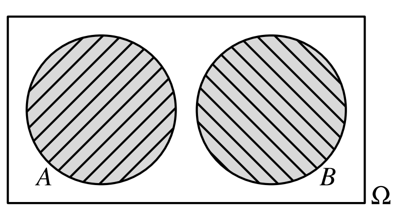


b)

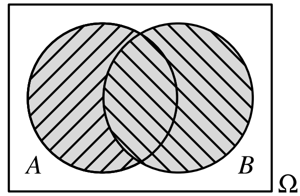
- $A \cap B \cap C = \{2\}$
- $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8,10\}$
- $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C) = \{4\}$
- $C \cap (A \backslash B) = \varnothing$
- $A \backslash (B \cup C) = \{6,8,10\}$

Lösung zu Aufgabe A2.6

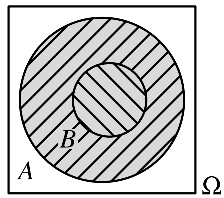
a) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \backslash B = A$
$\Rightarrow (A \backslash B) \cup B = A \cup B$



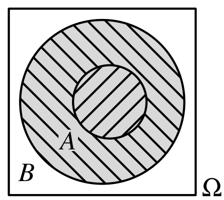
b) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$,
gilt übrigens **stets**!



c) $A \cap B = B$
$\Rightarrow (A \backslash B) \cup B = A$



d) $A \cap B = A$
$\Rightarrow (A \backslash B) \cup B = B$



A3. Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Aufgabe A3.1

Transformieren Sie die folgenden Zahlen in die jeweils angegebenen Zahlensysteme:

a) $11{,}6875_{10}$ in das Dualsystem,
b) 3451_{10} in das Hexadezimalsystem,
c) 101011100010_2 in das Hexadezimalsystem,
d) $110110011{,}0101_2$ in das Dezimalsystem.

Aufgabe A3.2

Geben Sie zu den folgenden Zahlen an, zu welcher der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sie gehören: -2; 5; $2{,}7$; $3/8$; π; e; $7i$; $\sqrt{3}$; $5+i$.

Aufgabe A3.3

Berechnen Sie folgende Summen:

a) $\sum_{i=1}^{10} i$, b) $\sum_{i=1}^{n} (2i+10)$, c) $\sum_{j=1}^{5} \frac{3j(-1)^j - 1}{3j}$,

d) $\sum_{i=4}^{8} \frac{2i+3(-1)^i}{i^2}$, e) $\sum_{i=-2}^{4} \frac{(-i)^3}{2^i}$, f) $\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2}{i+1} + \sum_{i=1}^{2} \frac{i(i-1)}{i^2}$,

g) $\sum_{j=-2}^{3} (-3)^j \, 2^{10-j}$,

Aufgabe A3.4

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:
a) $7+12+17+22+27$, b) $-3+4/2-5/3+6/4-\ldots$.

Aufgabe A3.5

Für welchen Wert j ergibt nachfolgender Ausdruck stets null?

$$\sum_{i=1}^{n} 2ij - 4\left(\sum_{i=2}^{n+1} 4i - 4n\right)$$

Aufgabe A3.6

Gegeben sei die folgende Tabelle von n^2 Zahlen:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} .$$

Geben Sie unter Verwendung des Summenzeichens die Summe aller Elemente an, die

a) in der 2-ten bis $(n-k)$-ten Spalte stehen,
b) in der ℓ-ten bis n-ten Zeile stehen,
c) auf der Hauptdiagonalen stehen,
d) auf der Nebendiagonalen stehen,
e) im oberen Dreieck (einschließlich der Hauptdiagonalen) stehen,
f) außerhalb der Hauptdiagonalen stehen!

Aufgabe A3.7

Wie groß ist die Summe

a) der geraden b) der ungeraden

Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $|101 - k| < 26$?

Aufgabe A3.8

Berechnen Sie folgende Produkte:

a) $\prod_{i=1}^{5} 2$, b) $\prod_{i=0}^{3} 4$, c) $\prod_{i=2}^{5} 2i$, d) $\prod_{i=5}^{10} (2i-3)$,

e) $\prod_{i=-3}^{3} (15+3i)$, f) $\prod_{j=-2}^{3} \frac{2\cdot 3^j}{3+j}$, g) $\prod_{i=1}^{n} \frac{2i+2}{6i}$, h) $\prod_{i=-2}^{0} \frac{i^2-1}{i+3}$.

Aufgabe A3.9

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=1}^{3} i(j+2)$, b) $\sum_{i=3}^{5} \sum_{j=-1}^{1} i^{j+1}$, c) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{i+jn}{6}$, d) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j-1}{m\cdot n}$,

e) $\prod_{i=0}^{2} \prod_{j=1}^{3} j^i$, f) $\sum_{i=-1}^{1} \prod_{j=1}^{3} (i+2j)$, g) $\prod_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} i^{3-j}$.

Aufgabe A3.10

Geben Sie die Ergebnisse der folgenden Operationen an:

a) $1+2\cdot 3^4$, b) $4^{(3^2)}$, c) $(4^3)^2$.

Aufgabe A3.11

Fassen Sie, sofern möglich, vereinfachend zusammen (Produkte statt Summen bzw. Ausklammern):

a) $10^2 + 4\cdot 15^3$, b) $7^4 + 11^4 + 13^4$, c) $ax^2 + ay^2 + 2axy$,

d) $c^2 + c^x$, e) $a^x + 2a^{x+y} - na^{x-3}$.

Aufgabe A3.12

Berechnen Sie durch Umformen und ohne Taschenrechner:

a) $3^4 \cdot 27^2 \cdot 9^{-5}$, b) $\left(\frac{a^2b^4}{c}\right)^3 : \left(\frac{b^5c^{-2}}{a}\right)^2$, c) $\sqrt{a^4bc^{-2}} + \frac{3a^2\sqrt{b}}{c}$,

d) $\frac{10^2}{5^2 \cdot \sqrt{2^3}}$, e) $\operatorname{ld} 16 - \operatorname{ld} 64 + \operatorname{ld} 8$, f) $\frac{x^3+5x^2-11x+21}{x+7}$,

g) $125^{-1/2} \cdot \sqrt{5} \cdot 25^2$, h) $(16^3)^2 \cdot (18^4)^{-2} \cdot 12^{(-2^3)} \cdot 3^{(3^3)}$.

Aufgabe A3.13

Wie lautet die Lösung der folgenden Gleichung? $\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = 2$

Aufgabe A3.14

Üben Sie das Arbeiten auf Ihrem Taschenrechner:

a) $\lg 123 =$

b) $\lg 1{,}23 =$

c) $\lg e =$

d) $\lg 1000 =$

e) $\lg(3e) =$

f) $\ln 123 =$

g) $\ln 1{,}23 =$

h) $\ln e =$

i) $\ln 1000 =$

j) $\ln(3e) =$

Aufgabe A3.15

a) Welche numerische Beziehung besteht zwischen $\lg x$ und $\ln x$?

b) Bestimmen Sie den Logarithmus der Zahl 46 zur Basis 5,3!

c) Ist $x = \log_{50} 100$ größer oder kleiner als 1?

Aufgabe A3.16

Bestimmen Sie die Logarithmen der folgenden Ausdrücke:

a) $x \cdot y$, b) $\frac{x}{y}$, c) $\frac{x^2}{y^3}$, d) $x^{(5^3)} \cdot y^6 \cdot z^3$, e) $x^2 \cdot y + x \cdot y^2$,

f) $x^2 \cdot \sqrt[5]{y^3}$, g) $\sqrt[3]{x} \cdot y^{-1/3}$, h) $a \cdot \sqrt[c]{x^{-6}}$, i) $a^{\log_a(b)}$.

Aufgabe A3.17

Wie lauten die dualen Logarithmen der folgenden Zahlen:
25; 10; 4; 2; 1; 0,125?

Aufgabe A3.18

Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

a) $\lg(a)+\lg(b)-\lg(c)$, b) $-\lg(x)-\lg(y)$, c) $\lg(2)+2\cdot\lg(x)-2\cdot\lg(a)$,

d) $3\cdot(\lg(3)-2\cdot\lg(x)-0{,}5\cdot\lg(y))$, e) $\frac{1}{2}\cdot\lg(a)-\frac{1}{2}\cdot\lg(a^2-x)$,

f) $\lg\sqrt{3}-3\cdot\lg 9-12\cdot\lg\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Aufgabe A3.19

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $\lg x=1{,}2345$; b) $\ln x-4=1$; c) $\ln x^2=20$;

d) $\lg(3x-5)=2$; e) $\lg\left(\sqrt{x+1}\right)=1$; f) $\lg(x)+\lg(x-3)=1$;

g) $\lg(\lg x)=0$; h) $\lg(\ln x)=1$; i) $\ln(\lg x)=1$;

j) $\operatorname{ld} x=4$; k) $x-2\operatorname{ld}4=\operatorname{ld}8$; l) $3^x-5=8$.

Aufgabe A3.20

Bestimmen Sie Lösungen folgender Gleichungen und die Definitionsbereiche der enthaltenen Ausdrücke:

a) $\frac{5}{x}+\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x+2}$; b) $\frac{x^2-231}{x+9}-9x=4x$;

c) $7-x=\sqrt{x-1}$; d) $x^4+2x^2-15=0$.

Aufgabe A3.21

Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ auf analytischem Wege!

Aufgabe A3.22

Bestimmen Sie die Nullstelle x_0 des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 27x^3 + 221x^2 + 683x - 2646$$

im Intervall $[x_u, x_o] = [0, 4]$

a) mit der Methode der Intervallhalbierung,
b) mit der Regula-falsi-Iteration,

so dass $|f(x_0)| < 0{,}05$! (Rechnen Sie in den Zwischenschritten mit vier Nachkommastellen!)

Aufgabe A3.23

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $|x| < 4,\ x \in \mathbb{Z}$;
b) $x < 4,\ x \in \mathbb{R}$;
c) $x + y \leq 3,\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$;
d) $x < 0,\ x \in \mathbb{N}$;
e) $\sqrt{4x} > -2,\ x \in \mathbb{R}_0^+$;
f) $3x - 5 < -4x + 9,\ x \in \mathbb{R}$;
g) $5 + \frac{3 - 2x}{2} < 3x - \frac{2x + 1}{4},\ x \in \mathbb{Q}$;
h) $\frac{8}{x} < \frac{2}{3},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
i) $2x^2 - 14x + 20 < 0,\ x \in \mathbb{R}$;
j) $2x^2 - 14x + 20 > 0,\ x \in \mathbb{R}$;
k) $x^2 + 6x + 15 > 0,\ x \in \mathbb{R}$;
l) $x^2 \geq 16,\ x \in \mathbb{R}$;
m) $|2 - x| < 5,\ x \in \mathbb{Z}$;
n) $\frac{1}{|x-2| - 3} > 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$;
o) $|x - 2| \geq 5$;
p) $3 \cdot 0{,}1^{x-7} \leq 30$.

Aufgabe A3.24

Stellen Sie die Wertepaare (x, y) graphisch dar, die die folgenden vier Ungleichungen erfüllen: $y + x/2 \leq 4$; $y + 3x \leq 9$; $x \geq 0$; $y \geq 2$.

Aufgabe A3.25

In einer Möbelfabrik werden in einem gegebenen Zeitraum Tische und Stühle in den Mengen x_1 und x_2 hergestellt. Beide Produkte werden auf einer Sägemaschine, einer Hobelmaschine und in der Lackiererei bearbeitet. Die verfügbaren Kapazitäten sowie die Bearbeitungszeiten je Stuhl bzw. Tisch bei den drei Anlagen sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

	Bearbeitungszeit für		verfügbare
	1 Stuhl	1 Tisch	Kapazität
Sägemaschine	2 $[h]$	5 $[h]$	1.000 $[h]$
Hobelmaschine	5 $[h]$	4 $[h]$	1.000 $[h]$
Lackiererei	2 $[h]$	1 $[h]$	320 $[h]$

a) Beschreiben Sie die Produktionsmöglichkeiten durch ein System von Ungleichungen, das Sie anschließend graphisch darstellen!
b) Gibt es Mengenkombinationen, bei denen alle Kapazitäten voll ausgelastet sind?
c) Wie kann man für den Fall, dass es nicht möglich ist, alle Kapazitäten voll auszulasten, eine Vollauslastung aller Kapazitäten herbeiführen?

Aufgabe A3.26

Es ist $i^2 := -1$. Wie lauten i^3, i^4, i^5 und i^6?

Aufgabe A3.27

Seien $a = 5 - 3i$ und $b = -2 + i$. Berechnen Sie $a+b$, $a \cdot b$, a/b, a^2 und $a \cdot \overline{a}$!

Aufgabe A3.28

Berechnen Sie jeweils den Betrag und das Argument (Hauptwert in Radiant) der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z = 2 - i \cdot \sqrt{2}$
b) $z = -1 + i \cdot 3$
c) $z = -2 - i$

Aufgabe A3.29

Stellen Sie die komplexen Zahlen aus der vorigen Aufgabe in der GAUSSschen Zahlenebene dar!

Aufgabe A3.30

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten dar!

$a = 3 + 4i, \qquad b = 6 - 6i, \qquad c = -5i, \qquad d = -1 + i$

Aufgabe A3.31

Transformieren Sie folgende komplexe Zahlen von der Darstellung in Polarkoordinaten in die allgemeine Form!

$a = (2;\ \pi/2)$, $b = (5;\ 0)$, $c = (0{,}8;\ -2\pi/3)$, $d = (5\sqrt{2};\ -\pi/4)$

Aufgabe A3.32

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von
$y = 2 \cdot e^{i \cdot \pi/2}$ und $z = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4))$!

b) Bestimmen Sie $y - z$, $y \cdot z$, z/y und z^{-1} in algebraischer Form!

Aufgabe A3.33

Bestimmen Sie folgende Werte ohne Taschenrechner!

$\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cot\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

Aufgabe A3.34

Sie beobachten einen Turm aus einer (ebenerdigen) Entfernung von 100 Metern und messen einen Winkel von 30° vom Boden bis zur Spitze.

a) Wie lautet der Winkel im Bogenmaß?

b) Wie hoch ist der Turm?

Aufgabe A3.35

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck (a, b – Katheten, c – Hypothenuse) mit $a = 6$cm und $c = 12$cm.

a) Wie groß ist der Winkel α in Altgrad? (Hinweis: α liegt gegenüber von a.)

b) Wie groß ist der Winkel β in Altgrad? (Hinweis: β liegt gegenüber von b.)

c) Wie lang ist b?

Aufgabe A3.36

Beweisen und verallgemeinern Sie die folgenden Aussagen! Für ein Dreieck mit $c = 8$,

a) $b = 9$ und $\beta = 76°$ gibt es genau eine Lösung,

b) $b = 7$ und $\beta = 37°$ gibt es genau zwei Lösungen,

c) $b = 5$ und $\beta = 57°$ gibt es keine Lösung.

Lösungen zum Abschnitt A3

Lösung zu Aufgabe A3.1

a) $$\begin{aligned} 11:2 &= 5 \quad \text{Rest } \mathbf{1} \\ 5:2 &= 2 \quad \text{Rest } \mathbf{1} \\ 2:2 &= 1 \quad \text{Rest } \mathbf{0} \\ 1:2 &= 0 \quad \text{Rest } \mathbf{1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 11_{10} = 1011_2$

$$\begin{aligned} 0{,}6875 &= a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + a_3 \cdot 2^{-3} + \ldots \\ &= a_1 \cdot 0{,}5 + a_2 \cdot 0{,}25 + a_3 \cdot 0{,}125 + \ldots \\ &= \mathbf{1} \cdot 0{,}5 + \mathbf{0} \cdot 0{,}25 + \mathbf{1} \cdot 0{,}125 + \mathbf{1} \cdot 0{,}0625 + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0{,}6875_{10} = 0{,}1011_2$
$\Rightarrow 11{,}6875_{10} = 1011{,}1011_2$

b) $$\begin{aligned} 3451:16 &= 215 \quad \text{Rest } 11 \\ 215:16 &= 13 \quad \text{Rest } 7 \\ 13:16 &= 0 \quad \text{Rest } 13 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 3451_{10} = D7B$

c) $101011100010_2 = 2_{10} + 32_{10} + 64_{10} + 128_{10} + 512_{10} + 2048_{10} = 2786_{10}$

$$\begin{aligned} 2786:16 &= 174 \quad \text{Rest } 2 \\ 174:16 &= 10 \quad \text{Rest } 14 \\ 10:16 &= 0 \quad \text{Rest } 10 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 101011100010_2 = 2786_{10} = AE2_{16}$

oder: $\underbrace{1010}_{A} \,|\, \underbrace{1110}_{E} \,|\, \underbrace{0010}_{2}$

d) $110110011{,}0101_2 = 2^{-4} + 2^{-2} + 2^0 + 2 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8 = 435{,}3125_{10}$

Lösung zu Aufgabe A3.2

$-2 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{N}$; $2{,}7 \in \mathbb{Q}$; $3/8 \in \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{R}$; $e \in \mathbb{R}$; $7i \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
$\sqrt{3} \in \mathbb{R}$; $5 + i \in \mathbb{C}$.

Lösung zu Aufgabe A3.3

a) $\sum\limits_{i=1}^{10} i = 1+2+\ldots+10 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i+10) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} i + 10n = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + 10n = n^2 + 11n$

c) $$\sum_{j=1}^{5} \frac{3j(-1)^j - 1}{3j} = \frac{-3-1}{3} + \frac{6-1}{6} + \frac{-9-1}{9} + \frac{12-1}{12} + \frac{-15-1}{15} =$$
$$\frac{-4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{-10}{9} + \frac{11}{12} + \frac{-16}{15} = \frac{-240+150-200+165-192}{180} = -\frac{317}{180}$$
$$= -1{,}76\overline{11}$$

d) $$\sum_{i=4}^{8} \frac{2i+3(-1)^i}{i^2} = \frac{8+3}{16} + \frac{10-3}{25} + \frac{12+3}{36} + \frac{14-3}{49} + \frac{16+3}{64} = 1{,}90553$$

e) $$\sum_{i=-2}^{4} \frac{(-i)^3}{2^i} = \frac{8}{1/4} + \frac{1}{1/2} + \frac{0}{1} - \frac{1}{2} - \frac{8}{4} - \frac{27}{8} - \frac{64}{16} = 32 + 2 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{27}{8} - 4$$
$$= 24{,}125$$

f) $$\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2}{i+1} + \sum_{i=1}^{2} \frac{i(i-1)}{i^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{0}{1} + \frac{2}{4} =$$
$$\frac{30+80+135+192+30}{60} = \frac{467}{60} = 7{,}78\overline{33}$$

g) $$\sum_{j=-2}^{3} (-3)^j\, 2^{10-j} = \frac{1}{9}\cdot 2^{12} - \frac{1}{3}\cdot 2^{11} + 2^{10} - 3\cdot 2^9 + 9\cdot 2^8 - 27\cdot 2^7 = -1891{,}\overline{55}$$

Lösung zu Aufgabe A3.4

a) $7+12+17+22+27 = \sum\limits_{i=1}^{5} (5i+2)$

b) $$-3 + 4/2 - 5/3 + 6/4 - \ldots = \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^i \frac{i}{i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{i+2}{i}$$