Jörg Meyer

Die Sonnenuhr und ihre Theorie

Verlag
Harri
Deutsch

Der Autor
Dr. Jörg Meyer lehrte Physik an der Universität Paderborn.

Die Webseite zum Buch
http://www.harri-deutsch.de/1824.html

Der Verlag
Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1824-3

1. Auflage 2008

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt <www.betz-druck.de>
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Sonnenuhr hat abgedankt. Der Kranz ihrer Stunden ist verblichen, krumm und rostig der Schattenstab. Die Insignien ihrer einstigen Macht erwecken erstauntes Achselzucken in unserer Zeit, in der eine hundertstel Sekunde über Sieg oder Niederlage entscheiden kann. Und doch übt sie bis heute ihren Zauber aus, wenn wir auch nicht mehr wie einst im Wandern des Schattens unmittelbaren Ausdruck kosmischen Waltens sehen.

Noch gibt es Berufsgruppen, die sich, wenn auch nur am Rand, mit Sonnenuhren beschäftigen. Der Architekt will ein öffentliches Gebäude mit einer Sonnenuhr verzieren. Der Bildhauer müht sich, ihr Gestalt zu geben, und hofft, ein altes Betätigungsfeld zurückzugewinnen. Lehrer und Schüler bessern mit ihr die magere Kost der mathematischen Übungsaufgaben auf. Der Historiker oder Archäologe versucht, aus Funden oder Beschreibungen alter Sonnenuhren deren Wirkungsweise zu verstehen und sie aus dem Denken und Wissen der damaligen Zeit zu erklären. Er deckt Entwicklungen auf und klärt Prioritäten.

Zum Nutzen all der oben Genannten habe ich das vorliegende Buch geschrieben, vor allem aber für den Neugierigen, der das Prinzip der Sonnenuhr verstehen will, der Geschmack daran findet, vom Allgemeinen zum Speziellen fortzuschreiten und dem ich das Vergnügen einer Entdeckungsreise bereiten kann. Denn im Mittelpunkt steht die Theorie der Sonnenuhr selbst, und aus ihr entwickle ich ihre unzähligen Spielarten. Soweit mir bekannt, ist dies die erste wirklich systematische Darstellung der Theorie der Sonnenuhr. Die vorhandenen Bücher stellen das historische Moment in den Vordergrund oder schränken sich selbst ein, indem sie ihrem Publikum nur mathematische Schonkost anzubieten wagen. Das ist durchaus verständlich, denn die Sonnenuhr selbst hat als Gegenstand der Forschung längst das Interesse der Wissenschaft verloren und wird von ihren Liebhabern am Leben gehalten.

Die Theorie der Sonnenuhr bietet sich geradezu als Musterbeispiel einer physikalischen Theorie an. Sie ist einfach, aber nicht trivial. Sie läßt sich mit geringen physikalischen Voraussetzungen begründen und ohne großen mathematischen Aufwand bis zur Anwendung durchrechnen. Ihre Einfachheit beruht auf zwei Gründen. Der erste, ihr Uhrwerk ist überschaubar: Die Erde umkreist die Sonne und dreht sich dabei um ihre Achse. Hierdurch wechseln die Beleuchtungsverhältnisse eines festen Punktes der Erdoberfläche, und der Schatten eines undurchsichtigen Gegenstandes wandert über die ihn auffangende Fläche.

Zum andern ist die Ablesegenauigkeit der Sonnenuhr von sich aus begrenzt. Jeder Schatten, den ein Gegenstand im Sonnenlicht wirft, ist von einem Saum umgeben. Wegen dieses Halbschattens läßt sich eine Sonnenuhr nicht beliebig genau ablesen. Ein Wermutstropfen dem Konstrukteur, der Theorie eine heilsame Arznei. Durch sie verträgt die Sonnenuhr all die Näherungen, welche die Theorie vereinfachen. Man darf die Nutation der Erdachse vernachlässigen, die Erde als perfekte Kugel betrachten, Refraktion und Aberration des Lichts außer acht lassen usw. Und all das, weil die Sonnenuhr so hübsch ungenau ist.

Den astronomischen Grundlagen habe ich breiten Raum gegeben, soweit sie die Sonnenuhr betreffen. Denn nur im Zusammenhang mit der unterliegenden Astronomie läßt sich die Sonnenuhr überhaupt verstehen. In der Tat, ohne Theorie sagt der Schatten nicht mehr, als ein Blick auf die Sonne selbst lehren könnte. Erst die Theorie schafft die Wirklichkeit, in der eine Sonnenuhr Resultate zeigt. Stundenwinkel, Deklination und Sternzeit sind solche theoretischen Begriffe, die sich an der Sonnenuhr konkretisieren lassen.

Was die Mathematik betrifft, handele ich die Geometrie in analytisch-vektorieller Formulierung ab. Die Anforderungen sind bescheiden und sollten kaum über das hinausgehen, was die höheren Schulen an Vektorrechnung lehren. Das gleiche gilt für die Differential- und Integralrechnung. Ich habe mir große Mühe gegeben, die einzelnen Rechenschritte sorgfältig zu erklären und alle etwas weiteren Sprünge vorher anzukündigen. Jeder willige Leser sollte den vorgeschlagenen Pfad erklimmen können. Andererseits weiche ich nicht aus, wenn das Gelände steiler wird und bringe Beweise, die man andernorts vielleicht vergebens sucht.

Auch den Bedürfnissen der Anwender habe ich versucht Rechnung zu tragen. Alle bedeutenden Ergebnisse habe ich nochmals mit ihren Voraussetzungen zusammengefaßt. Viele wichtige Spezialfälle habe ich zusätzlich abgehandelt, und die Lineaturen zahlreicher Sonnenuhren in Abbildungen dargestellt. Die analytische Formulierung erlaubt, die Ergebnisse unmittelbar auf den Rechner zu übertragen. Hier erschließt sich dem, der mit ihm umzugehen versteht, die Möglichkeit, jedwedes Zifferblatt in Windeseile vom Rechner zeichnen zu lassen, ohne vorher in die Theorie einzusteigen.

Die Sonnenuhr ist vor allem ein kulturelles Gut, in dem sich die Wandlungen und Entwicklungen des physikalischen Zeitbegriffs widerspiegeln. Der Geschichte der Zeitmessung widme ich deshalb ein eigenes Kapitel, in dem ich zusammengetragen, was ich dazu in den Büchern gefunden habe. Ich bin bis in die jüngste Vergangenheit der Zeitmeßkunde vorgedrungen, weiter als für die Sonnenuhr vonnöten. Aber der Umsturz, hervorgerufen durch die Atomuhr, ist ein so faszinierendes Kapitel, daß ich es dem Leser nicht vorenthalten will.

Beim Lesen des vorliegenden Buches wird es sich bemerkbar machen, daß es ein Physiker geschrieben hat und kein Historiker. Die beiden Wissenschaftler unterscheiden sich in ihrem Selbstverständnis grundlegend. Dem Physiker ist die Autorenschaft eines Satzes in einer physikalischen Theorie von untergeordneter Bedeutung. Vom ersten Semester an lernt er, für das, was er vertritt, geradezustehen und keine Autoritäten vorzuschieben. Diese Haltung erlaubt ihm, auch bekannte Dinge souverän so zu behandeln, als habe er sie selbst erfunden. Sie macht ihn frei, nach eigenem Ermessen zu schalten und zu walten. Keine der beschriebenen Sonnenuhren habe ich selbst erfunden, aber den Weg zu ihnen auf einer vergnüglichen Fahrt neu entdeckt. Auf dem historischen Feld führt dieses Selbstverständnis zu einer tödlichen Versuchung, nämlich Sinn zu machen, anstatt, wie der Historiker, die mühevolle Arbeit auf sich zu nehmen, durch vergleichende Studien den Sinn zu ergründen. Alle historischen Aussagen sind deshalb als *Wenn-dann*-Aussagen zu lesen: Vorausgesetzt meine physikalische Interpretation der genannten historischen Aussage trifft zu, dann gelten die dargelegten physikalischen Folgerungen.

Teil I.

Astronomische Grundlagen

1. Die Bahn der Erde um die Sonne

Unsere Milchstraße, vernahm ich, eine unter Billionen, schließe beinahe an ihrem Rande, beinahe als Mauerblümchen, dreißigtausend Jahreslichtläufe von ihrer Mitte entfernt, unser lokales Sonnensystem ein, mit seinem riesigen, vergleichsweise aber keineswegs bedeutenden Glutball, genannt »die« Sonne, obwohl sie nur den unbestimmten Artikel verdiene, und den ihrem Anziehungsfeld huldigenden Planeten, darunter die Erde, deren Lust und Last es sei, sich mit der Geschwindigkeit von tausend Meilen die Stunde um ihre Achse zu wälzen und, in der Sekunde zwanzig Meilen zurücklegend, die Sonne zu umkreisen, wodurch sie ihre Tage und Jahre bilde, – die ihren wohlgemerkt, denn es gebe ganz andere.
(THOMAS MANN, *Bekenntnisse des Hochstaplers Felix Krull*)

1.1. Einleitung

Die Erde dreht sich beständig um ihre Achse und zieht zugleich auf ihrer jährlichen Bahn um die Sonne. Beide Bewegungen überlagern sich und bestimmen den täglichen Lauf der Sonne über den Himmel. Sie legen fest, wo die Sonne morgens aufgeht, wie hoch sie am Mittag steht und wo sie am Abend untergeht. Diese zweifache Bewegung der Erde regiert den Lauf der Sonne und damit den Gang der Sonnenuhr.

Die Gesetze, nach denen sich die Planeten, also auch die Erde, um die Sonne bewegen, wurden von JOHANNES KEPLER (1571-1630) entdeckt. Ein halbes Jahrhundert später zeigte Sir ISAAC NEWTON (1642-1727), daß die drei KEPLERschen Gesetze aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz abgeleitet werden können, das er in seinen *Prinzipien* 1687 aufgestellt hatte. Ich will diese Herleitung nicht geben, man kann sie in allen Lehrbüchern der theoretischen Physik finden, sondern gleich mit der Auswertung der KEPLERschen Gesetze beginnen. Unser Ziel ist, den Ort der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne zu jedem Zeitpunkt berechnen zu können.

1.2. Die KEPLERschen Gesetze

1.2.1. Das erste KEPLERsche Gesetz

Das erste KEPLERsche Gesetz beschreibt die Gestalt der Planetenbahnen:

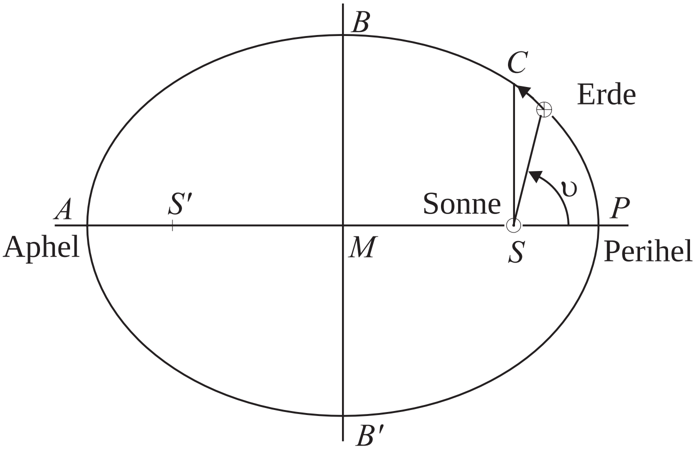

Abb. 1.1: Bezeichnungen an der Bahnellipse. Die Abbildung zeigt eine Bahnellipse mit den beiden Brennpunkten S und S'. Die Sonne stehe in S und die Erde (der Planet) bewege sich in Pfeilrichtung auf der Ellipse. In P ist die Erde der Sonne am nächsten; sie steht im *Perihel*. In A ist sie am weitesten von der Sonne entfernt; sie steht im *Aphel*. M: Mittelpunkt, $a = \overline{MP}$: große Halbachse, $b = \overline{MB}$: kleine Halbachse, $p = \overline{CS}$: *Parameter*, $e = \overline{MS}$: *lineare Exzentrizität*, $\varepsilon = e/a$: *numerische Exzentrizität*. Der Winkel v zwischen dem Radiusvektor von der Sonne zur Erde und der großen Halbachse heißt *wahre Anomalie*.
sonne10.tex

Axiom 1.1. *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*

Hier stelle ich die wichtigsten Beziehungen zwischen den charakteristischen Größen der Ellipse zusammen:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \tag{1.1}$$

$$b = \frac{p}{+\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{1.2}$$

$$e^2 = a^2 - b^2, \tag{1.3}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a}. \tag{1.4}$$

Die Exzentrizität der Erdbahn ist klein, $\varepsilon \approx 0,01671$. Der relative Unterschied der beiden Halbachsen beträgt nur ein wenig mehr als $1/100$ Prozent:
$(a-b) : a = 0,0001396$.

Die beiden Brennpunkte liegen dicht nebeneinander, ihr Abstand erreicht keine 4 Prozent der großen Halbachse: $2e : a = 2\varepsilon = 3,342\%$. Das bedeutet, daß die beiden Brennpunkte der Erdbahn um 3,6 Sonnendurchmesser voneinander getrennt sind (der Erdbahndurchmesser macht etwas mehr als das Hundertfache des Sonnendurchmessers aus).

Wir benötigen im folgenden zwei analytische Darstellungen der Ellipse:

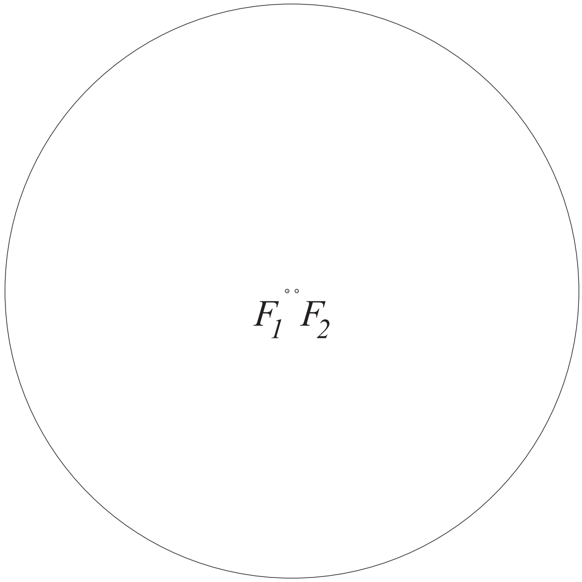

Abb. 1.2: Die Bahnellipse der Erde. Die Zeichnungen in den Büchern übertreiben gewöhnlich den Ellipsencharakter der Erdbahn. Auf das Format dieses Buches verkleinert läßt sich die Erdbahnellipse nicht von einem Kreis unterscheiden. Mit Mühe kann man den Abstand der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 erkennen.

1. Die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten (Nullpunkt ist der Brennpunkt S):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v} \tag{1.5}$$

Definition 1.1. Der Winkel v heißt **wahre Anomalie**.

Die wahre Anomalie mißt den Winkel zwischen dem Radiusvektor vom Brennpunkt S zu einem beliebigen Punkt P auf der Ellipse und der großen Halbachse (vgl. Abb. 1.1!).

2. Die parametrische Darstellung der Ellipse

$$\begin{aligned} x &= a \cos E, \\ y &= b \sin E. \end{aligned} \tag{1.6}$$

(Der Nullpunkt liegt im Mittelpunkt M der Ellipse. Die x-Achse zeigt in Richtung der großen Halbachse, die y-Achse in Richtung der kleinen.)

Definition 1.2. Der Winkel E heißt **exzentrische Anomalie**.

Aus der parametrischen Darstellung folgt übrigens unmittelbar die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.7}$$

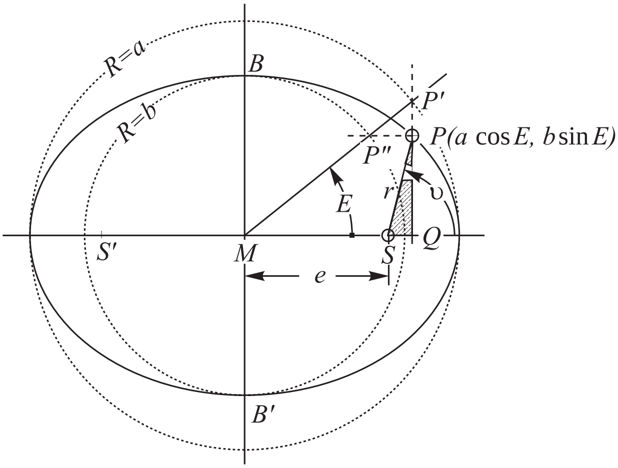

Abb. 1.3: Die Parameterdarstellung der Ellipse. Man schlage um den Mittelpunkt M der Ellipse zwei Kreise, einen mit dem Radius der großen Halbachse $(R = a)$ den anderen mit dem der kleinen $(R = b)$. Ein von M unter dem Winkel E auslaufender Halbstrahl schneidet die Kreise in den Punkten $P'(a \cos E, a \sin E)$ und $P''(b \cos E, b \sin E)$. Der nach Gleichung (1.6) auf der Ellipse liegende Punkt $P(a \cos E, b \sin E)$ hat also die gleiche x-Komponente wie P' und die gleiche y-Komponente wie P''. Die Parallele zur Hauptachse durch P'' und die Parallele zur Nebenachse durch P' schneiden sich also im Ellipsenpunkt P.
Achtung! Die exzentrische Anomalie E mißt nicht den Winkel zwischen der großen Halbachse und dem Radiusvektor von M nach P sondern zwischen der großen Halbachse und dem Radiusvektoren zu den Hilfspunkten P' und P''!

Um an späterer Stelle den Fluß der Erörterungen nicht zu unterbrechen, wollen wir den Radiusvektor und die wahre Anomalie v als Funktion der exzentrischen Anomalie E darstellen.

Satz 1.1.

$$r = a - e \cos E = a(1 - \varepsilon \cos E), \tag{1.8}$$

$$\tan \frac{v}{2} = +\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{E}{2}. \tag{1.9}$$

Gleichung (1.9) bestimmt $v/2$ modulo π, das heißt v bis auf Vielfache von 2π!

Beweis: (1.8) entspricht zwei Gleichungen. Die eine geht aus der anderen hervor, indem man die lineare durch die numerische Exzentrizität ersetzt: $\varepsilon = e/a$. Der eigentliche Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten aus dem schraffierten Dreieck der Abbildung 1.3 entnehmen. Wir lesen ab:

$$r \cos v = \overline{SQ} = a \cos E - e, \tag{1.10}$$

$$r \sin v = \overline{PQ} = b \sin E. \tag{1.11}$$

Beide Gleichungen quadrieren wir und addieren sie unter Berücksichtigung von $b^2 = a^2 - e^2$. Mit der für alle Winkel gültigen Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

erhalten wir

$$r^2 = (a - e\cos E)^2.$$

Da der Abstand r stets positiv ist und $e \leq a$, ergibt die positive Quadratwurzel das gewünschte Ergebnis. (1.9) beweisen wir über die Tangens-Halbe-Beziehung

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Für $\alpha = v$ erhalten wir nach (1.10) und (1.11)

$$\tan\frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1+\cos v} = \frac{b\sin E}{r + a\cos E - e}.$$

Wir ersetzen r nach Gleichung (1.8):

$$\tan\frac{v}{2} = \frac{b\sin E}{a - e\cos E + a\cos E - e} = \frac{b}{a-e}\,\frac{\sin E}{1+\cos E}.$$

Der Bruchterm am Ende ergibt $\tan(E/2)$. Den davor stehenden Faktor formen wir mit Hilfe der Gleichungen (1.1) bis (1.4) um:

$$\frac{b}{a-e} = \frac{b}{a-\varepsilon a} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon} = +\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Mit dem Ausdruck ganz links ist auch die Wurzel positiv zu nehmen. Berücksichtigen wir dieses Ergebnis in der vorstehenden Gleichung, so erhalten wir das gesuchte Resultat, die Gleichung (1.9). □

1.2.2. Das zweite KEPLERsche Gesetz

Die Angabe der Bahngleichung $r = r(v)$ löst noch nicht unser Problem. Wir möchten auch wissen, wann die Erde sich an einer bestimmten Stelle der Bahn befindet. Dazu müßten wir die wahre oder exzentrische Anomalie als Funktion der Zeit kennen. Dazu verhilft uns das zweite KEPLERsche Gesetz, es beschreibt den zeitlichen Durchlauf der Bahn:

Axiom 1.2. *Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Das zweite KEPLERsche Gesetz heißt deshalb auch Flächensatz, es drückt – physikalisch gesprochen – die Erhaltung des Bahndrehimpulses des Planeten aus.

Ist $A(t)$ die vom Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstrichene Fläche, so lautet die mathematische Formulierung des zweiten Gesetzes

Satz 1.2.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h. \tag{1.12}$$

h ist eine jedem Planeten eigene Konstante der Bewegung; der Faktor 1/2 ist Konvention. $\frac{dA}{dt}$ *heißt Flächengeschwindigkeit.*

Plausibilitätsbetrachtung: So wie ein Auto mit konstanter Geschwindigkeit $v = ds/dt$ fährt, wenn es in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, so muß die Flächengeschwindigkeit des Radiusvektors konstant sein, der dem Flächensatz genügt. □

Da die zeitliche Ableitung der überstrichenen Fläche konstant ist, kann A nur eine lineare Funktion der Zeit sein:

$$A(t) = \frac{1}{2}h(t-\tau). \tag{1.13}$$

Man pflegt als τ den Zeitpunkt zu wählen, in dem der Planet im Perihel steht. Dann ist $A(t)|_{t=\tau} = 0$, und $A(t)$ mißt die Ellipsenfläche zwischen dem momentanen Radiusvektor und dem Radiusvektor zum Perihel.

Während eines Umlaufs überstreicht der Planet einmal die Ellipsenfläche $A = \pi ab$. Nach dem Flächensatz benötigt er für die gleiche Fläche stets die gleiche Zeit. Das heißt, aufgrund des Flächensatzes (des 2. Kepler-Gesetzes) bewegen sich die Planeten periodisch um die Sonne. Die Konstante h kann man durch die Ellipsenfläche und die Bahnperiode T ausdrücken:

$$\pi ab = \frac{1}{2}hT$$

oder

$$h = \frac{2\pi ab}{T}. \tag{1.14}$$

Führt man die mittlere Bahnfrequenz

$$n := \frac{2\pi}{T} \tag{1.15}$$

ein, erhält man entsprechend

$$h = abn. \tag{1.16}$$

Der Flächensatz lautet in diesen Größen

$$A(t) = \frac{\pi ab}{T}(t-\tau) = \frac{1}{2}\,abn(t-\tau) \tag{1.17}$$