

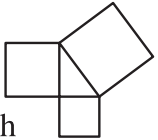
Andreas Pfeifer

Finanzmathematik Übungsbuch

Mit Formelsammlung

Über 170 Aufgaben zur Finanzmathematik
mit Lösungen und ausführlichen Zwischenschritten

Verlag
Harri
Deutsch



Prof. Dr. Andreas Pfeifer ist Professor für Finanz- und Wirtschaftsmathematik an der Hochschule Darmstadt (University of Applied Sciences).
E-Mail: andreas.pfeifer@h-da.de

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfrstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliographische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1839-7

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Informationen in diesem Werk wurden sorgfältig unter Verwendung von Quellen, die wir für zuverlässig halten, erstellt. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Für fehlerhafte Angaben, Hinweise, Ratschläge und deren Folgen werden weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernommen. Die dargestellten Informationen dienen nicht als Anlageberatung oder Empfehlung für irgendwelche finanziellen Geschäfte.

Eingetragene Warenzeichen sind nicht besonders gekennzeichnet. Deshalb ist den Bezeichnungen nicht zu entnehmen, ob sie freie Warennamen sind bzw. ob Patente oder Gebrauchsmuster vorliegen.

1. Auflage 2009

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2009

Druck: fgb • freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

Vorwort

Das vorliegende Übungsbuch enthält über 170 Aufgaben¹ zur Finanzmathematik mit allen Lösungen und ausführlichen Herleitungen. Sie finden neben Aufgaben zur „klassischen Finanzmathematik“, wie beispielsweise zu Zinsberechnungen, auch über 50 Aufgaben zur Bewertung derivativer Finanzprodukte und zum Value-at-Risk. Eine kompakte Zusammenstellung der wichtigsten Sätze und Formeln der Finanzmathematik hilft bei der Bearbeitung. Zum Abschluss finden Sie drei Tests zur Überprüfung Ihrer Kenntnisse.

Aufgaben: Am Anfang (Kapitel 1 bis 6) stehen die Aufgaben aus dem Gebiet der klassischen Finanzmathematik, also zur Zins- und Zinseszinsrechnung, zum Äquivalenzprinzip, zur Renten- und Tilgungsrechnung und zur Abschreibung. Danach (Kapitel 7 bis 9) folgen Aufgaben zur Bewertung festverzinslicher Wertpapiere, zu Investmentfonds und zur Portfoliooptimierung. Den Abschluss (Kapitel 10 und 11) bilden viele Aufgaben zu Derivaten, das heißt unter anderem Aufgaben zu Optionen, Futures, Forwards, FRAs, Swaps, Caps und zum Value-at-Risk.

Tests: Anhand dreier Tests mit Aufgaben zu den Kapiteln 1 bis 6, 7 bis 9 sowie 10 und 11 können Sie Ihre Kenntnisse überprüfen.

Lösungen: Der umfangreichste Teil dieses Buches enthält die Lösungen zu allen Aufgaben und Tests mit ausführlichen Darstellungen der Lösungswege, wobei das Folgende zu beachten ist:

Mit Zwischenresultaten wird in der Regel ungerundet weitergerechnet, auch wenn die Zwischenresultate gerundet dargestellt werden. Endergebnisse bei Prozentsätzen werden in der Regel mit drei Nachkommastellen angegeben, auch wenn z. B. nach der Preisangabenverordnung nur zwei Stellen gefordert werden.

Manchmal werden Endergebnisse in Euro statt mit zwei mit viel mehr Nachkommastellen angegeben. Dadurch ist leichter festzustellen, wenn Sie die Aufgaben selbst lösen, ob Ihr Ergebnis mit der Musterlösung übereinstimmt.

Bei den Lösungen wird in einigen Fällen auf Sätze verwiesen, die Sie in der Formelsammlung dieses Buches finden.

¹ Die in diesem Buch aufgeführten Aufgaben sind nicht die Aufgaben aus meinem Lehrbuch Praktische Finanzmathematik, das auch im Verlag Harri Deutsch erschienen ist, sondern andere, neue Aufgaben.

Formelsammlung: Dieser Teil enthält wichtige Sätze und Formeln, die bei der Lösung der Aufgaben hilfreich sind. Die Einteilung entspricht der Kapiteleinteilung meines Lehrbuches „Praktische Finanzmathematik“. Die Nummerierung der Sätze in diesem Buch und im Lehrbuch ist bis auf einige wenige Sätze in Kapitel 10 weitestgehend identisch.

Das Stichwortverzeichnis ermöglicht den schnellen Zugriff auf die Sie interessierenden Themen der Formelsammlung.

Webseite zum Buch: Auf der Internetseite <http://www.harri-deutsch.de/1839.html> finden Sie

- Aktualisierungen und – sofern nötig – Verbesserungen zu diesem Buch
- Tabellenkalkulationsblätter zu den drei Tests für die Software-Programme Microsoft Excel und OpenOffice Calc²
- Die drei Tests als druckbare PDF-Dateien, die von Dozenten in ihrem Unterricht als Kursunterlagen verteilt werden dürfen.

Wenn Sie mir Hinweise auf Fehler oder Ungenauigkeiten geben, bin ich Ihnen dankbar und werde um eine schnelle Antwort bestrebt sein.

Groß-Zimmern, im Januar 2009

Andreas Pfeifer

² Open Office ist eine kostenlos erhältliche Software mit Textverarbeitung, Tabellenkalkulation und anderen insgesamt als Bürosoftware bezeichneten Programmen. Das Modul OpenOffice Calc dient zur Durchführung von Kalkulationen und Berechnungen und ist für die Lösung finanzmathematischer Fragestellungen gut geeignet.

Inhaltsübersicht

Teil I: Aufgaben	1
1 Grundlagen	1
1.1 Rechnen.....	1
1.2 Anlagemöglichkeiten	2
1.3 Folgen und Summen	2
2 Zinsrechnung	4
2.1 Prozentrechnung.....	4
2.2 Einfache Zinsen.....	6
2.3 Zinseszinsen, einschließlich unterjähriger und stetiger Verzinsung	9
2.4 Gemischte Verzinsung	11
3 Äquivalenz und Effektivverzinsung	12
3.1 Äquivalenz	12
3.2 Effektivverzinsung	13
3.3 Investitionsrechnung	14
3.4 Unterschiedliche Zinssätze, Diskontierungsfaktoren	14
4 Rentenrechnung.....	16
5 Abschreibung.....	18
6 Tilgungsrechnung.....	21
6.1 Verzinsliche Wertpapiere.....	21
6.2 Darlehen.....	22
7 Bewertung festverzinslicher Wertpapiere.....	25
7.1 Barwert, Rendite, Arbitrage	25
7.2 Duration, Konvexität und andere Kennzahlen	27
8 Investmentfonds	29
9 Grundlagen der Portfoliotheorie.....	30
10 Derivative Finanzprodukte	34
10.1 Finanzmärkte.....	34
10.2 Variabel verzinsliche Anleihen.....	34
10.3 Futures / Forwards	35
10.4 Optionen.....	37
10.5 Forward-Rate-Agreement (FRA)	42

10.6 Caps, Floors und Collars	42
10.7 Swaps	44
10.8 Weitere Finanzprodukte	45
11 Value-at-Risk.....	47
Teil II: Tests.....	51
Test 1 (zu den Kapiteln 1 bis 6).....	51
Test 2 (zu den Kapiteln 7 bis 9).....	54
Test 3 (zu den Kapiteln 10 bis 11).....	56
Teil III: Lösungen	58
Lösungen zu den Aufgaben	58
Lösungen zum Test 1	154
Lösungen zum Test 2.....	162
Lösungen zum Test 3.....	165
Teil IV: Formelsammlung.....	168
1 Grundlagen	168
2 Zinsrechnung	168
3 Äquivalenz und Effektivverzinsung	172
4 Rentenrechnung.....	174
5 Abschreibung.....	178
6 Tilgungsrechnung	179
7 Bewertung festverzinslicher Wertpapiere.....	183
8 Investmentfonds	187
9 Grundlagen der Portfoliotheorie.....	188
10 Derivative Finanzprodukte	191
11 Value-at-Risk.....	200
12 Verteilungen	202
Stichwortverzeichnis zur Formelsammlung.....	207

Teil I: Aufgaben

1 Grundlagen

1.1 Rechnen

Aufgabe 1.1.1:

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$a) \frac{-37-9}{6-\frac{1}{4}}$$

$$b) 2^2 \cdot 2^{-4}$$

$$c) 2^{-4} \cdot 2^6 \cdot 4^{-1}$$

$$d) \frac{2^{11} \cdot 3^8 \cdot 4^{-3}}{3^7 \cdot 4^5 \cdot 2^{-1}}$$

$$e) \frac{(1+0,04)^{\frac{5}{2}} - 1}{(1+0,04)^{\frac{5}{2}-1}}$$

$$f) \sqrt{16} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$$

Berechnen Sie (mit Taschenrechner):

$$g) 1000 \text{ €} \cdot \frac{(1+0,1)^4}{(1+0,1)^2 - 1,01}$$

$$h) \frac{(1+0,1)^5 - 1}{(1+0,1)^2 - \frac{1}{1-0,2}}$$

Aufgabe 1.1.2:

Berechnen Sie

$$a) \ln(0,8)$$

$$b) \ln(1,2)$$

$$c) \ln(e)$$

$$d) \ln(e^3 \cdot e^2)$$

$$e) \log_{10}(1000)$$

$$f) \log_{10}(2000)$$

$$g) -\ln(0,7)/\ln(1,3)$$

Hinweis: Nicht bei allen dieser Aufgaben ist ein Taschenrechner erforderlich.

Aufgabe 1.1.3:

Berechnen Sie x:

$$a) 2(x-9) - 6(3-x) - 4 = 0$$

$$b) \frac{27}{1-x} = 15 \cdot 4^{\frac{1}{2}}$$

$$c) \sqrt[2]{(1+0,1) \cdot (1+x)} - 1 = 0,09$$

$$d) x \cdot (1+0,1)^4 = 31.104 \text{ €}$$

$$e) x \cdot (1+0,04)^{12} = 342,14 \text{ €} \cdot (1+0,04)^4$$

Aufgabe 1.1.4:

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:

$$a) 1.000 \text{ €} (1+x)^4 = 2.000 \text{ €}$$

$$b) x - 3^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$c) 120 \text{ €} (1+0,1)^x = 240 \text{ €}$$

$$d) 10 = \frac{1-(1+0,05)^{-x}}{0,05}$$

1.2 Anlagemöglichkeiten

Aufgabe 1.2.1:

Nennen Sie Kriterien, die bei einer Geldanlage wichtig sind. Welches Kriterium ist für Sie am wichtigsten?

Aufgabe 1.2.2:

- Was ist unter Bonität zu verstehen?
- Was ist unter Liquidität zu verstehen?
- Was ist ein Investmentfonds?

1.3 Folgen und Summen

Aufgabe 1.3.1:

Frau Maier spart jeden Tag einen bestimmten Geldbetrag. Sie beginnt am 1. Januar mit 4 € und erhöht den Betrag täglich um einen Euro.

- Wie viel Euro spart Frau Meier am letzten Tag des Monats Januar?
- Wie viel Euro hat Frau Meier am Jahresende insgesamt gespart? (Berechnung ohne Zinsen, Jahr mit 365 Tagen)

Aufgabe 1.3.2:

Der Student Peter Spar spart jeden Tag einen bestimmten Geldbetrag. Er beginnt am 1. Januar mit 5 € und erhöht den Betrag jeden Tag um 3 Euro.

- Welchen Betrag spart er am 15. Februar?
- Wie viel Euro hat er bis einschließlich 15. Februar gespart?
- Wie viel Euro hat er am Jahresende gespart? (Berechnung ohne Zinsen, Jahr mit 365 Tagen)

Aufgabe 1.3.3:

Gegeben ist die Folge: 4, 12, 36, 108, 324,

- Ist diese Folge eine arithmetische oder eine geometrische Folge?
- Erstellen Sie eine Formel für die Folgenglieder a_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, d.h., wenn Sie in dieser Formel für k die Zahl 4 einsetzen, müssen Sie 108 erhalten.
- Berechnen Sie die Summe der ersten 30 Folgenglieder.

Aufgabe 1.3.4:

Gegeben sei die Folge 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$...

- Stellen Sie eine Formel für die Folgenglieder auf.
- Ab welchem Folgenglied sind die Glieder der Folge kleiner als 0,001?
- Wie viele Folgenglieder müssen mindestens addiert werden, damit die Summe größer als 31,5 ist?

Aufgabe 1.3.5:

Herr Großspur spart jeden Monat einen bestimmten Geldbetrag. Im ersten Monat spart er 3 Euro. Jeden Monat erhöht er den Geldbetrag, den er spart, auf das Doppelte. Nach wie vielen Monaten hat er eine Million Euro gespart? Berechnung ohne Zinsen.

Aufgabe 1.3.6:

Dozent Züig möchte eine Tafel Schokolade unter seinen Kursteilnehmern aufteilen. Da er von gleichen Anteilen nichts hält, gibt er dem ersten Teilnehmer die Hälfte der Tafel. Dem zweiten gibt er ein Viertel der Tafel, dem dritten ein Achtel, dem vierten ein Sechzehntel, dem fünften Teilnehmer ein Zweiunddreißigstel usw.

- a) Für wie viele Teilnehmer reicht die Tafel Schokolade?
- b) Dozent Züig hat 24 Teilnehmer in seinem Kurs. Er verteilt die Schokolade nach obiger Regel. Wie groß ist der Anteil an der Tafel Schokolade, der für den Dozenten Züig nach der Aufteilung übrig bleibt?

Discere necesse est!

(Lateinisch) Lernen ist notwendig!

„Ihr sollt euch nicht Schätze sammeln auf Erden, wo sie die Motten und der Rost fressen, und wo Diebe einbrechen und stehlen. Sammelt euch aber Schätze im Himmel, wo sie weder Motten noch Rost fressen und wo die Diebe nicht einbrechen und stehlen. Denn wo dein Schatz ist, da ist auch dein Herz.“

Die Bibel, Matthäus 6, 19-21

Genie ist
ein Prozent Inspiration und
neunundneunzig Prozent Transpiration.

Thomas Alva Edison,
amerikanischer Erfinder, 1847 - 1931

2 Zinsrechnung

2.1 Prozentrechnung

Aufgabe 2.1.1:

- Der Verkaufspreis für einen Schreibtisch wurde um 10% gesenkt. Der Schreibtisch kostet jetzt 270 €. Wie viel Euro hat der Schreibtisch vor der Preissenkung gekostet?
- Studentin Fina hat im vorigen Jahr 5% ihres Einkommens gespart. Dieses Jahr sinkt ihr Einkommen um 10%. Sie will trotzdem weiterhin 5% ihres Einkommens sparen. Voriges Jahr hat sie 500 € gespart. Wie viel Euro spart sie in diesem Jahr?
- Die Dabau AG hat einen Auslandsumsatz von 25% am Gesamtumsatz (Inlandsumsatz + Auslandsumsatz). Der Vorstand prognostiziert: Der Gesamtumsatz steigt im nächsten Jahr um 10%. Der Auslandsumsatzanteil erhöht sich im nächsten Jahr sogar auf 40% des Gesamtumsatzes. Um wie viel Prozent steigt nach der Prognose des Vorstands der Auslandsumsatz im nächsten Jahr?

Aufgabe 2.1.2:

Die Mehrwertsteuer betrug 2006 16% und wurde 2007 auf 19% erhöht?

- Um wie viel Prozent hat sich die Mehrwertsteuer erhöht?
- Ein Unternehmen, das von 2006 auf 2007 die Nettopreise nicht erhöht hat, aber die Mehrwertsteuererhöhung an die Kunden weitergab, musste die Preise erhöhen. Wie viel kostete bei diesem Unternehmen 2007 ein Artikel, der 2006 50 € (einschließlich Mehrwertsteuer) kostete?

Aufgabe 2.1.3:

Die Firma Dabau steigerte den Umsatz des Jahres 2000 in den folgenden 5 Jahren um jeweils 8% (gegenüber dem jeweiligen Vorjahr). Danach gab es zwei Jahre lang keine Steigerung mehr. Der Umsatz im Jahr 2000 betrug 20 Millionen Euro.

- Wie hoch war der Umsatz im Jahr 2007?
- Um wie viel Prozent ist der Umsatz von 2000 bis 2007 (insgesamt) gestiegen?
- Um wie viel Prozent ist der Umsatz von 2000 bis 2007 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?
- Welche Umsatzsteigerung müsste die Firma 2008 erreichen, damit die Gesamtsteigerung in den acht Jahren seit 2000 50% wäre?

Die Zehn Gebote Gottes sind deshalb so klar und verständlich, weil sie ohne Mitwirkung einer Sachverständigenkommission zustande gekommen sind.

Charles de Gaulle, franz. Politiker, 1890 - 1970

Aufgabe 2.1.4:

Anleger können Aktien direkt kaufen. Sie können aber auch Investmentfonds kaufen, die selbst in Aktien anlegen. Die folgende Tabelle gibt die Zahl der Aktionäre und Aktienfondsbesitzer in Deutschland an.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
nur Aktien	3,3	3,6	3,5	3,5	3,1	2,9	3,0	2,7	2,7
Aktien und Fonds	0,6	0,9	1,5	2,7	2,6	2,1	2,1	1,9	2,0
nur Fonds	1,7	2,3	3,2	5,6	7,2	6,5	6,1	5,9	6,1
Gesamtzahl	5,6	6,8	8,2	11,8	12,9	11,5	11,1	10,5	10,8

	2006	2007
nur Aktien	2,4	2,2
Aktien und Fonds	1,9	1,6
nur Fonds	6,1	6,4
Gesamtzahl	10,4	10,1

Anzahl in Millionen. Quelle: Deutsches Aktieninstitut

- Die Gesamtzahl ergibt sich aus der Addition der drei einzelnen Angaben. Im Jahr 2003 ergibt aber $3,0 + 2,1 + 6,1$ nicht 11,1. Woran könnte dies liegen?
- Um wie viel Prozent ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer pro Jahr (bezogen auf das Vorjahr) jeweils gestiegen?
- Um wie viel Prozent ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer in den Jahren 1997 bis 2005 gestiegen?
- Um wie viel Prozent pro Jahr ist die Gesamtzahl der Aktien- und Fondsbesitzer durchschnittlich in den Jahren 1997 bis 2005 gestiegen?

Aufgabe 2.1.5:

Bei der Bürgermeisterwahl in Kleindorf gab es drei Kandidaten bei 300 Wahlberechtigten. Kandidat A erhielt 65 Stimmen, Kandidat B 55 Stimmen und Kandidat C 31 Stimmen. 9 Wähler hatten ungültig gewählt, und 140 Personen sind nicht zur Wahl gegangen. Ungültige Stimmen und Nichtwähler gehen bei der Berechnung der Prozentanteile für die einzelnen Kandidaten nicht ein.

- Wie viel „Prozent“ haben die drei Kandidaten erzielt?
- Wenn von den 140 Nichtwählern 14 Personen zur Wahl gegangen wären und den Kandidaten B gewählt hätten, wie sähe dann die prozentuale Aufteilung aus?
- Hätten neben den 140 Nichtwählern noch weitere 66 Personen, jeweils 22 Wähler jedes Kandidaten, nicht gewählt, wie wäre dann die prozentuale Aufteilung gewesen?

2.2 Einfache Zinsen

Aufgabe 2.2.1:

- Frau Andres legt 400 € für 5 Monate an. Der Zinssatz beträgt 3%. Wie hoch ist das Endkapital bei einfachen Zinsen?
- Frau Bechtold legt 400 € an. Sie erhält nach neun Monaten bei einfachen Zinsen 412 € ausbezahlt. Wie hoch ist der gezahlte Zinssatz?
- Frau Chirac zahlte auf ein Sparkonto 300 € ein, das mit 3% (linear) verzinst wurde. Sie erhielt ein Endkapital einschließlich Zinsen von 308,25 € zurück. Wie lange hatte sie ihr Kapital angelegt?

Aufgabe 2.2.2:

- Frau Spar legt 400 € vom 10.03.2004 bis 15.06.2004 bei 3% (einfachen) Zinsen an. Berechnen Sie den Zinsbetrag bei der Zinstage-Methode
 - actual/actual kalenderjährlich
 - 30E/360
 - 30/360
 - actual/360
 - actual/365.
- Herr Großspur legt 400 € vom 10.04.2006 bis 31.10.2006 bei 3% (einfachen) Zinsen an. Berechnen Sie den Zinsbetrag bei der Zinstage-Methode
 - actual/actual kalenderjährlich
 - 30E/360
 - 30/360
 - actual/360
 - actual/365.

Aufgabe 2.2.3:

Frau Fina N. Zen leiht sich am 23.08. einen Betrag von 4.000 Euro und muss am 28.12. 4.050 Euro zurückzahlen. Welcher Zinssatz liegt bei einfachen Zinsen und der Zinstage-Methode 30E/360 vor?

Aufgabe 2.2.4:

Berechnen Sie den Zinsbetrag bei einer Anlage von 2.000 € und einem Zinssatz von 3,6%. Anlagezeitraum vom 16.1.2006 (Einzahlung) bis 16.3.2006 (Auszahlung).

Zinsbetrag actual/360 = _____ = _____

Zinsbetrag 30/360 = _____ = _____

Zinsbetrag 30E/360 = _____ = _____

Zinsbetrag actual/actual kalenderj. = _____ = _____

Aufgabe 2.2.5:

- Nach welcher Zinstage-Methode werden variabel verzinsliche Anleihen (Floating-Rate-Notes) standardmäßig meist verzinst?

- b) Gegeben ist die folgende Anleihe mit variabler Verzinsung (Floating-Rate-Note), bei der alle drei Monate – am 8.2., 8.5., 8.8. und 8.11. eines jeden Jahres – die Zinsen nach dem Referenzzinssatz EURIBOR gezahlt werden:

Dabau AG	
Zinssatzbekanntmachung	
€ 1.000.000,00	
Anleihe der Dabau AG mit variablem Zins	
Der Zinssatz wurde gemäß Anleihebedingungen für die nächste Periode festgelegt und beträgt 2,9% p.a. für die Zeit vom 8.8.2006 bis zum 7.11.2006 einschließlich (■ Zinstage). Zahlbar am 8.11.2006.	
Pro Nennwert von 10.000 € wird ein Zinsbetrag in Höhe von ■■■■■ € fällig.	
Im August 2006	Der Vorstand der Dabau-Bank

Berechnen Sie die Zahlen (Zinstage und Zinsbetrag) an den beiden schwarz markierten Stellen.

- c) Alternativ hätten Sie am 8.8.2006 für 10.000 € bei der Dabau-Bank eine Festgeldanlage (Zinstage-Methode 30/360) mit dem höheren Zinssatz von 2,95% durchführen können. Wie hoch wäre bei dieser Alternative der Zinsbetrag am 8.11.2006?

Aufgabe 2.2.6:

Gegeben ist die folgende Anleihe mit variabler Verzinsung (Floating-Rate-Note) nach actual/360:

Schlapp AG	
EUR 10.000.000,00 Hypothekenspfandbriefe	
mit variablem Zinssatz von 2006/2016, R. 567	
ISIN DE0008150815	
Gemäß §3 der Anleihebedingungen wurde der Zinssatz wie folgt festgesetzt:	
Zinsperiode:	12.1.2006 bis 12.7.2006 (exkl., xxx Tage)
Zinssatz:	3,1500 %
Zinsbetrag:	EUR 0,015xxxx je nominal EUR 1,00
Zinstermin:	12.7.2006
Darmstadt, im Januar 2006	GROSS-Bank AG, Darmstadt

Berechnen Sie die Zinstage und den genauen Zinsbetrag.

Aufgabe 2.2.7:

Gegeben ist die folgende Anleihe mit variabler Verzinsung (Floating-Rate-Note):

FUSS 123 AG	
€ 30.000.000,00	
Pfandbrief mit variablem Zinssatz von 2003/2008	
Nach Maßgabe der Emissionsbedingungen geben wir bekannt, dass der Nominalzinssatz für die Zinsperiode vom 3. September 2003 bis zum 2. Dezember 2003 mit 2,161% p.a. festgelegt wurde. Bei 91 Tagen entspricht dies 0,54625%.	
Demnach wird am 3. Dezember 2003, dem betreffenden Zinstermin, pro Schuldverschreibung im Nennwert von € 1.000,00 ein Zinsbetrag in Höhe von € 5,46 fällig.	
Im August 2003	A-Bank, Neudorf

Überprüfen Sie die Zinstage und den Zinsbetrag.

Aufgabe 2.2.8:

Berechnen Sie die Länge des Jahres vom 14.1.2008 bis zum 31.12.2008 nach den folgenden Zinstage-Methoden: 30/360, 30E/360, actual/365, actual/360 und actual/actual kalenderjährlich. Berechnen Sie jeweils das Endkapital bei 3% Zins und einer Anlage von 2.000€.

Aufgabe 2.2.9:

2007 wurden die Freibeträge bei Kapitalerträgen gekürzt. Der in den Freistellungsaufträgen für 2006 von den Sparern angegebene Betrag, der von der Zinsabschlagsteuer befreit werden soll, wurde von den Banken 2007 automatisch gekürzt, sofern der Anleger keinen neuen Freistellungsauftrag für seine Konten erteilt hat.

Wurden die Anleger nicht selbst aktiv, reduzierten die Kreditinstitute alle vor Jahresbeginn 2007 erteilten Freistellungsaufträge automatisch um 56,37% des freigestellten Betrages. Weshalb 56,37%? Erklären Sie das Zustandekommen dieser Zahl.

Hinweis: Klären Sie dazu, wie hoch die Freibeträge und Werbungskostenpauschbeträge 2006 und 2007 waren.

Aufgabe 2.2.10:

Sie kaufen eine festverzinsliche Anleihe am 21.5. (Valutatag) im Nennwert von 600 €. Das festverzinsliche Wertpapier hat einen Kurs von 95 und jährliche Zinszahlung mit einer Nominalverzinsung von 4% am 10.4. eines jeden Jahres.

- a) Berechnen Sie den Kaufpreis. Nehmen Sie dazu an, dass kein Schaltjahr berücksichtigt werden muss. Die Zinsberechnungsmethode ist actual/actual.
- b) Am 1. Juni (Valutatag) verkaufen Sie das Wertpapier zum Kurs von 94,98. Welchen Verkaufspreis haben Sie erzielt?

Aufgabe 2.2.11:

Sie kauften am 21.5. (Valutatag) eine festverzinsliche Anleihe im Nennwert von 5.000 €

und 4% Nominalverzinsung zum Kurs von 99. Das festverzinsliche Wertpapier hat halbjährliche Zinszahlungen am 10.4. und 10.10. eines jeden Jahres.

- Berechnen Sie den Kaufpreis. Nehmen Sie dazu an, dass kein Schaltjahr berücksichtigt werden muss. Die Zinsberechnungsmethode ist actual/actual, ICMA.
- Am 1.6. (Valutatag) verkauften Sie das Wertpapier zum Kurs von 98. Welchen Verkaufspreis erzielten Sie?

Aufgabe 2.2.12:

Ein verzinsliches Wertpapier im Nennwert von 1.000 € wird am 6.9.2006 (Zinslaufbeginn) emittiert und hat eine Laufzeit von fünf Jahren, also bis zum 6.9.2011. Die Zinsen werden halbjährlich grundsätzlich am 6.3. und 6.9. eines jeden Jahres nach der Methode actual/360 gezahlt.

Wann und in welcher Höhe werden die Zinsen gezahlt, wenn die Geschäftstage-Methode adjusted following (following und nicht fix) verwendet wird? Nehmen Sie an, dass nur Samstage und Sonntage keine Bankarbeitstage sind. Der Nominalzinssatz sei 3%.

2.3 Zinseszinsen, einschließlich unterjähriger und stetiger Verzinsung

Aufgabe 2.3.1:

Ein Kapital von 20.000 € wird fünf Jahre lang mit 4%, danach sieben Jahre mit 5% und anschließend noch drei Jahre lang mit 6% verzinst.

- Wie hoch ist das Endkapital nach 15 Jahren?
- Zu welchem durchschnittlichen Zinssatz ist das Kapital angelegt?

Aufgabe 2.3.2:

Stellen Sie eine allgemeine Formel auf, die angibt, wann sich ein Kapital bei exponentieller Verzinsung verzehnfacht hat.

Was ergibt sich speziell bei einem Kapital von 5.000 € und einem Zinssatz von 6%?

Aufgabe 2.3.3:

Ein Kapital von 5.000 €, angelegt bei der A-Bank, ergab nach 10 Jahren ein Endkapital von 6.998,67 €. Ein anderes Kapital von 4.500 €, angelegt bei der B-Bank, war nach acht Jahren auf 5.980,83 € angewachsen. Welche Bank zahlte den höheren Zinssatz p.a.?

Aufgabe 2.3.4:

Die Sparkasse in Grozi verzinst Festgelder mit einer Laufzeit von zwei Monaten zurzeit mit 3% (nominell). Nach jeweils zwei Monaten werden die Zinsen dem Kapital „zugeschlagen“. Dieses Kapital wird automatisch wieder für zwei Monate mit dem dann gültigen Zinssatz für zwei Monate angelegt (genannt prolongiert), wenn der Kunde nichts anderes angibt. Sie legen 20.000 € auf diese Art und Weise für anderthalb Jahre an.

- Wie hoch ist das Endkapital, wenn sich der Zinssatz im Laufe der Zeit nicht ändert?
- Wie hoch ist der effektive Jahreszinssatz?
- Frau Maier hat auch die Möglichkeit, das Geld jeweils nur für einen Monat anzulegen. Der Nominalzins beträgt dann allerdings nur 2,97%. Was würden Sie Frau Meier unter der Annahme, dass sich die Zinsen nicht ändern, empfehlen?

Aufgabe 2.3.5:

Frau Zen zahlt zu Beginn des Jahres 2007 10.000 € auf ein Sparbuch mit Sonderzinsvereinbarung ein, um das Kapital vier Jahre lang anzulegen. Im ersten Jahr (also 2007) wird das Sparbuch mit 1%, im 2. Jahr mit 2%, im 3. Jahr mit 3% und im 4. Jahr mit 4% verzinst. Wie hoch ist die Rendite (durchschnittliche Verzinsung) dieser vierjährigen Anlage? Geben Sie das Ergebnis in Prozent mit 3 Nachkommastellen an.

Aufgabe 2.3.6:

Frau Zen kauft eine Nullkupon-Anleihe im Nennwert von 1.000 € mit einer Laufzeit von drei Jahren zu einem Preis von 861,37 €. Am Ende der Laufzeit erhält Frau Zen den Nennwert.

- Welcher jährlichen Verzinsung entspricht diese Geldanlage?
- Wenn Frau Zen mit der Nullkupon-Anleihe eine jährliche Verzinsung von mindestens 6% erzielen möchte, welchen maximalen Kaufpreis wäre sie bereit zu zahlen?

Aufgabe 2.3.7:

Frau Zen hat die Möglichkeit, ein Kapital in Höhe von 10.000 € für zehn Jahre anzulegen. Der Zinssatz beträgt bei jährlicher Verzinsung entweder 6% bei nachschüssiger Verzinsung oder 5,9% bei vorschüssiger Verzinsung.

Welche Verzinsung sollte Frau Zen wählen?

Aufgabe 2.3.8:

Finanzierungsschätze der Bundesrepublik Deutschland wurden im September 2006 bei einer Laufzeit von einem Jahr und vorschüssiger Verzinsung mit einem Zinssatz von 3,15% (genannt Abschlagszinssatz) ausgegeben. Bei einer Laufzeit von zwei Jahren betrug der Abschlagszinssatz 3,19%.

Welchen Prozentsätzen bei einer nachschüssigen Verzinsung entsprechen die angegebenen Zinssätze?

Aufgabe 2.3.9:

Frau Zen hat einen Wechsel über 2.000 € zwei Monate vor Fälligkeit bei der Bank eingereicht. Der Diskontsatz beträgt 5%.

- Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag?
- Wie hoch ist der äquivalente nachschüssige Zinssatz?
- Wie hoch müsste der Diskontsatz sein, damit die Bank einen äquivalenten nachschüssigen Zinssatz von 6% erzielt?

Aufgabe 2.3.10:

a) Wie hoch ist der Zinssatz, wenn sich das Kapital bei stetiger Verzinsung in zehn Jahren verdoppelt?

b) Berechnen Sie den diskreten Jahreszinssatz (= Zinssatz bei exponentieller Verzinsung), wenn der stetige Zinssatz

- (i) 5% (ii) 3% p.Q. (iii) 0,01% pro Stunde ist.

Aufgabe 2.3.11:

Ein radioaktives Produkt besitzt eine Halbwertszeit (= Zeit, bis zu der die Hälfte zerfallen ist) von 40 Tagen. Wie viel Prozent des Produktes sind nach 3.000 Minuten noch vorhanden?

2.4 Gemischte Verzinsung

Aufgabe 2.4.1:

Wie lange muss ein zu Jahresbeginn angelegtes Kapital von 20.000 € bei einem Zinssatz von 8% auf einem Sparbuch mit kalenderjährlicher Verzinsung angelegt sein, um ein Endkapital von 35.817 € zu ergeben?

Aufgabe 2.4.2:

Ein Kapital ist zu Jahresbeginn 2007, also am 1.1.2007, 0.00 Uhr auf einem Konto zu 8% mit kalenderjährlicher Verzinsung und der Zinstage-Methode 30E/360 angelegt worden.

- Wann, d.h. bis zu welchem Tag, hat sich das Kapital verdoppelt?
- Wann, d.h. bis zu welchem Tag, hat sich das Kapital verdoppelt, wenn das Kapital nicht kalenderjährlich, sondern jährlich, immer Mitte des Jahres, verzinst wird?

Aufgabe 2.4.3:

Wie viel Kapital müssen Sie bei kalenderjährlicher Verzinsung von 3% Mitte des Jahres anlegen, wenn Sie nach drei Jahren ein Endkapital (einschl. Zinsen) von 2.000 € besitzen wollen?

- 1.829,00 €
- 1.829,88 €
- 1.830,22 €
- 1.831,22 €.

Aufgabe 2.4.4:

In der Praxis wird bei jeder Zinszahlung gerundet. Bei kaufmännischer Rundung ergibt sich nach drei Jahren bei Einzahlung von 1.829,88 € Mitte des Jahres und 3% kalenderjährlicher Verzinsung ein Endkapital von

- 1.999,99 €
- 2.000,00 €
- 2.000,01 €
- 2.000,02 €.

Aufgabe 2.4.5:

- Studentin Andrea A. zahlt Ende Juni 2007 1.000 € auf ein Sparbuch ein. Ende September 2007 hebt sie 400 € ab. Wie hoch ist das Endkapital einschl. Zinsen am Jahresende 2009, wenn das Sparbuch kalenderjährlich mit 2% verzinst wird?
- Studentin Barbara B. zahlt Anfang Juni 2007 500 € auf ein Sparbuch (30E/360) ein. Ende Oktober 2007 hebt sie 200 € ab. Wie hoch ist das Endkapital einschl. Zinsen am Jahresende 2008, wenn das Sparbuch kalenderjährlich mit 4% verzinst wird?
- Studentin Claudia C. zahlt Ende April 2004 600 € auf ein Sparbuch ein. Anfang August 2004 hebt sie 500 € ab. Wie hoch ist das Endkapital einschl. Zinsen am Jahresende 2005, wenn das Sparbuch kalenderjährlich mit 2% verzinst wird (30E/360)?
- Studentin Doris D. zahlt Ende April 2004 600 € auf ein Sparbuch mit kalenderjährlicher Verzinsung von 2% (30E/360) ein. Anfang August 2004 hebt sie 500 € ab. Wie hoch ist das Endkapital einschl. Zinsen Ende Juni 2006, wenn das Sparbuch aufgelöst wird?

3 Äquivalenz und Effektivverzinsung

3.1 Äquivalenz

Aufgabe 3.1.1:

Der Zahlungsstrom A besteht aus einer Zahlung von 4.000 € in einem Monat und einer Zahlung von 5.000 € in einem Jahr. Der Zahlungsstrom B besteht aus drei Zahlungen von jeweils 3.000 € in zwei, vier und neun Monaten.

- Sind diese Zahlungsströme zum heutigen Zeitpunkt (also $t = 0$) bei Verwendung linearer Verzinsung mit $i = 3\%$ äquivalent?
- Sind diese Zahlungsströme zum heutigen Zeitpunkt (also $t = 0$) bei Verwendung exponentieller Verzinsung mit $i = 3\%$ äquivalent?
- Lösen Sie die Aufgaben a) und b) zum Bezugszeitpunkt $t = \frac{1}{2}$ Jahr.

Aufgabe 3.1.2:

Frau Klein erhält Ende Juli 2008 eine Rechnung über 5.000 €, die sie sofort mit Abzug von 2% Skonto bezahlen kann. Sie kann aber auch erst in zwei Monaten ohne Abzug bezahlen. Ihr Girokonto ist leider auf Null. Sie darf aber ihr Konto überziehen, allerdings bei 12% Kreditzinsen. Was ist für Frau Klein besser? Nehmen Sie an, dass ihr Girokonto quartalsweise abgerechnet wird, d.h. Ende März, Ende Juni, Ende September und Ende Dezember. Zinstage-Methode: 30E/360.

Also: Kontostand: 0 €. Dann kommt die Rechnung. Bei sofortiger Bezahlung mit Skonto ergibt sich auf dem Girokonto ein Kontostand Anfang Oktober 2008 von

_____ = _____

Der Vorteil sofortiger Bezahlung mit Skonto (gegenüber der Bezahlung nach zwei Monaten ohne Skonto) beträgt Anfang Oktober 2008:

_____ €

Aufgabe 3.1.3:

Sie gewinnen bei einem Wettbewerb bei der A-Bank den 1. Preis: Ein zinsloses Darlehen über eine Million Euro in zehn Jahren für ein Jahr.

Sie freuen sich; aber mit einer Million in zehn Jahren, die Sie für ein Jahr behalten dürfen, bevor Sie die Million wieder zurückgeben müssen, können Sie leider nichts anfangen. Jetzt brauchen Sie das Geld.

Sie gehen deshalb zur A-Bank. Die Bank bietet Ihnen an, statt des Darlehens sofort 30.000 Euro bar auf die Hand zu zahlen. Sie erklärt, dass dies möglich ist, weil die Bank Geld aufnehmen und Geld anlegen kann. Bevor Sie das Angebot annehmen, gehen Sie zur B-Bank und fragen dort nach, welchen Wert das Darlehen besitzt. Die B-Bank bietet Ihnen 37.000 Euro. Kann das Darlehen überhaupt 37.000 Euro wert sein?

Berechnen Sie dazu zunächst den Barwert des Gewinns in Abhängigkeit des Zinssatzes.

Hinweis: Rechnen Sie mit einem einheitlichen Zinssatz für Geldaufnahme und Geldanlage.

3.2 Effektivverzinsung

Aufgabe 3.2.1:

a) Sie kaufen Ende Januar ein Wertpapier für 200 € und verkaufen es Ende Dezember für 220 €.

a1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz (Rendite) nach der Preisangabenverordnung (PAngV).

Lösung: Die Gleichung für den Effektivzinssatz lautet

$$i_{\text{eff}} = \underline{\hspace{10em}} = \underline{\hspace{10em}}$$

a2) Berechnen Sie den effektiven Zinssatz (Rendite) nach Braess/Fangmeyer.

Lösung: Die Gleichung für den Effektivzinssatz lautet

$$i_{\text{eff}} = \underline{\hspace{10em}} = \underline{\hspace{10em}}$$

b) Studentin Britta B. leiht sich 1.000 €. Nach drei Monaten zahlt sie 200 € und nach weiteren drei Monaten (also nach sechs Monaten) zahlt sie 900 € zurück. Damit ist ihre Schuld vollständig zurückgezahlt. Stellen Sie die Gleichung für den effektiven Jahreszinssatz (Rendite)

b1) nach der Preisangabenverordnung PAngV auf.

b2) nach Braess/Fangmeyer auf.

Aufgabe 3.2.2:

Studentin Andrea A. zahlte 800 € Ende April 2005 auf ein Sparbuch mit kalenderjährlicher Verzinsung ein. Ende August 2005 hob sie 500 € ab.

a) Wie hoch war das Endkapital einschließlich Zinsen am Jahresende 2008, wenn das Sparbuch kalenderjährlich mit 3% (unter Anwendung der Zinstage-Methode 30E/360) verzinst wurde?

b) Stellen Sie die Gleichung für den effektiven Zinssatz nach Preisangabenverordnung (PAngV) auf, wenn Studentin Andrea A. das Endkapital Ende 2008 abhebt.

Aufgabe 3.2.3:

Sie haben eine Nullkupon-Anleihe (= Zerobond) im Nennwert von 1.000 € für 760 € gekauft. Die Restlaufzeit der Anleihe beträgt 4,5 Jahre. Die Rückzahlung erfolgt zum Nennwert.

a) Berechnen Sie den Effektivzinssatz (Rendite) nach der deutschen PAngV.

b) Stellen Sie die Gleichung für den Effektivzinssatz (Rendite) nach Braess/Fangmeyer auf. (Nur Gleichung!)

Aufgabe 3.2.4:

Sie kaufen zum Kurs von 96 ein festverzinsliches Wertpapier im Nennwert von 100 € mit einer Restlaufzeit von zehn Jahren und einer Nominalverzinsung von 4% bei jährlicher Zinszahlung. Nach zwei Jahren und drei Monaten verkaufen Sie das Wertpapier zum Kurs von 97. (Rechnen Sie vereinfachend mit der Zinstage-Methode 30E/360.)

- Berechnen Sie die Rendite (exponentielle Methode).
- Berechnen Sie die Rendite nach Braess/Fangmeyer.

Weitere Aufgaben zur Berechnung des effektiven Zinssatzes finden Sie in Abschnitt 6.

3.3 Investitionsrechnung**Aufgabe 3.3.1:**

Die Investition A kostet 50.000 € und erbringt in zwei Jahren 10.000 € und nach weiteren vier Jahren 74.000 €.

Die Alternative, die Investition B, kostet auch 50.000 €, erbringt aber erst nach drei Jahren 10.000 €. Und nach insgesamt fünf Jahren erhalten Sie 70.000 €.

- Berechnen Sie für beide Investitionen den Kapitalwert bei $i = 10\%$.
- Berechnen Sie für beide Investitionen den internen Zinssatz (IRR). Warum gibt es bei diesen Investitionen jeweils genau einen internen Zinssatz?

Aufgabe 3.3.2:

Eine Investition von 10.000 € erbringt nach dem ersten Jahr 26.000 € und kostet allerdings nach dem zweiten Jahr noch 15.000 €.

- Ist die Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 10% vorteilhaft?
- Berechnen Sie alle internen Zinssätze.

3.4 Unterschiedliche Zinssätze, Diskontierungsfaktoren**Aufgabe 3.4.1:**

Eine Bank gewährt folgende Festgeldkonditionen (angegeben ist der nominelle Jahreszinssatz):

- Anlage für 1 Monat: 4,010% p.a.
- Anlage für 2 Monate: 4,020% p.a.
- Anlage für 3 Monate: 4,024% p.a.

- Welche Geldanlage bietet den höchsten effektiven Zinssatz nach der PAngV?

A: _____ $i_{\text{eff}} =$ _____ = _____

B: _____ $i_{\text{eff}} =$ _____ = _____

C: _____ $i_{\text{eff}} =$ _____ = _____