Ulrich E. Schröder

unter Mitwirkung von Claus Lämmerzahl

Gravitation

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

Verlag
Harri
Deutsch

Dr. phil. nat. Ulrich E. Schröder
Privatdozent und Akademischer Direktor i. R. am Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Professor Dr. Claus Lämmerzahl
Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation ZARM, Universität Bremen

Anregungen zu Veränderungen und Ergänzungen richten Sie bitte an:
Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.harri-deutsch.de/

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über `http://dnb.d-nb.de` abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1874-8

5., überarbeitete und erweiterte Auflage 2011

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt
Printed in Germany

Vorwort zur fünften Auflage

Für die vorliegende fünfte Auflage wurde der Text erneut sorgfältig durchgesehen. An einigen Stellen wurde er zum besseren Verständnis geändert und, wo es notwendig schien, auch erweitert. Die Literaturhinweise wurden auf den neuesten Stand gebracht und durch neue ergänzt.
Neu hinzugekommen ist die Tabelle im Anhang. Sie bietet eine zusammenfassende Übersicht über die Experimente, in denen die Vorhersagen der Algemeinen Relativitätstheorie mit den zur Zeit erreichten Genauigkeiten überprüft wurden.
Außerdem ist der Abschnitt 9.7 neu hinzugekommen. Diese Ausführungen über den für die Einsteinsche Theorie charakteristischen Gravitomagnetismus und die damit verbundenen Effekte hat Herr Professor Claus Lämmerzahl (Bremen) verfasst. Ich möchte Herrn Lämmerzahl für seine hilfreiche Mitarbeit, auch bei anderen Stellen des Textes, herzlich danken.
Schließlich danke ich dem Verlag Harri Deutsch, insbesondere Herrn Dipl. Phys. Klaus Horn, für die bewährte angenehme Zusammenarbeit.

Oldendorf, im November 2010 Ulrich E. Schröder

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich wiederholt an der Universität Frankfurt am Main gehalten habe. Diese richteten sich als Ergänzung zu den Kursvorlesungen in Theoretischer Physik an Studierende der Physik, Astrophysik und Mathematik nach dem Vorexamen. Vorkenntnisse in Spezieller Relativitätstheorie werden also vorausgesetzt.

Das Buch enthält den Stoff, der in einer zweistündigen Vorlesung während eines Semesters behandelt wurde. Die Darstellung ist jedoch ausführlicher als in der Vorlesung. Das Buch kann daher auch zum Selbststudium benutzt werden und soll an die speziellere und ausführlichere Fachliteratur heranführen. Dem begrenzten Stoffumfang entsprechend, sind die Ausführungen auf die wesentlichen Aspekte der relativistischen Gravitationstheorie beschränkt, so daß man das Buch, im Unterschied zu den umfangreicheren Monographien, in relativ kurzer Zeit lesen kann. Dabei wird aber auch wiederholt die aktive Beteiligung des Lesers mit Papier und Bleistift gefordert. Anreiz hierzu sollen die auf den Text bezogenen Übungsaufgaben im Anhang A bieten.

In der Einleitung werden vorbereitend die Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie aufgezeigt und die grundlegenden Eigenschaften einer relativistischen Gravitationstheorie in knapper Form dargelegt. Zur Einstimmung auf die Theorie gehören auch die Ausführungen über die ebenso interessante wie lehrreiche historische Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie in Kapitel 2. Im Anschluß an die nun folgende Diskussion der physikalischen Grundlagen der Gravitationstheorie wird der Bezug zur nichteuklidischen Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums anschaulich erläutert. Nach dieser verbalen Darlegung des Zusammenhangs von Gravitation und Geometrie im Riemannschen Raum werden in Kapitel 4 die zur mathematischen Formulierung der Theorie erforderlichen differentialgeometrischen Begriffe eingeführt. Hierbei diente als Vorbild das in dem vorzüglichen Buch „Space-Time Structure“ von Erwin Schrödinger verfolgte Konzept, die Riemannsche Maßbestimmung erst spät einzuführen. Ausgehend von möglichst schwachen Annahmen über die Raum-Zeit-Struktur werden also zunächst die allgemeinen Eigenschaften differenzierbarer Mannigfaltigkeiten diskutiert und der in der Physik wichtige Begriff des Vektorfeldes (bzw. Tensorfeldes) erklärt. Führt man nun den affinen Zusammenhang als zusätzliche Struktur ein, dann rücken die folgenden Begriffe in den Vordergrund des Interesses: die Vektorübertragung, die kovariante Ableitung, autoparallele Kurven sowie der Torsions- und Krümmungstensor. Da sie unabhängig von der metrischen Struktur sind, werden sie hier vor Einführung einer Metrik behandelt. In diesem allgemeiner gefaßten Rahmen tritt der Unterschied zwischen rein differentialgeometrischen Begriffen und den später eingeführten physikalisch bedeutsamen Größen klarer hervor. Die Einführung der Metrik als weitere Struktur in Kapitel 5 leitet dann den Übergang von der Differentialgeometrie zur Gravitationstheorie ein, der in Kapitel 6 mit der Diskussion der physikalischen Grundgesetze in der Riemannschen Raum-Zeit vollzogen wird. Die Einsteinschen Feldgleichungen folgen dann in Kapitel 7 nahezu zwangsläufig aus wenigen plausiblen Annahmen und werden, ihrer grundlegenden Bedeutung entsprechend, auch als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einem Variationsprinzip hergeleitet. Es folgt in Kapitel 8 die Diskussion der für die Anwendungen besonders wichtigen kugelsymmetrischen Lösung der Feldgleichungen, die dann im Kapitel 9 bei der Überprüfung der Theorie im Sonnensystem Verwendung findet. In dem abschließenden Kapitel über Gravitationswellen wird ein besonders interessantes und aktuelles Problem behandelt, denn es besteht die berechtigte Hoffnung, daß die derzeitigen weltweiten Bemühungen in naher Zukunft zu einem direkten Nachweis von Gravitationswellen führen werden.

Die Berücksichtigung weiterer interessanter Themen wären über den gestellten Rahmen dieser Einführung zu weit hinausgegangen. So mußte es bei der hier subjektiv getroffenen Auswahl bleiben. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten über den Inhalt des Buches sei auf das Inhaltsverzeichnis hingewiesen.

Für die Durchsicht der ersten beiden Kapitel und die nützlichen Bemerkungen hierzu möchte ich Herrn Professor Friedrich W. Hehl (Köln) herzlich danken. Ebenso danke ich Herrn Dr. Helmut Rechenberg (München) für seine ausführliche Stellungnahme zur Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie, insbesondere hinsichtlich der Verbindung zwischen Einstein und Hilbert und ihrer unterschiedlichen Beiträge im entscheidenden Jahr 1915. Außerdem gilt mein besonderer Dank Herrn Dr. Rudolf Staudt (Augsburg) für die geduldige und sachkundige Herstellung der für den Druck fertigen Vorlage des Manuskripts.

Von der Allgemeinen Relativitätstheorie geht wegen der engen Verknüpfung von Physik und Geometrie ein besonderer ästhetischer Reiz aus. Sie fasziniert durch ihre logische Geschlossenheit und Schönheit. Neben grundlegenden Einsichten eröffnet sie einen weiten Bereich interessanter Anwendungen. Wenn es gelingt, hiervon einen ersten Eindruck zu vermitteln und das Interesse an diesem weiterhin wichtigen Forschungsgebiet der Physik zu fördern, dann ist ein wesentliches Ziel des Buches erreicht. Möge es viele Freunde gewinnen.

Oldendorf, im Oktober 2000 Ulrich E. Schröder

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie gehen wir davon aus, daß die Grundtatsachen der Speziellen Relativitätstheorie bekannt sind; einschließlich der entsprechenden mathematischen Methode, der Tensoranalysis im Minkowski-Raum.

Beim Studium der Speziellen Relativitätstheorie sollte deutlich geworden sein, daß der Name Relativitätstheorie keine glückliche Bezeichnung darstellt, sondern den wesentlichen Inhalt der Theorie in eher negativer Weise umschreibt. In ihrer historischen Entwicklung wurde mit dem Relativitätsprinzip der Begriff des absolut ruhenden Äthers zurückgewiesen.

Die entscheidende Aussage der Speziellen Relativitätstheorie ist die Invarianz (Kovarianz) der Naturgesetze gegenüber dem Wechsel von Inertialsystemen gemäß den Transformationen der Poincaré-Gruppe. Damit wird geklärt, in welchem Sinn absolute, d. h. vom inertialen Bezugssystem unabhängige, physikalische Aussagen überhaupt möglich sind. Die mathematische Struktur der physikalischen Gesetze ist dadurch in der Form von Tensorgleichungen festgelegt.

Der Grund für das Attribut „spezielle“ und die damit verbundene Einschränkung ist häufig mißverstanden worden. Diese Einschränkung besagt, daß die Spezielle Relativitätstheorie nur in solchen Fällen gilt, in denen keine Gravitationseffekte auftreten. Die gelegentlich anzutreffende Behauptung, daß die Spezielle Relativitätstheorie nur bei Bewegungen ohne Beschleunigungen (sogenannte Trägheitsbewegungen) anzuwenden sei, ist unzutreffend. Man führt den Vierervektor des Impulses ein und kann die beschleunigte Bewegung eines Teilchens unter der Wirkung einer äußeren Kraft (Minkowski-Kraft) beschreiben. Es sei z. B. an die von der Elektrodynamik her bekannte Bewegungsgleichung einer Ladung e im äußeren elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu}$ erinnert,

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad . \tag{1.1}$$

Hier bezeichnen p_μ und u^ν die Vierervektoren des Impulses bzw. der Geschwindigkeit, τ die Eigenzeit und c die Lichtgeschwindigkeit.

Andererseits zeigt sich der Konflikt des Newtonschen Gravitationsgesetzes

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \quad , G = 6.67 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \tag{1.2}$$

mit der Speziellen Relativitätstheorie in verschiedener Weise. Diese Relation ist kovariant gegenüber der Gruppe der räumlichen Drehungen, die den Abstand $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ invariant läßt, und gegenüber der Galilei-Transformation $t = t^{'}, \ \vec{r}^{'} = \vec{r} - \vec{v}t$.

Dies trifft auch für die entsprechende Potentialgleichung zu

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\varrho(\vec{r}) \quad , \tag{1.3}$$

wobei ϕ das Gravitationspotential einer Materieverteilung der Dichte ϱ ist. Ausgehend von der Masse M als der im Ursprung ($\vec{r} = 0$) gelegenen Quelle des Gravitationsfeldes, führt die Lösung der Potentialgleichung $\phi = -GM/r$ gemäß der Definition $\vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi$ auf das Gravitationsgesetz (1.2).
In der Speziellen Relativitätstheorie wird die grundlegende Symmetrie durch die Lorentz-Gruppe beschrieben, die $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant läßt. Die Relationen (1.2) und (1.3) sind jedoch nicht kovariant gegenüber der Lorentz-Gruppe.
Physikalisch bedeutet dies, daß in der Newtonschen Theorie die Lichtgeschwindigkeit keine invariante Größe ist und ihr auch nicht die Bedeutung einer Grenzgeschwindigkeit zukommt. Die Gravitation wirkt hier instantan, d. h. ihre Wirkung breitet sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus (Fernwirkungstheorie). Hat man zur Vermeidung dieses Konflikts das Newtonsche Gravitationsgesetz aufzugeben oder möglicherweise so zu modifizieren, daß es mit der Speziellen Relativitätstheorie verträglich wird?

Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie

Die einfachste speziell-relativistische Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung (1.3) führt auf die Wellengleichung

$$\Box\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\phi = -4\pi G\varrho \tag{1.4}$$

und würde somit die Ausbreitung entsprechender Störungen der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit enthalten. Durch einen solchen Ansatz entstehen aber andere Schwierigkeiten. Mit ϕ als skalarem Feld muß auch ϱ ein Skalar sein. Andererseits erwartet man wegen der Äquivalenz von Masse und Energie ($E = mc^2$), daß jede Energiedichte ebenso wie die Massendichte Quelle des Gravitationspotentials sein sollte. Die Energiedichte ist aber keine skalare Größe, sondern die Komponente T^{00} des Energie-Impuls-Tensors. Wollte man nun die zur Energiedichte des elektromagnetischen Strahlungsfeldes äquivalente Masse in der Gleichung (1.4) berücksichtigen, hätte man auf der rechten Seite die skalare Größe $\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}/c^2$ für die Massendichte einzusetzen[1]. Man überzeugt sich aber leicht, daß dieser Ausdruck, d. h. die Spur des Energie-Impuls-Tensors, im Falle des elektromagnetischen Strahlungsfeldes Null ergibt. Da die Photonen keine Ruhmasse besitzen, ist eine andere Kopplung des Gravitationsfeldes (hier ϕ) an das Strahlungsfeld nicht möglich. Das heißt, in dieser skalaren Theorie kann ein Lichtstrahl durch das Gravitationsfeld nicht abgelenkt werden. Dies widerspricht jedoch den Beobachtungen. Aus diesen Überlegungen folgt, daß in einer relativistischen Theorie die Gravitationserscheinungen nicht durch ein skalares Feld beschrieben werden können.
Somit liegt es nahe, bei einem weiteren Versuch statt eines skalaren Feldes ein symmetrisches Tensorfeld $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$ einzuführen. An die Stelle der Gleichung

[1] Hier bezeichnet die Größe $\eta_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor im Minkowski-Raum (s. Gl. (3.17)).

(1.4) tritt dann (bei Wahl der Eichung $\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0$)

$$\Box \phi_{\mu\nu} = -4\pi G T_{\mu\nu} \quad , \tag{1.5}$$

wobei $T_{\mu\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor bezeichnet. In dieser tensoriellen Theorie kann zwar die Lichtablenkung korrekt beschrieben werden, doch für die Perihelverschiebung wird ein Wert vorhergesagt, der mit den Beobachtungen am Planeten Merkur nicht übereinstimmt. Außerdem stellt sich heraus, daß dieser Ansatz nicht selbstkonsistent ist, denn einerseits wird $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gefordert, andererseits wäre dies aber auszuschließen.[2]

Abgesehen von diesen Schwierigkeiten ist festzustellen, daß die Gleichung (1.5) auf der linken Seite den linearen Differentialoperator der Wellengleichung enthält, die das Newtonschen Gesetz verallgemeinernde relativistische Gravitationstheorie aber nichtlinear sein muß. Um dies zu sehen, sei an die Äquivalenz von Masse und Energie erinnert. Das von einer Massenverteilung erzeugte Gravitationsfeld besitzt demnach eine bestimmte Energiedichte, die einer Massendichte äquivalent ist. Diese Massendichte stellt ihrerseits eine Quelle von Gravitation dar und trägt zum Gravitationsfeld bei. Daher ist die relativistische Gravitationstheorie eine nichtlineare Theorie und die entsprechenden Feldgleichungen müssen komplexer sein als der einfache lineare Ansatz (1.5).

Bei dem Versuch, das Newtonsche Gravitationsgesetz relativistisch zu verallgemeinern, erweist sich also der Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie als zu eng. Dies erkennt man auch daran, daß die Gravitationserscheinungen mit dem in der Speziellen Relativitätstheorie grundlegenden Begriff des globalen Inertialsystems unverträglich sind. Bei der Formulierung der relativistischen Mechanik wird das Newtonsche Trägheitsgesetz benutzt und somit der Begriff des inertialen Bezugssystems eingeführt. In einem Inertialsystem bewegt sich ein kräftefreier Körper mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden, oder er ruht. Zu einer Prüfung des Trägheitsgesetzes ist demnach ein Probekörper erforderlich, auf den keine Kräfte einwirken. Nun ist es zwar möglich, Materie gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung abzuschirmen, doch die Wirkung der Gravitation kann prinzipiell global (oder auch nur in größeren Bereichen) nicht kompensiert werden. Wenn ein Körper frei fällt, wird die Gravitationswirkung lokal an diesem Ort aufgehoben.[3] Was jedoch nicht kompensiert werden kann, ist die Inhomogenität des Gravitationsfeldes, die zu einer relativen Beschleunigung benachbarter Körper führt. So ist z. B. von einem Labor aus gesehen, das am Nullmeridian in Greenwich frei fällt und dort ein Inertialsystem darstellt, ein über Hamburg fallendes Labor nicht beschleunigungsfrei. Da Hamburg bei etwa 10° östlicher Länge liegt, bildet die Richtung der Erdbeschleunigung g in Hamburg einen Winkel von 10° mit derjenigen am Nullmeridian. Dies entspricht einer relativen Beschleunigung, die zur Annäherung der beiden frei fallenden Systeme führt.

Als weiteres Beispiel für die Wirkung der nicht zu kompensierenden Inhomogenität des Gravitationsfeldes kann die Entstehung der Gezeiten dienen. Bei ihrem Umlauf

[2] Näheres dazu findet man in Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: Gravitation, W. H. Freeman & Co., San Francisco 1973, S. 186.

[3] Hierauf beruht das Phänomen der Schwerelosigkeit in Raumschiffen.

um die Sonne befindet sich die Erde im Zustand einer permanenten freien Fallbewegung. Das Gravitationsfeld der Sonne ist auf den gegenüberliegenden Seiten der Erde (der Tag- und Nachtseite) nicht gleich stark, wodurch die Sonnengezeiten auf der Erde verursacht werden. Entsprechendes gilt für die Mondgezeiten.
Wollte man die Wirkung der Gravitation vermeiden, müßten die Experimente dort stattfinden, wo es kein Gravitationsfeld, keine gravitierende Materie gibt. Dies wäre aber aus praktischen Gründen kaum zu realisieren und außerdem auch problematisch. Schließlich enthält das Universum Materie in vielfältigen Formen, so daß ihr Einfluß prinzipiell nicht zu vermeiden sein dürfte. So gesehen ist das globale Inertialsystem der Speziellen Relativitätstheorie ein sehr idealisierter Begriff. Die Experimente werden auf der Erde, d. h. in der Nähe gravitierender Materie durchgeführt, und auch die astrophysikalischen Beobachtungen resultieren aus Vorgängen, die sich zwar in großen Entfernungen von uns, aber doch am Entstehungsort in unmittelbarer Nähe großer Massen (Sterne, Sternsysteme, usw.) ereignen.

Lokale Inertialsysteme

In der Umgebung von Massen kann, wie wir gesehen haben, wegen der stets vorhandenen Inhomogenität des Gravitationsfeldes nur lokal ein Inertialsystem realisiert werden. So stellt ein Satellit, der im freien Fall die Erde umkreist, nicht rotiert, dessen Triebwerke abgeschaltet sind, in guter Näherung ein lokales Inertialsystem dar. In diesem frei fallenden Labor kann festgestellt werden, ob das Trägheitsgesetz dort gilt.
Zur Veranschaulichung der Situation betrachten wir zwei verschieden große Satelliten (ohne Eigenrotation und ohne zusätzliche Schubkraft), die in unterschiedlicher Entfernung die Erde umkreisen. In dieser Situation ist im Schwerpunkt der Satelliten die Gravitationsanziehung entgegengesetzt gleich der Zentrifugalkraft. Auf der zur Erde näher gelegenen Seite des Satelliten ist die Gravitationsanziehung jedoch stärker und die Zentrifugalkraft schwächer. Auf der weiter entfernten Seite ist es gerade umgekehrt. Im Fall des großen Satelliten bedeutet dies, daß die unterhalb des Schwerpunktes befindlichen Körper auf die Erde zu, diejenigen oberhalb des Schwerpunktes in entgegengesetzter Richtung beschleunigt werden. Der von dem großen Satelliten eingenommene Raum stellt somit insgesamt kein Inertialsystem dar. Im Unterschied dazu kann die Ausdehnung des kleinen Satelliten so bemessen sein, daß innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit das Gravitationsfeld als homogen und damit der Satellit als ein Inertialsystem in dem begrenzten Bereich angenommen werden kann. Da jede Inhomogenität im Prinzip feststellbar ist, kann ein Bezugssystem genau genommen nur in einem verschwindend kleinen Bereich, mathematisch ausgedrückt in einem Punkt, als inertial angesehen werden.

Verallgemeinerte Trägheitsbewegung

Bei Einbeziehung der Gravitation kommt offenbar dem Begriff des Inertialsystems nicht mehr die ausgezeichnete Stellung zu wie in der Speziellen Relativitätstheorie. Nach den vorigen Ausführungen wird aber auch deutlich, daß in jeder Theorie der

Gravitation lokale Inertialsysteme als Grenzfall zugelassen sein sollten. Bei der Formulierung einer relativistischen Gravitationstheorie, der Allgemeinen Relativitätstheorie, liegt nun folgender Gedanke als nützlicher Ausgangspunkt nahe, der auf Albert Einstein zurückgeht. Da die Gravitationswirkungen nicht abgeschirmt und somit die gemäß dem Trägheitsgesetz definierten Inertialsysteme nur lokal eingeführt werden können, gehe man davon aus, daß Gravitation und Trägheit nicht getrennt zu betrachten sind, sondern im Grunde zusammengehören. Die Wirkungen, die beide Phänomene auf einen Körper ausüben, sind schließlich gleich: die auftretenden Kräfte sind in jedem Falle (Gravitationskräfte, Inertialkräfte) proportional zur Masse des Körpers. Dementsprechend ist es sinnvoll, von dem Trägheitsgesetz in einer allgemeinen Formulierung auszugehen. Hiernach gibt es eine allgemeine Standardbewegung, und wenn ein Körper dieser Standardbewegung folgt, wirken keine Kräfte auf ihn. In dem speziellen Fall eines Inertialsystems ist diese Standardbewegung dann die Bewegung auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit. Die Standardbewegung[4] (verallgemeinerte Trägheitsbewegung) ist hiernach jede Bewegung, die nur durch Trägheit und Gravitation, die beide allen Körpern eigen sind, hervorgerufen wird, wie z. B. bei der Bewegung im freien Fall und bei der Bewegung der Erde (im freien Fall) um die Sonne. Zusätzliche Kräfte sind dann als diejenigen Kräfte definiert, die den Körper von seiner Standardbewegung abbringen. Gravitation und Trägheit bilden sozusagen den Hintergrund, vor dem sich alle übrigen Bewegungen unter dem Einfluß anderer Kräfte abspielen.

Eigenschaften der relativistischen Gravitationstheorie

Als unaufhebbarer Bestandteil des Gravitationsfeldes bewirken seine Inhomogenitäten eine relative Beschleunigung benachbarter Körper. Diesen wesentlichen Effekt muß die zu formulierende relativistische Gravitationstheorie beschreiben. Bei Vernachlässigung der relativen Beschleunigung (d. h. der Inhomogenitäten des Feldes) sollte sie in die Spezielle Relativitätstheorie übergehen. Sowohl diese Forderungen als auch die Konzeption der verallgemeinerten kräftefreien Bewegung sind in der von Albert Einstein entwickelten Allgemeinen Relativitätstheorie realisiert. Diese Theorie hat folgende Eigenschaften:

1. Sie ist relativistisch, d. h. sie ergibt lokal, bei möglicher Vernachlässigung der Inhomogenitäten auch in kleinen Bereichen, die Spezielle Relativitätstheorie, deren Gültigkeit experimentell sehr genau überprüft ist.
2. Sie ergibt in großen Bereichen, dort wo schwache Gravitationsfelder vorhanden sind, in guter Näherung die Newtonsche Gravitationstheorie, die sich bei der Beschreibung der Bewegungen im Sonnensystem bewährt hat. Die geringen Abweichungen von den Voraussagen der Newtonschen Theorie, die innerhalb des Sonnensystems festzustellen sind, bestätigen die Allgemeine Relativitätstheorie.

[4] Die Standardbewegungen sind durchaus komplizierter als die Bewegungen auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit. Sie werden mathematisch durch die Geodäten in einer gekrümmten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit (einem Riemannschen Raum) beschrieben. Wir werden später darauf zurückkommen.

3. Sie bezieht als relativistische Theorie jede Form von Energie in die Gravitation ein, insbesondere enthält sie die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feldern (Licht). Die Newtonsche Theorie erlaubt hingegen ohne Zusatzannahmen keine Aussagen über das Verhalten von Licht im Gravitationsfeld.

Bei der Formulierung dieser Theorie ist eine allgemeinere (und kompliziertere) mathematische Methode einzuführen als die in der Mechanik und Elektrodynamik verwendete Vektoranalysis im Minkowski-Raum. Dies wird am Beispiel der beiden Erdsatelliten deutlich. Wenn sie in ungleichen Abständen die Erde umkreisen, haben sie verschiedene Umlaufperioden und sind gegenseitig beschleunigt. Das bedeutet, auch wenn sie zeitweilig nahe genug beieinander sind, können wir die beiden Satelliten nicht zu einem einzigen zusammenfügen und somit auch nicht erwarten, daß es eine Lorentz-Transformation gibt, die ihre lokalen Inertialsysteme ineinander überführt. Da die Lorentz-Transformation, die ja linear ist, hier nicht in Betracht kommt, wird die Relation zwischen den Inertialsystemen, die bezüglich verschiedener Raum-Zeit-Punkte definiert sind, allgemeiner als ein linearer Zusammenhang, d. h. nichtlinear sein, wie es auch aufgrund der relativen Beschleunigung der Systeme zu erwarten ist. Diese Relation wird durch die einzige hier in Frage kommende Ursache bestimmt, durch die Massenverteilung, in deren Gravitationsfeld die Inertialsysteme sich bewegen. In unserem Beispiel stellt die Erde die Massenverteilung dar und die sie umkreisenden Satelliten die Inertialsysteme. Beim Versuch einer globalen Beschreibung des Gravitationsfeldes muß man demnach bereit sein, nichtlineare Koordinatentransformationen zuzulassen, d. h. auch allgemeine krummlinige Koordinaten einzuführen, die nicht global in die geradlinigen Koordinaten des Minkowski-Raumes übergeführt werden können.

Gravitation und Geometrie

Man erkennt hier die Verhältnisse wieder, wie sie in gekrümmten Räumen anzutreffen sind. Denn auch hier ist es nicht möglich, global ein starres euklidisches Koordinatensystem einzuführen. So würden z. B. im Fall der Oberfläche einer Kugel die Koordinatenlinien aus den Räumen (d. h. der Kugeloberfläche) herausragen. Zum besseren Verständnis ist es nützlich, den Vergleich mit einer gekrümmten Fläche weiter zu verfolgen. In kleinen Bereichen, die durch Flächenelemente dargestellt werden, gilt auf einer gekrümmten Fläche in guter Näherung die Geometrie der Ebene, d. h. des flachen Raumes. Die Flächenelemente lassen sich aber nicht zu einer großen Ebene vereinen, sondern stehen in komplizierter Relation zueinander, die durch die Krümmung der Fläche bestimmt wird. Die Krümmung der Fläche entspricht also gerade dem Einfluß der Masse in der Allgemeinen Relativitätstheorie und die Flächenelemente repräsentieren die Inertialsysteme.

Dieser Vergleich ist durchaus von größerer Bedeutung als es zunächst erscheinen mag. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Wirkung der Gravitation eine Eigenschaft des gekrümmten Raum-Zeit-Kontinuums und damit geometrisiert. Man bezeichnet die Einsteinsche Gravitationstheorie daher zutreffend auch als Geometrodynamik. Die geometrische Struktur der Raum-Zeit entspricht der eines Riemannschen Raumes. Seine Metrik $g_{\mu\nu}(x)$, die das Gravitationsfeld repräsentiert, wird durch die Massen- und Energieverteilung bestimmt. Die kräftefreie Bewegung der Massen im Gravitationsfeld erfolgt dann auf Geodäten in der gemäß der Materie gekrümmten Raum-Zeit (Standardbewegung). Aus mathematischer Sicht stellen die vorher erwähnten lokalen Inertialsysteme die ebenen Tangentialräume des Riemannschen Raumes in den jeweiligen Punkten dar. Die Anwendung der Lorentz-Transformation ist auf diese Räume beschränkt, während im allgemeinen Fall nichtlineare Transformationen erforderlich sind. In der Allgemeinen Relativitätstheorie sind Trägheit, Metrik und Gravitation vereinigt. Raum und Zeit haben keine unabhängige und damit absolute Existenz, sondern sind aufs engste verknüpft mit den materiellen Objekten, die den Raum erfüllen.

Stellung innerhalb der Physik

Hiernach ist es verständlich, daß die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie von einer entwickelten Mathematik gekrümmter, d. h. nichteuklidischer Räume abhängig war. Die hier anzuwendenden Methoden sind durchaus verschieden von der Tensoranalysis im Minkowski-Raum, die in der Speziellen Relativitätstheorie, bei der Formulierung der Elektrodynamik und anderer Feldtheorien benutzt wird. So konnte es dazu kommen, daß die Allgemeine Relativitätstheorie nach ihrer Entstehung zunächst für mehrere Jahrzehnte von den anderen Gebieten der Physik etwas separiert war. Ein weiterer Grund hierfür liegt sicher auch in dem zeitweilig fehlenden Fortschritt bei ihrer Anwendung und experimentellen Prüfung.
In neuerer Zeit hat sich diese Situation jedoch völlig verändert, so daß die Gravitationstheorie mit ihren Anwendungen heute ein besonders interessantes und aktuelles Forschungsgebiet innerhalb der Physik darstellt. Zu dieser Entwicklung haben die verfeinerten Techniken bei Präzisionsexperimenten (Mößbauer-Effekt, Radar-Technik, etc.), der Einsatz von Raumsonden (Satelliten), sowie neue astrophysikalische Entdeckungen (Neutronensterne, Pulsare, Quasare) beigetragen. Außerdem bildet die Einsteinsche Gravitationstheorie den Rahmen für die Formulierung relativistischer kosmologischer Modelle. Auf diesem Gebiet haben sich in neuerer Zeit interessante Zusammenhänge mit den Erkenntnissen in der Physik der Elementarteilchen ergeben. Diese symbiotische Beziehung zweier scheinbar getrennter Gebiete eröffnet unerwartete Einsichten und dürfte auch für die weitere Entwicklung unserer Vorstellung über die Entstehung der „Welt im Großen“ und ihre Beschaffenheit „im Kleinen“ von großer Bedeutung sein.
Die fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen werden durch Eichfeldtheorien beschrieben, die in ihrer Struktur große formale Ähnlichkeiten mit der Allgemeinen Relativitätstheorie haben, d. h. letztere kann auch als Eichfeldtheorie formuliert werden. Von besonderem Interesse in der aktuellen Forschung sind derzeit die Bestrebungen, alle fundamentalen Wechselwirkungen unter Einbeziehung der Gravitation in einer vereinheitlichten Theorie zusammenzufassen. Die dabei auftretende Frage nach der Quantisierung des Gravitationsfeldes, mit Gravitonen als dem entsprechenden Feldquant (Spin 2), führt auf Probleme, die noch zu lösen sind.

2 Zur historischen Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Zeit um 1905 war reif für die Aufstellung der Speziellen Relativitätstheorie. So konnte Albert Einstein (1879–1955) die damit zusammenhängenden Probleme in seiner berühmten Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (Ann. d. Physik **17**, 891 (1905)) lösen. Man darf zur Situation um das Jahr 1905 zusammenfassend feststellen: Den Anfang der Speziellen Relativitätstheorie machte H. A. Lorentz (1853–1928), die physikalische Grundlage und den physikalischen Gehalt zeigte A. Einstein, die mathematische Struktur ist bei H. Poincaré (1854–1912) am klarsten. Dagegen ist die Allgemeine Relativitätstheorie, wie wohl keine andere große physikalische Theorie, das Werk eines einzelnen Menschen.

Einsteins Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie war schwierig und bedurfte der Anstrengungen vieler Jahre. Den Arbeiten Albert Einsteins aus jenen Jahren ist zu entnehmen, wie mühsam die Allgemeine Relativitätstheorie, für die es nur ganz wenige Indizien gab, herausgearbeitet werden mußte. Einstein war sich der Grenzen der von ihm formulierten Speziellen Relativitätstheorie durchaus bewußt. Die folgenden Mängel dieser Theorie waren zu überwinden: Die Beschränkung auf Inertialsysteme und auf die damit verbundenen Galilei-Koordinaten, sowie die Nichteinbeziehung der Gravitation.

Warum sollte irgendein Bezugssystem, das Inertialsystem der Speziellen Relativitätstheorie, vor anderen (beliebigen) Bezugssystemen ausgezeichnet sein? Die Naturgesetze sollen sich so formulieren lassen, daß sie in allen Bezugssystemen gelten, unabhängig vom Bewegungszustand der Bezugssysteme. Es müßte möglich sein, die Gruppe der gleichmäßig gegeneinander bewegten Bezugssysteme auf die Gruppe aller möglichen Bezugssysteme zu erweitern. Dieses Ziel, das Einstein sich selbst stellte, nannte er das „allgemeine Relativitätsprinzip“. Er wußte zunächst nicht, wie dieses Problem zu lösen war und wie die Lösung ausfallen würde. Der Durchbruch zur Lösung gelang erst 1915. An dieses Prinzip knüpft die historische Bezeichnung „Allgemeine Relativitätstheorie“ an. Dem Inhalt nach ist die Einsteinsche Theorie eine relativistische Theorie der Gravitation, in der die Gravitationsquellen die Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums bestimmen. Daher wäre die Bezeichnung „Geometrodynamik“ durchaus zutreffender.

Das Konzept allgemeiner (d. h. beschleunigter) Bezugssysteme ist im Ansatz bereits im letzten Teil einer längeren Arbeit aus dem Jahre 1907 enthalten, in der Einstein einen systematischen Überblick über die Spezielle Relativitätstheorie gibt.[1] In dieser Arbeit führt er auch das sogenannte „Äquivalenzprinzip“ ein.

[1] A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4**, 411 (1907).

Hiernach kann man physikalisch nicht unterscheiden zwischen Bezugssystemen, die sich in einem homogenen und stationären Gravitationsfeld befinden und solchen ohne Gravitation, aber mit entsprechender (d. h. hinsichtlich Stärke und Richtung) konstanter Beschleunigung. Durch diese Hypothese wird klar, warum träge und schwere Masse unter allen Umständen zueinander proportional sein müssen. Entsprechend ist die Äquivalenz von Energie und träger Masse ($E = mc^2$) auf die schwere Masse zu verallgemeinern.
Einstein nannte das Äquivalenzprinzip „den glücklichsten Gedanken meines Lebens“. Dies äußerte er in einer Arbeit 1920[2], die für die Zeitschrift *Nature* bestimmt war, wegen Überlänge jedoch durch eine kürzere Version ersetzt werden mußte.[3] Das Manuskript in der ursprünglichen Fassung blieb jedoch erhalten und ist eine interessantes Dokument, in dem der Autor nicht nur seine Gedanken darlegt, sondern auch seine Empfindungen mitteilt.[4]
Die Gleichheit von träger und schwerer Masse, auf der das Äquivalenzprinzip beruht, war im Rahmen der Newtonschen Mechanik eine empirische Tatsache, die im Hintergrund blieb und als zufällig angesehen wurde. Aber Einstein erkannte darin ein grundlegendes Prinizip der Natur und forderte für das von ihm formulierte Äquivalenzprinzip universelle Gültigkeit.
Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips konnte Einstein den Einfluß der Gravitation auf physikalische Phänomene ermitteln, denn hiernach brauchte man nur das betreffende Phänomen von einem beschleunigten Bezugssystem aus zu betrachten. Er erhielt so bereits in der Arbeit von 1907 das Ergebnis, daß Uhren in starken Gravitationsfeldern langsamer gehen als in der Umgebung von schwächeren Gravitationsfeldern. Dies muß zu einer Rotverschiebung des im Gravitationsfeld der Sonne aufsteigenden Sonnenlichts führen. Auch werden Lichtstrahlen, die nahe an der Sonne vorbeigehen, durch das Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt.[5]
In den folgenden dreieinhalb Jahren schweigt Einstein zum Thema der Gravitation, obwohl er Arbeiten über Themen der Speziellen Relativitätstheorie und vor allem über quantenmechanische Probleme der Strahlung publiziert. Offenbar stand für Einstein in dieser Zeit (1908–1911) nicht die Gravitation, sondern die Quantentheorie im Vordergrund des Interesses. Dies ist insbesondere aus seinen Briefen zu entnehmen, die er damals an seine Freunde und andere Physiker geschrieben hat.[6]
Das Thema der Gravitation wird von Einstein 1911 wieder aufgenommen durch die

---

[2] A. Einstein: Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie in ihrer Entwicklung dargestellt, 1920. Publiziert in „The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 7: The Berlin Years: Writings, 1918–1921“, Princeton University Press, Princeton 2002

[3] A. Einstein: A brief outline of the development of the theory of relativity, Nature **106**, 782 (1921).

[4] Weitere sehr aufschlußreiche Äußerungen Einsteins über seine Ideen bei der Entwicklung der Relativitätstheorie findet man in seinem in der Universität von Kyoto, Japan, 1922 gehaltenen Vortrag, dessen Mitschrift von Y. A. Ono ins Englische übertragen wurde: How I created the Theory of Relativity, Physics Today, August 1982, S. 45.

[5] Hinsichtlich näherer Einzelheiten hierzu siehe Abschnitt 9.3.

[6] Nähere Einzelheiten dazu findet man in dem hervorragenden Buch von A. Pais: „Raffiniert ist der Herrgott … “: Albert Einstein – Eine wissenschaftliche Biographie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986.

Arbeit „Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes“ (Ann. d. Physik **35**, 898–908 (1911)). Diese Frage hatte er schon 1907 behandelt und kehrt nun dazu unter allgemeinerem Gesichtspunkt zurück. Nach dem Äquivalenzprinzip sind die beiden folgenden Situationen äquivalent:

- homogenes Gravitationsfeld, Beobachter in Ruhe;
- kein Gravitationsfeld, Beobachter in Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

Wenn das Äquivalenzprinzip universelle Gültigkeit hat, dann sind träge und schwere Masse notwendigerweise gleich und somit gemäß $E = mc^2$ auch die träge und schwere Energie. In dieser Arbeit wird die Rotverschiebung und die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld diskutiert. Die Lichtablenkung kam hier, wie sich später zeigte, zunächst mit einem um den Faktor zwei zu kleinen Wert heraus.

In den folgenden Jahren erscheint eine Reihe von Arbeiten Einsteins zur Gravitation. Sie sind ein beredtes Zeugnis seiner intensiven Bemühungen über auftretende Schwierigkeiten und Irrtümer hinweg endlich Klarheit zu gewinnen. Den logischen Abschluß seiner Theorie konnte Einstein schließlich am 25. November 1915 in einer Sitzung der Preußischen Akademie der Wissenschaften, deren Mitglied er seit 1913 war, in Berlin präsentieren. Die nur drei Seiten umfassende Arbeit enthält die richtige Form der Einsteinschen Gravitationstheorie.[7] In seiner späteren Publikation „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“ (Ann. d. Physik **49**, 769–822 (1916))[8], wird das Gesamtgebäude der Allgemeinen Relativitätstheorie in zusammenfassender Weise dargestellt. Man kann sie als den Höhepunkt des Einsteinschen Werkes ansehen. Wie Einstein bekannt hat, ist er „nach langen Irrwegen“ zur endgültigen Formulierung seiner Gravitationstheorie gelangt.

Jahre später erinnerte Einstein in einem Vortrag über die Entstehung der Allgemeinen Relativitätstheorie an die vorangegangene Zeit mühevoller Arbeit: „Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfaßt es ohne zu große Mühe. Aber das ahnungsvolle Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Wahrheit, das kennt nur, wer es selber erlebt hat.“[9]

Entwicklung der Differentialgeometrie

Eine große Hilfe bei der Bewältigung mathematischer Probleme war für Einstein sein Freund Marcel Großmann (1878–1936), der ihn auf die Methode der Differentialgeometrie aufmerksam machte und ihn darin einführte. Die Anfänge der Differentialgeometrie gehen auf Carl Friedrich Gauß (1777–1855) zurück, der auch die Gültigkeit der euklidischen Geometrie für den realen physikalischen Raum anzweifelte. Er entwickelte die Theorie gekrümmter zweidimensionaler Flächen, wobei das Krümmungsmaß durch die inneren Eigenschaften der Fläche ausgedrückt wird. Gauß war auch der erste, der erkannt hatte, daß es eine nicht-

[7] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. II, 1915, S. 844.

[8] Abgedruckt in dem Sammelband: Das Relativitätsprinzip, 1913, Neudruck Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1958.

[9] Zitat aus: A. Einstein, Mein Weltbild (Hrsg. C. Seelig), Frankfurt M. (Ullstein Buch Nr. 65), S. 138.

euklidische Geometrie gibt, bei der das Parallelenaxiom von Euklid nicht mehr gilt. Aber unabhängig voneinander hatten auch Janos Bólyai (1802–1860) und Nicolai Lobatschewski (1792–1856) die nichteuklidische (hyperbolische) Geometrie entwickelt. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie stellt einen bedeutenden Wendepunkt in der Wissenschaftsgeschichte dar, denn damit wurde klar, daß seitens der Logik und Mathematik allein nicht zu entscheiden war, von welcher Art die Geometrie des realen physikalischen Raumes ist. Das Problem der wahren Geometrie konnte offenbar nur durch experimentelle Erfahrung gelöst werden.
Ausgehend von der Gaußschen Flächentheorie hat Bernhard Riemann (1826–1866) diese Lehre für Räume mit variabler Krümmung und beliebiger Dimensionszahl verallgemeinert und damit auch die Grundlage für die Geometrie der vierdimensionalen Raum-Zeit geschaffen. Er untersuchte Mannigfaltigkeiten, in denen die Abstände durch die Maßbestimmung $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ definiert sind. In seinem berühmten Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" äußerte Riemann bereits 1854[10] die Vermutung, daß das metrische Feld nicht ein für allemal starr gegeben ist, sondern von der Verteilung der Materie abhängt und mit ihr sich ändert. Damit hatte Riemann einen zentralen Gedanken in Einsteins Gravitationstheorie vorweg geäußert.
Mit einem projektiven Modell für die nichteuklidische Geometrie konnte Felix Klein (1849–1925) die Widerspruchsfreiheit dieser Geometrie auf die Widerspruchsfreiheit der projektiven Geometrie zurückführen. Damit war die Existenzberechtigung der neuen Geometrie erwiesen, und das neue Denken über die Geometrie wurde schließlich Allgemeingut der Forschung. In seinem berühmt gewordenen „Erlanger Programm" formulierte Klein 1872 einen einheitlichen Standpunkt für den Aufbau verschiedener geometrischer Systeme. Beim weiteren technischen Ausbau der Riemannschen Geometrie führte E. Christoffel (1829–1900) Ausdrücke der „kovarianten Differentiation" ein. Die systematische Formulierung des „absoluten Differentialkalküls" wurde schließlich von den italienischen Mathematikern Gregorio Ricci (1853–1925) und Tullio Levi-Civita (1873–1941) ausgearbeitet.[11]
Der bedeutende Physiker und Physiologe Hermann von Helmholtz (1821–1894) hat in seiner Schrift „Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen" physikalische Aspekte in den Vordergrund gestellt. Geht man von der anschaulich wahrnehmbaren freien Beweglichkeit ausgedehnter starrer Körper aus, dann sind, wie Helmholtz gezeigt hat, nur Räume mit konstanter Krümmung K zugelassen, wobei der Wert von K experimentell zu bestimmen ist. Dadurch wird die herausgehobene Bedeutung der Theorie der euklidischen Geometrie ($K = 0$) verständlich. Für die weitere Entwicklung hat sich jedoch die Annahme ausgedehnter starrer Körper als zu einschränkend erwiesen. Riemann dagegen geht bei seiner Verallgemeinerung der Geometrie davon aus, daß Abstände nur für infinitesimal benachbarte Punkte erklärt sind. Zu Riemanns Vorstellungen bekannte sich der Geometer W.K. Clifford (1845–1879), der ebenfalls in Riemanns Begriff des Raumes die Möglichkeit einer Verbindung von Geometrie und Physik sah. Nach seinen

[10] Postum veröffentlicht in Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **13**, 133 (1868), s. auch B. Riemann, Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig 1892, S. 272.
[11] Eine zusammenfassende Darstellung ihrer Ergebnisse wurde 1901 veröffentlicht: Math. Ann. **54**, 125 (1901).