L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band VI

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2011, 231 Seiten, 56 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2009, 496 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2012, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2009, 628 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2008, 535 Seiten, 78 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:
Elastizitätstheorie
unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2014, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden,
ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
4., berichtigte Auflage 1992, 404 Seiten, 18 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:
Physikalische Kinetik
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2012, 480 Seiten, 35 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**
ISBN 978-3-8085-5588-0

EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

L. D. Landau • E. M. Lifschitz

Hydrodynamik

Mit 136 Abbildungen

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55545

Titel der Originalausgabe:
Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу
Гидродинамика

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1986 (3., überarbeitete und ergänzte Auflage)

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. Wolfgang Weller,
übersetzt aus dem Russischen von Prof. Dr. A. Kühnel und Prof. Dr. Wolfgang Weller.

Korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5554-5

http://www.europa-lehrmittel.de
Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 60388 Frankfurt / Main
Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Die Neubearbeitung des Teiles Hydrodynamik der 1953 erschienenen Mechanik der Kontinua konnte noch von E. M. Lifschitz abgeschlossen werden. Neben Verbesserungen und Straffungen, die das gesamte Buch durchziehen, sind etwa zwanzig neue Paragraphen hinzugekommen. Insbesondere ist die Darlegung der Szenarien zur Turbulenzentstehung neu geschrieben worden. Die Neubearbeitung geht damit weit über die Ergänzungen hinaus, die in den bisher erschienenen deutschen und englischen Ausgaben enthalten sind. Im Zusammenhang mit den in letzter Zeit sehr intensiv betriebenen Untersuchungen nichtlinearer Erscheinungen und des dabei auftretenden deterministischen Chaos gewinnen hydrodynamische Probleme und Begriffsbildungen auch unter den Physikern wieder wesentlich stärkere Bedeutung.

Bei der Darstellung der Hydrodynamik haben die Autoren besonderen Wert auf den Zusammenhang der Hydrodynamik mit den anderen Gebieten der Physik gelegt. Die physikalischen Grundlagen der Theorie stehen deshalb stets im Vordergrund. Betrachtet wird eine Vielzahl von Teilgebieten, besonders erwähnt seien hier nur die Theorie der entwickelten Turbulenz, die Theorie des Schalls, die Theorie der Stoßwellen, die Hydrodynamik der Verbrennung, die relativistische Hydrodynamik und die Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit. Wie alle Bände des Kurses so zeichnet sich auch dieser Band wieder durch Klarheit und physikalische Anschaulichkeit der Darstellung aus.

Die Zusammenarbeit mit Herrn Prof. E. M. Lifschitz bewahren wir in dankbarer Erinnerung. Herrn Prof. L. P. Pitajewski sind wir für die Unterstützung bei der Vorbereitung dieser deutschen Ausgabe sehr zu Dank verpflichtet.

Dresden und Leipzig, Dezember 1990

P. Ziesche W. Weller

VORWORT

In den beiden vorhergehenden (russischen) Auflagen (1944 und 1953) stelllte die Hydrodynamik den ersten Teil der „Mechanik der Kontinua" dar; jetzt ist sie als gesonderter Band abgetrennt.

Der Charakter des Inhalts und der Darstellung in diesem Buch ist im unten wiedergegebenen Vorwort zur vorhergehenden Auflage festgelegt. Es war meine hauptsächliche Sorge, diesen Charakter bei der Überarbeitung und Ergänzung nicht zu verändern.

Trotz der vergangenen 30 Jahre ist der in der zweiten Auflage enthaltene Stoff faktisch nicht veraltet, von sehr unbedeutenden Ausnahmen abgesehen. Dieser Stoff wurde nur verhältnismäßig wenig ergänzt und verändert. Gleichzeitig wurde eine Reihe neuer Paragraphen hinzugefügt, etwa fünfzehn über das ganze Buch verteilt.

In den letzten Jahrzehnten entwickelte sich die Hydrodynamik außerordentlich intensiv, und entsprechend ungewöhnlich erweiterte sich die Literatur dieses Gebietes. Die Entwicklung ging jedoch in merklichem Maße in angewandte Richtungen und auch in Richtung der Erhöhung der Schwierigkeit der der theoretischen Berechnung zugänglichen Aufgaben (dabei auch unter Benutzung von Computern). Zu den letzteren gehören insbesondere die verschiedenartigen Aufgaben über Instabilitäten und ihre Entwicklung, darunter auch im nichtlinearen Regime. Alle diese Fragen liegen außerhalb des Rahmens dieses Buches; insbesondere werden Fragen der Instabilität (wie auch in den vorhergehenden Auflagen) in prinzipieller, zu einem Resultat führender Weise dargelegt.

Nicht aufgenommen wurde in das Buch auch die Theorie nichtlinearer Wellen in dispergierenden Medien, die in der gegenwärtigen Zeit ein bedeutendes Kapitel der mathematischen Physik bildet. Im reinen Sinne der Hydrodynamik gehören zu dieser Theorie Wellen großer Amplitude auf der Oberfläche einer Flüssigkeit. Die hauptsächlichen physikalischen Anwendungen dieser Theorie gehören zur Physik des Plasmas, zur nichtlinearen Optik, zu verschiedenen elektrodynamischen Aufgaben u. a.; in diesem Sinne gehört sie zu anderen Bänden.

Wesentliche Änderungen haben sich beim Verständnis des Mechanismus der Entstehung der Turbulenz ergeben. Obwohl eine konsequente Theorie der Turbulenz noch der Zukunft angehört, besteht Grund zu der Annahme, daß ihre Entwicklung endlich auf den richtigen Weg gekommen ist. Die sich hierauf beziehenden gegenwärtig existierenden grundlegenden Ideen und Resultate sind in drei Paragraphen (§§ 30 – 32) dargelegt, die von mir gemeinsam mit M. I. RABINOWITSCH geschrieben wurden; ich bin ihm äußerst dankbar für die auf diese Weise erwiesene große Hilfe. In der Mechanik der Kontinua entstand in den letzten Jahrzehnten ein neues Gebiet, die Mechanik flüssiger Kristalle. Sie trägt gleichzeitig Züge, die zur Mechanik flüssiger und elastischer Medien gehören. Es ist geplant, die Darstellung ihrer Grundlagen in die neue Auflage der „Elastizitätstheorie" aufzunehmen.

Unter den Büchern, die ich gemeinsam mit Lew Dawidowitsch Landau schreiben konnte, nimmt dieses Buch einen besonderen Platz ein. Er legte in das Buch einen Teil seiner Seele. Dieses für Lew Dawidowitsch damals neue Gebiet der theoretischen Physik begeisterte ihn, und er begann, wie es für ihn charakteristisch war, aufs neue dessen hauptsächliche Resultate für sich zu durchdenken und abzuleiten. Hieraus entstand eine Reihe von Orginalarbeiten von ihm, die in verschiedenen Zeitschriften veröffentlich worden sind. Jedoch eine Reihe von originalen Resultaten oder Gesichtspunkten, die Lew Dawidowitsch gehören und in das Buch eingegangen sind, sind nicht anderswo veröffentlich worden, und in einigen Fällen wurde seine Priorität sogar erst später aufgeklärt. In der neuen Auflage des Buches habe ich in allen mir bekannten solchen Fällen einen Hinweis auf seine Autorschaft ergänzt.

Bei der Überarbeitung dieses sowie auch der anderen Bände der „Theoretischen Physik“ wurde ich unterstützt durch die Hilfe und die Ratschläge vieler meiner Freunde und Arbeitskollegen. Ich möchte in erster Linie zahlreiche Diskussionen mit G. I. Barenblatt, Ja. B. Seldowitsch, L. P. Pitajewski, Ja. G. Sinaj erwähnen. Eine Reihe wertvoller Hinweise erhielt ich von A. A. Andronow, S. I. Anisimow, W. A. Belokon, W. P. Krajnow, A. G. Kulikowski, M. A. Liberman, R. W. Polowin, A. W. Timofejew, A. L. Fabrikant. Ihnen allen möchte ich hier aufrichtig danken.

Institut für Physikalische Probleme
der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Moskau, im August 1984 E. M. Lifschitz

AUS DEM VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE DER „MECHANIK DER KONTINUA"

Das vorliegende Buch ist der Darstellung der Mechanik kontinuierlicher Medien gewidmet, d. h. der Theorie der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen (Hydrodynamik) und von festen Körpern (Elastizitätstheorie). Diese Theorien, die ihrem Wesen nach Gebiete der Physik sind, verwandelten sich auf Grund einiger ihrer spezifischen Besonderheiten in selbständige Wissenschaften.

In der Elastizitätstheorie spielt eine große Rolle die Lösung mathematisch exakt gestellter Aufgaben, die mit linearen partiellen Differentialgleichungen verbunden sind; die Elastizitätstheorie enthält deshalb viele Elemente der sogenannten mathematischen Physik.

Die Hydrodynamik hat einen wesentlich anderen Charakter. Ihre Gleichungen sind nichtlinear, und deshalb ist ihre unmittelbare Untersuchung und Lösung nur in verhältnismäßig seltenen Fällen möglich. Infolgedessen war die Entwicklung der modernen Hydrodynamik nur im ständigen Zusammenhang mit dem Experiment möglich. Dieser Umstand bringt sie sehr nahe zu anderen Gebieten der Physik.

Trotz ihrer praktischen Absonderung von den anderen Gebieten der Physik haben Hydrodynamik und Elastizitätstheorie nichtsdestoweniger eine große Bedeutung als Teile der Theoretischen Physik. Auf der einen Seite sind sie Anwendungsgebiete der allgemeinen Methoden und Gesetze der Theoretischen Physik, und ein klares Verständnis der Hydrodynamik und Elastizitätstheorie ist nicht möglich ohne die Kenntnis der Grundlagen anderer Kapitel der Theoretischen Physik. Auf der anderen Seite ist die Mechanik der Kontinua selbst unentbehrlich für die Lösung von Aufgaben aus vollständig anderen Gebieten der Theoretischen Physik.

Wir möchten hier einige Bemerkungen machen über den Charakter der Darstellung der Hydrodynamik im vorliegenden Buch. Dieses Buch legt die Hydrodynamik als Teil der Theoretischen Physik dar, und damit ist in sehr starkem Maße der Charakter seines Inhalts bestimmt, der sich wesentlich unterscheidet von dem anderer Kurse der Hydrodynamik. Wir strebten danach, möglichst vollständig alle Fragen zu analysieren, die physikalisch von Interesse sind. Dabei bemühten wir uns, die Darstellung in einer solchen Weise aufzubauen, daß ein nach Möglichkeit klareres Bild der Erscheinungen und ihrer gegenseitigen Beziehungen entsteht. Entsprechend diesem Charakter des Buches behandeln wir hier nicht Näherungsmethoden für hydrodynamische Berechnungen und auch nicht solche empirische Theorien, die keine tiefere physikalische Begründung haben. Es werden hier aber solche Gegenstände behandelt wie die Theorie des Wärmetransports und der Diffusion in Flüssigkeiten, die Akustik und die Theorie der Verbrennung, die üblicherweise aus den Kursen der Hydrodynamik herausfallen.

In der vorliegenden zweiten Auflage ist das Buch wesentlich überarbeitet worden. Hinzugefügt wurde eine beträchtliche Menge neuen Stoffes, insbesondere in der Gasdynamik, die fast vollständig neu geschrieben wurde. Unter anderem wurde eine Darstellung der Theorie der schallnahen Strömung hinzugefügt. Diese Frage ist von wichtigster prinzipieller Bedeutung für die gesamte Gasdynamik, da die Untersuchung der beim Überschreiten der Schallgeschwindigkeit auftretenden Besonderheiten die Aufklärung der wesentlichen qualitativen Eigenschaften der stationären Umströmung fester Körper von Gasen ermöglichen sollte. Auf diesem Gebiet ist bisher noch verhältnismäßig wenig getan worden; viele wichtige Fragen können gerade erst gestellt werden. Im Hinblick auf die Notwendigkeit ihrer weiteren Ausarbeitung geben wir eine ausführliche Darstellung des hier angewandten mathematischen Apparates.

Hinzugefügt wurden zwei neue Kapitel, die der relativistischen Hydrodynamik und der Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit gewidmet sind. Die relativistischen hydrodynamischen Gleichungen (Kapitel XV) können bei verschiedenen astrophysikalischen Fragen Anwendung finden, z. B. bei der Untersuchung von Objekten, bei denen Ausstrahlung eine wichtige Rolle spielt; ein eigenartiges Anwendungsfeld dieser Gleichungen eröffnet sich z. B. auch auf einem ganz anderen Gebiet der Physik, in der Theorie der Vielfacherzeugung von Teilchen bei Stößen. Die im Kapitel XVI dargestellte „Zweigeschwindigkeits"-Hydrodynamik gibt eine makroskopische Beschreibung der Bewegung einer superfluiden Flüssigkeit, wie sie flüssiges Helium bei Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt darstellt ...

Wir möchten JA. B. SELDOWITSCH und L. I. SEDOW aufrichtig danken für die für uns wertvolle Diskussion einer Reihe von hydrodynamischen Fragen. Wir danken auch D. W. SIWUCHIN, der das Buch im Manuskript gelesen und eine Reihe von Bemerkungen gemacht hat, die wir bei der Vorbereitung der zweiten Auflage des Buches benutzt haben.

Moskau, 1952 L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. **Ideale Flüssigkeiten** ... 1

§ 1. Die Kontinuitätsgleichung ... 1
§ 2. Die Eulersche Gleichung ... 2
§ 3. Hydrostatik ... 6
§ 4. Die Bedingung für das Fehlen der Konvektion ... 8
§ 5. Die Bernoullische Gleichung ... 10
§ 6. Der Energiestrom ... 12
§ 7. Der Impulsstrom ... 14
§ 8. Die Erhaltung der Zirkulation ... 16
§ 9. Potentialströmungen ... 18
§ 10. Inkompressible Flüssigkeiten ... 22
§ 11. Die Widerstandskraft bei der Potentialströmung ... 34
§ 12. Schwerewellen ... 40
§ 13. Wellen in einer inkompressiblen Flüssigkeit ... 48
§ 14. Wellen in einer rotierenden Flüssigkeit ... 51

Kapitel II **Zähe Flüssigkeiten** ... 57

§ 15. Die Bewegungsgleichungen für eine zähe Flüssigkeit ... 57
§ 16. Energiedissipation in einer inkompressiblen Flüssigkeit ... 63
§ 17. Strömung durch ein Rohr ... 65
§ 18. Flüssigkeitsströmung zwischen rotierenden Zylindern ... 70
§ 19. Das Ähnlichkeitsgesetz ... 72
§ 20. Strömungen mit kleinen Reynolds-Zahlen ... 75
§ 21. Laminarer Nachlauf ... 86
§ 22. Die Zähigkeit von Suspensionen ... 93
§ 23. Exakte Lösungen der Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten ... 96
§ 24. Schwingungsbewegungen in einer zähen Flüssigkeit ... 105
§ 25. Die Dämpfung der Schwerewellen ... 117

Kapitel III. **Turbulenz** ... 121

§ 26. Die Stabilität der stationären Strömung einer Flüssigkeit ... 121
§ 27. Die Stabilität der Rotationsbewegung einer Flüssigkeit ... 126
§ 28. Die Stabilität der Strömung durch ein Rohr ... 130
§ 29. Die Instabilität tangentialer Unstetigkeiten ... 135
§ 30. Quasiperiodische Strömung und Synchronisation der Frequenzen ... 137
§ 31. Der seltsame Attraktor ... 143
§ 32. Der Übergang zur Turbulenz durch Periodenverdopplung ... 149
§ 33. Entwickelte Turbulenz ... 162
§ 34. Die Geschwindigkeitskorrelationen ... 170

§ 35. Turbulenzbereich und Ablösung 183
§ 36. Der turbulente Strahl 185
§ 37. Turbulenter Nachlauf 191
§ 38. Die Joukowskische Formel 193

Kapitel IV. **Grenzschichten** 197
§ 39. Die laminare Grenzschicht 197
§ 40. Die Strömung in der Nähe der Ablösungslinie 204
§ 41. Die Stabilität der Strömung in einer laminaren Grenzschicht 211
§ 42. Das logarithmische Geschwindigkeitsprofil 216
§ 43. Turbulente Strömung in Rohren 221
§ 44. Die turbulente Grenzschicht 223
§ 45. Die Widerstandskrisis 225
§ 46. Stromlinienkörper 229
§ 47. Der induzierte Widerstand 231
§ 48. Der Auftrieb eines dünnen Tragflügels 236

Kapitel V. **Wärmeleitung in Flüssigkeiten** 241
§ 49. Die allgemeine Gleichung für den Wärmetransport 241
§ 50. Wärmeleitung in einer inkompressiblen Flüssigkeit 246
§ 51. Wärmeleitung in einem unbegrenzten Medium 251
§ 52. Wärmeleitung in einem begrenzten Medium 255
§ 53. Das Ähnlichkeitsgesetz für den Wärmetransport 261
§ 54. Wärmetransport in der Grenzschicht 264
§ 55. Erwärmung eines Körpers in einer bewegten Flüssigkeit 271
§ 56. Freie Konvektion 274
§ 57. Die konvektive Instabilität einer ruhenden Flüssigkeit 279

Kapitel VI. **Diffusion** 287
§ 58. Die hydrodynamischen Gleichungen für ein Gemisch von Flüssigkeiten 287
§ 59. Diffusions- und Thermodiffusionskoeffizienten 291
§ 60. Diffusion der in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen 297

Kapitel VII. **Oberflächenerscheinungen** 301
§ 61. Die Laplacesche Formel 301
§ 62. Kapillarwellen 309
§ 63. Der Einfluß adsorbierter Filme auf die Bewegung einer Flüssigkeit 314

Kapitel VIII. **Der Schall** 317
§ 64. Schallwellen 317
§ 65. Energie und Impuls der Schallwellen 323
§ 66. Reflexion und Brechung der Schallwellen 328
§ 67. Geometrische Akustik 331
§ 68. Schallausbreitung in einem bewegten Medium 335
§ 69. Eigenschwingungen 340
§ 70. Kugelwellen 343
§ 71. Zylinderwellen 347
§ 72. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung 349
§ 73. Die Seitenwelle 352
§ 74. Schallausstrahlung 358
§ 75. Schallanregung durch Turbulenz 370

§ 76. Das Reziprozitätsgesetz ... 373
§ 77. Schallausbreitung in einem Rohr ... 377
§ 78. Schallstreuung ... 380
§ 79. Schallabsorption ... 385
§ 80. Die akustische Strömung ... 392
§ 81. Die zweite Zähigkeit ... 396

Kapitel IX. **Stoßwellen** ... 402
§ 82. Die Ausbreitung von Störungen in einem strömenden kompressiblen Gas . 402
§ 83. Stationäre Strömung eines kompressiblen Gases ... 406
§ 84. Unstetigkeitsflächen ... 411
§ 85. Die Stoßadiabate ... 416
§ 86. Stoßwellen mit geringer Intensität ... 419
§ 87. Die Änderungsrichtung der Größen in einer Stoßwelle ... 422
§ 88. Die Entwicklungsbedingung für Stoßwellen ... 426
§ 89. Stoßwellen in einem polytropen Gas ... 428
§ 90. Wellenförmige Instabilität von Stoßwellen ... 431
§ 91. Die Ausbreitung einer Stoßwelle in einem Rohr ... 439
§ 92. Schräge Stoßwellen ... 442
§ 93. Die Fronttiefe der Stoßwellen ... 448
§ 94. Stoßwellen in einem relaxierenden Medium ... 454
§ 95. Die isotherme Unstetigkeit ... 456
§ 96. Schwache Unstetigkeiten ... 458

Kapitel X. **Eindimensionale Gasströmung** ... 462
§ 97. Das Ausströmen eines Gases durch eine Düse ... 462
§ 98. Die Strömung eines zähen Gases durch ein Rohr ... 465
§ 99. Eindimensionale Ähnlichkeitsströmung ... 469
§ 100. Unstetigkeiten in den Anfangsbedingungen ... 478
§ 101. Eindimensionale fortschreitende Wellen ... 485
§ 102. Die Ausbildung von Unstetigkeiten in einer Schallwelle ... 494
§ 103. Charakteristiken ... 501
§ 104. Die Riemannschen Invarianten ... 505
§ 105. Beliebige eindimensionale Strömung eines kompressiblen Gases ... 509
§ 106. Das Problem der starken Explosion ... 517
§ 107. Einlaufende kugelsymmetrische Stoßwelle ... 522
§ 108. Theorie des „seichten Wassers“ ... 527

Kapitel XI. **Der Schnitt von Unstetigkeitsflächen** ... 530
§ 109. Verdünnungswellen ... 530
§ 110. Die Typen der Schnitte von Unstetigkeitsflächen ... 536
§ 111. Der Schnitt von Stoßwellen mit der Oberfläche eines festen Körpers ... 542
§ 112. Überschallströmung um einen Winkel ... 545
§ 113. Die Umströmung einer konischen Spitze ... 550

Kapitel XII. **Ebene Gasströmung** ... 554
§ 114. Potentialströmung eines kompressiblen Gases ... 554
§ 115. Stationäre einfache Wellen ... 558
§ 116. Die Tschaplyginsche Gleichung (das allgemeine Problem der ebenen stationären Strömung eines kompressiblen Gases) ... 563

§ 117. Die Charakteristiken einer ebenen stationären Strömung 567
§ 118. Die Euler-Tricomische Gleichung. Das Überschreiten der Schallgeschwindigkeit 570
§ 119. Lösungen der Euler-Tricomischen Gleichung in der Nähe nichtsingulärer Punkte der Schallfläche 576
§ 120. Umströmung mit Schallgeschwindigkeit 580
§ 121. Die Reflexion einer schwachen Unstetigkeit an der Übergangslinie 587

Kapitel XIII. **Die Strömung um endliche Körper** 593
§ 122. Die Entstehung von Stoßwellen in der Überschallströmung um Körper ... 593
§ 123. Überschallströmung um einen zugespitzten Körper 597
§ 124. Unterschallströmung um einen dünnen Tragflügel 601
§ 125. Überschallströmung um einen Tragflügel 604
§ 126. Das Ähnlichkeitsgesetz für schallnahe Strömungen 608
§ 127. Das Ähnlichkeitsgesetz für Hyperschallströmungen 611

Kapitel XIV. **Hydrodynamik der Verbrennung** 615
§ 128. Langsame Verbrennung 615
§ 129. Detonation 622
§ 130. Die Ausbreitung einer Detonationswelle 628
§ 131. Das Verhältnis zwischen den verschiedenen Verbrennungsarten 637
§ 132. Kondensationsunstetigkeiten 640

Kapitel XV. **Relativistische Hydrodynamik** 643
§ 133. Der Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit 643
§ 134. Die Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik 645
§ 135. Stoßwellen in der relativistischen Hydrodynamik 650
§ 136. Die relativistischen Bewegungsgleichungen für ein zähes wärmeleitendes Medium 653

Kapitel XVI. **Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit** 657
§ 137. Die Grundeigenschaften der superfluiden Flüssigkeit 657
§ 138. Der thermomechanische Effekt 659
§ 139. Die hydrodynamischen Gleichungen für die superfluide Flüssigkeit 660
§ 140. Dissipative Prozesse in der superfluiden Flüssigkeit 667
§ 141. Schallausbreitung in der superfluiden Flüssigkeit 670

Sachverzeichnis 679

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Dichte ϱ
Druck p
Temperatur T
Entropie pro Masseneinheit s
Innere Energie pro Masseneinheit ε
Enthalpie pro Masseneinheit $w = \varepsilon + \dfrac{p}{\varrho}$
Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$
Dynamische Zähigkeit η
Kinematische Zähigkeit $\nu = \dfrac{\eta}{\varrho}$
Wärmeleitfähigkeit $\varkappa$
Temperaturleitfähigkeit $\chi = \dfrac{\varkappa}{\varrho c_p}$
Reynolds-Zahl Re
Schallgeschwindigkeit c
Mach-Zahl Ma

Vektor- und (dreidimensionale) Tensorindizes werden durch lateinische Buchstaben $i, k, l, \ldots$ bezeichnet. Über zweifach auftretende („stumme") Indizes ist stets zu summieren. δ_{ik} ist der Einheitstensor.

Hinweise auf die Nummern von Paragraphen und Formeln in anderen Bänden dieses Lehrbuches sind mit römischen Ziffern versehen:

II — „Klassische Feldtheorie"
V — „Statistische Physik, Teil 1"
VIII — „Elektrodynamik der Kontinua"
IX — „Statistische Physik, Teil 2"
X — „Physikalische Kinetik"

I IDEALE FLÜSSIGKEITEN

§ 1. Die Kontinuitätsgleichung

Das Studium der Bewegung von Flüssigkeiten (und Gasen) bildet den Inhalt der *Hydrodynamik*. Da die in der Hydrodynamik behandelten Erscheinungen makroskopischen Charakter haben, werden die Flüssigkeiten[1]) in der Hydrodynamik als Kontinua angesehen. Jedes beliebig kleine Volumenelement einer Flüssigkeit wird nach dieser Auffassung als so groß angenommen, daß es noch genügend viele Moleküle enthält. Wenn wir von einem infinitesimalen Volumenelement sprechen, dann wollen wir darunter immer ein „physikalisch" unendlich kleines Volumen verstehen, d. h. ein Volumen, das gegenüber dem Volumen des betrachteten Körpers klein, aber im Vergleich zu den zwischenmolekularen Abständen groß ist. In diesem Sinne hat man in der Hydrodynamik die Ausdrücke „Flüssigkeitsteilchen" und „Flüssigkeitspunkt" zu verstehen. Wenn man z. B. von der Verschiebung eines Flüssigkeitsteilchens spricht, dann meint man damit nicht die Verschiebung eines einzelnen Moleküls, sondern die Verschiebung eines ganzen Volumenelementes, das viele Moleküle enthält, aber in der Hydrodynamik als Punkt angesehen wird.

Der Bewegungszustand einer Flüssigkeit wird mathematisch mit Hilfe von Funktionen beschrieben, die die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ und zwei beliebige thermodynamische Größen, z. B. den Druck $p(x, y, z, t)$ und die Dichte $\varrho(x, y, z, t)$, angeben. Bekanntlich werden alle thermodynamischen Größen über die Zustandsgleichung der Substanz durch zwei beliebige thermodynamische Größen bestimmt. Die Angabe von fünf Größen, drei Komponenten der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, der Druck p und die Dichte ϱ, beschreibt deshalb den Bewegungszustand einer Flüssigkeit vollständig.

Alle diese Größen sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t. Wir betonen, daß $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem gegebenen Raumpunkt x, y, z zur Zeit t ist, d. h., sie gehört zu bestimmten Raumpunkten und nicht zu bestimmten Flüssigkeitsteilchen, die sich mit der Zeit im Raume bewegen. Dasselbe gilt für die Größen ϱ und p.

Wir beginnen die Herleitung der Grundgleichungen der Hydrodynamik mit der Ableitung der Gleichung, die den Erhaltungssatz der Masse in der Hydrodynamik ausdrückt.

Dazu betrachten wir ein gewisses Volumen V_0. Die Flüssigkeitsmenge (Masse) in diesem Volumen ist $\int \varrho \, \mathrm{d}V$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist; die Integration erfolgt über das Volumen V_0. Pro Zeiteinheit fließt durch das Flächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ der Oberfläche des Volumens die Flüssigkeitsmenge $\varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$. Der Betrag des Vektors $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ ist gleich der Fläche des Flächenelementes, $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ zeigt in Richtung der Normalen. Wir vereinbaren, $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ in Richtung der äußeren Normalen zu orientieren. Dann ist $\varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$ positiv, wenn die Flüssigkeit aus dem

---

[1]) Wir sprechen hier und im folgenden der Kürze halber nur von Flüssigkeiten, meinen dabei aber immer sowohl Flüssigkeiten als auch Gase.

Volumen herausfließt, und negativ, wenn die Flüssigkeit hineinfließt. Die gesamte Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit aus dem Volumen V_0 herausfließt, ist danach

$$\oint \varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} .$$

Die Integration wird über die ganze geschlossene Oberfläche erstreckt, die das betrachtete Volumen einschließt.

Andererseits kann man die Abnahme der Flüssigkeitsmenge im Volumen V_0 in der Form

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \varrho \, \mathrm{d}V$$

schreiben. Wir setzen diese beiden Ausdrücke gleich und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varrho \, \mathrm{d}V = \oint \varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} . \tag{1,1}$$

Das Oberflächenintegral formen wir nach dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral um:

$$\oint \varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int \operatorname{div} (\varrho \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}V$$

und erhalten

$$\int \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V = 0 .$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Volumen gilt, muß der Integrand gleich Null sein, d. h.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \boldsymbol{v}) = 0 . \tag{1,2}$$

Das ist die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*.

Wenn wir den Ausdruck $\operatorname{div} (\varrho \boldsymbol{v})$ aufspalten, können wir (1,2) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \varrho = 0 . \tag{1,3}$$

Der Vektor

$$\boldsymbol{j} = \varrho \boldsymbol{v} \tag{1,4}$$

wird als *Stromdichtevektor* der Flüssigkeit bezeichnet. Seine Richtung stimmt mit der Bewegungsrichtung der Flüssigkeit überein, sein Betrag gibt die Flüssigkeitsmenge an, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit senkrechte Flächeneinheit fließt.

§ 2. Die Eulersche Gleichung

Wir grenzen in der Flüssigkeit irgendein Volumen ab. Die gesamte Kraft, die auf das herausgegriffene Flüssigkeitsvolumen wirkt, ist gleich dem Integral

$$-\oint p \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

über den Druck; dieses Integral ist über die Oberfläche des betrachteten Volumens zu erstrecken. Durch Umwandlung in ein Volumenintegral erhalten wir

$$-\oint p\,\mathrm{d}\boldsymbol{f} = -\int \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V.$$

Auf jedes Volumenelement $\mathrm{d}V$ der Flüssigkeit wirkt also von der Flüssigkeit in der Umgebung her die Kraft $-\mathrm{d}V \operatorname{grad} p$. Mit anderen Worten kann man sagen, daß pro Volumeneinheit der Flüssigkeit die Kraft $-\operatorname{grad} p$ wirkt.

Jetzt können wir die Bewegungsgleichung für ein Volumenelement der Flüssigkeit aufschreiben, indem wir die Kraft $-\operatorname{grad} p$ gleich dem Produkt aus der Menge ϱ pro Volumeneinheit der Flüssigkeit und der Beschleunigung $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ setzen:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p\,. \tag{2,1}$$

Die hier auftretende Ableitung $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ gibt nicht die Geschwindigkeitsänderung der Flüssigkeit in einem festen Raumpunkt, sondern die Änderung der Geschwindigkeit eines bestimmten, sich im Raume bewegenden Flüssigkeitsteilchens an. Man muß diese Ableitung durch Größen ausdrücken, die zu festen Raumpunkten gehören. Dazu bemerken wir, daß sich die Änderung $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeit eines gegebenen Flüssigkeitsteilchens im Verlauf der Zeit $\mathrm{d}t$ aus zwei Teilen zusammensetzt: aus der Geschwindigkeitsänderung in dem gegebenen Raumpunkt während der Zeit $\mathrm{d}t$ und aus der Differenz der Geschwindigkeiten (zu ein und demselben Zeitpunkt) in den beiden Punkten, deren gegenseitiger Abstand $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ist; $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ist der von dem betrachteten Flüssigkeitsteilchen in der Zeit $\mathrm{d}t$ zurückgelegte Weg. Der erste Anteil ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}t\,,$$

wobei die Ableitung $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ jetzt bei konstantem x, y und z zu bilden ist, d. h. in dem gegebenen Raumpunkt. Der zweite Anteil der Geschwindigkeitsänderung ist

$$\mathrm{d}x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \mathrm{d}y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + \mathrm{d}z \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}\,.$$

Es ist also

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}t + (\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}$$

oder, nach Division beider Seiten durch $\mathrm{d}t$,[1])

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v}\,. \tag{2,2}$$

Setzen wir die erhaltene Beziehung in (2,1) ein, so finden wir

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p\,. \tag{2,3}$$

[1]) Die auf diese Weise definierte Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ heißt *substantielle* Ableitung, wodurch ihr Zusammenhang mit der sich bewegenden Materie unterstrichen wird.

Das ist die gesuchte Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit, die von L. EULER 1755 erstmalig aufgestellt worden ist. Sie heißt *Eulersche Gleichung* und ist eine der Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Befindet sich die Flüssigkeit im Schwerefeld, dann wirkt auf jede Volumeneinheit noch die Kraft $\varrho \boldsymbol{g}$; dabei ist $\boldsymbol{g}$ die Schwerebeschleunigung. Diese Kraft muß auf der rechten Seite der Gleichung (2,1) addiert werden, so daß die Gleichung (2,3) die folgende Form annimmt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\varrho} + \boldsymbol{g}\,. \tag{2,4}$$

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen haben wir die Prozesse der Energiedissipation nicht berücksichtigt. Diese können in einer strömenden Flüssigkeit infolge der inneren Reibung (Zähigkeit) in der Flüssigkeit und durch den Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Flüssigkeitsteilchen auftreten. Daher gilt alles, was hier und in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels gesagt wird, nur für solche Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen, bei denen die Prozesse der Wärmeleitung und Zähigkeit unwesentlich sind. Solche Bewegungen nennt man Bewegungen von *idealen Flüssigkeiten.*

Das Fehlen des Wärmeaustausches zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilen (und natürlich auch zwischen der Flüssigkeit und den Körpern, mit denen diese in Berührung kommt) bedeutet, daß die Bewegung adiabatisch verläuft, und zwar in jedem Teil der Flüssigkeit adiabatisch. Man kann also die Bewegung einer idealen Flüssigkeit als adiabatische Bewegung ansehen.

Bei einer adiabatischen Bewegung bleibt die Entropie eines jeden Teiles der Flüssigkeit konstant, wenn sich dieser im Raume bewegt. Die Entropie pro Masseneinheit der Flüssigkeit bezeichnen wir mit s. Die Tatsache, daß die Bewegung *adiabatisch* verläuft, wird durch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2,5}$$

ausgedrückt. Die totale Ableitung nach der Zeit bedeutet, ähnlich wie in (2,1), die Entropieänderung eines gegebenen, sich bewegenden Teiles der Flüssigkeit. Diese Ableitung kann man in der Form

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\,s = 0 \tag{2,6}$$

schreiben. Das ist die allgemeine Gleichung dafür, daß die Bewegung einer idealen Flüssigkeit adiabatisch verläuft. Mit Hilfe von (1,2) kann man diese Beziehung als „Kontinuitätsgleichung" für die Entropie schreiben:

$$\frac{\partial(\varrho s)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho s \boldsymbol{v}) = 0\,. \tag{2,7}$$

Das Produkt $\varrho s \boldsymbol{v}$ ist der Vektor der *Entropiestromdichte.*

Man muß beachten, daß die Adiabatengleichung gewöhnlich eine viel einfachere Gestalt annimmt. Normalerweise ist zu einer gewissen Anfangszeit die Entropie in allen Punkten des Flüssigkeitsvolumens gleich. Dann bleibt sie auch während der weiteren Bewegung der Flüssigkeit überall gleich und zeitlich unverändert. In diesen Fällen kann man die Adiabatengleichung einfach in der Gestalt

$$s = \mathrm{const} \tag{2,8}$$