



Edition
Harri 
Deutsch

Klassische Mechanik I

Kinematik und Dynamik der Punktteilchen

Relativität

von

Walter Greiner

8., überarbeitete und erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55644

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Johann Wolfgang Goethe-Universität
D-60438 Frankfurt am Main

8., überarbeitete und erweiterte Auflage 2008

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5564-4

ISBN 978-3-8085-5815-7 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2008 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Druck: freiburger graphische betriebe

Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnet und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

Mit dem Band *Klassische Mechanik I: Kinematik und Dynamik der Punktteilchen – Relativität* (vormals *Mechanik I*) beginnt der Einstieg in die Welt der *Theoretischen Physik*.

Vorwort zur 8. Auflage

Eine zeitgemäße und moderne Universitäts-Ausbildung in Physik sollte möglichst von Anfang an die Theoretische Physik als einen der Grundpfeiler dieser Wissenschaft berücksichtigen. Diese Überlegung führte dazu, daß Studierenden der Physik und Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main die Kurse zur Theoretischen Physik ab dem ersten Semester angeboten werden. Die vorliegende *Klassische Mechanik I* ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die sich in vielen Jahren – seit 1965 – als Teil dieses Studienprogramms bewährt haben. Sie behandeln als Einstieg in die Theoretische Physik die Newtonsche Mechanik und deren Erweiterung zur Einsteinschen Speziellen Relativitätstheorie.

Ich habe versucht, die Darstellung des Stoffes so interessant und verständlich wie möglich zu gestalten. Der Text wird daher mit vielen Beispielen und Übungen ergänzt, die bis ins Detail ausgearbeitet sind. Damit soll das Buch für interessierte Leserinnen und Leser auch zum Selbststudium geeignet sein.

Der Einstieg in die Theoretische Physik im ersten Semester bedingt, daß dabei großes Gewicht auf die Behandlung elementarer mathematischer Verfahren aus der Vektoralgebra und -analysis sowie der Theorie der linearen Differentialgleichungen gelegt werden muß. So gesehen ist die *Klassische Mechanik I* auch ein Vorkurs zur Theoretischen Physik.

Die Newtonsche Mechanik wird ausgehend von den Newtonschen Axiomen behandelt. Fragen der Statik und Dynamik werden untersucht, und mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz eröffnet sich ein weites Feld astromonomischer Phänomene, die mit den erarbeiteten Methoden behandelt werden können. So lassen sich die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem oder von Raumsonden auf ihrem Weg durch das Sonnensystem genau berechnen. Viele ausgearbeitete Beispiele und Aufgaben behandeln diese Themen. Dabei läßt sich bereits mit recht elementaren Voraussetzungen ein Bogen zu spannenden Problemen der aktuellen Forschung schlagen, zum Beispiel zur Suche nach Planeten außerhalb unseres Sonnensystems.

Den kurzen Abriss über unser Sonnensystem, mit dem die Darstellung der Newtonschen Gravitationstheorie traditionell abgerundet wird, habe ich zu einem längeren Kapitel über die Stellung unserer Erde im Universum erweitert. Hier werden aktuelle Themen der Forschung vorgestellt, wie die Erforschung des Sonnensystems, die Suche nach extrasolaren Planeten, die Dynamik von Galaxien und das Problem der Dunklen Materie und schließlich das Urknall-Modell zur Entstehung und Entwicklung des Universums. Diese spannenden Themen sollen Neugierde wecken auf die vielen aufregenden Fragen der gegenwärtigen Forschung, zu denen –

aufbauend auf empirischem Wissen – mit den Methoden der Theoretischen Physik Antworten gefunden werden können. Die kürzlich erfolgte Bestimmung der Masse des Planeten Eris zeigt, daß hierbei auch elementare Verfahren, die in diesem Buch ausführlich behandelt werden, gewinnbringend zum Einsatz kommen.

Eine Vielzahl von Experimenten führte gegen Ende des 19. Jahrhunderts zu der verblüffenden Einsicht, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes vollkommen unabhängig davon ist, ob sich die Lichtquelle oder der Beobachter relativ zueinander bewegen. Dies ließ sich im Rahmen der Newtonschen Mechanik nicht verstehen und führte Albert Einstein zur Speziellen Relativitätstheorie, die die Newtonsche Theorie erweitert und als Spezialfall umfaßt. Ausgehend von einer Diskussion des Versuchs von Michelson und Morley entwickeln wir die Spezielle Relativitätstheorie und gelangen über den Formalismus von Minkowski zur relativistischen Mechanik. Wieder runden viele Beispiele, etwa zum Aussehen schnell bewegter Körper und Anwendungen aus der Hochenergie-Physik, die Darstellung ab.

Ich hoffe, ja ich bin überzeugt, damit Interesse für die vielfältigen und teilweise neuen Aspekte zu wecken, die selbst ein so klassisches Gebiet wie die Mechanik noch immer bereit hält. Die Studierenden sollen die Theoretische Physik als eine aufregende und spannende Wissenschaft erleben, bei der noch viel zu entdecken bleibt.

Vielleicht tragen dazu auch das neue äußere Gewand und die innere Ausgestaltung der Vorlesungen über Theoretische Physik mit bei. Das Buch wirkt dadurch insgesamt übersichtlicher und freundlicher und hilft somit, die jungen Studentinnen und Studenten weiter zu ermutigen und zu beflügeln

Besonderen Dank schulde ich Herrn Dr. Stefan Scherer für seine Hilfe bei der Vorbereitung der Drucklegung dieser neuen Auflage.

Frankfurt am Main, im September 2007

Walter Greiner

Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflagen haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

7. Auflage (2003)

Dipl.-Phys. Kristof Balasz, Dipl.-Phys. Stefan Scherer

6. Auflage (1992)

Dipl.-Phys. J. Augustin, Dipl.-Phys. Ch. Best, A. Bischoff, A. Dumitru¹⁾,
Dipl.-Phys. B. Ehrnsperger, Dipl.-Phys. O. Graf, Dipl.-Phys. K. Griepenkerl,
Dipl.-Phys. A. von Keitz, Dr. G. Peilert, Dipl.-Phys. M. Vidović

sowie

Frau A. Steidl

5. Auflage (1989)

Dipl.-Phys. Carsten Greiner²⁾, Dr. Martin Greiner³⁾, Dipl.-Phys. R. Heuer,
Dr. G. Plunien, Dr. M. Rufa

4. Auflage (1984)

Carsten Greiner²⁾, Dr. M. Seiwert

3. Auflage (1980)

Dipl.-Phys. M. Seiwert, Carsten Greiner²⁾, Martin Greiner³⁾

sowie

Frau B. Utschig

¹⁾ jetzt Junior-Professor an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

²⁾ jetzt Professor an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

³⁾ jetzt bei der Siemens AG München und Professor an der Universität Gießen

2. Auflage (1976)

Frau R. Lasarzig, Frau B. Utschig, G. Terlecki¹⁾

1. Auflage (1974)

Dr. B. Fricke²⁾

mit

H. Betz³⁾, W. Betz, G. Binnig⁴⁾, M. Bundschuh, C. von Charzewski, J. von Czarniecki, R. Fickler, H. R. Fiedler, E. Hoffmann, L. Kohaupt⁵⁾, N. Krug, P. Kurowski, B. Moreth, R. Mörschel, B. Müller⁶⁾, J. Rafelski⁷⁾, J. Reinhardt, H. Schaller, H. J. Scheefer, M. Soffel⁸⁾, K. E. Stiebing, E. Stämmeler, H. Störmer⁹⁾, J. Wagner, R. Zimmermann

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, G. Terlecki, Frau B. Utschig

¹⁾ jetzt Professor an der Fachhochschule Kaiserslautern

²⁾ jetzt Professor an der Universität Kassel

³⁾ Wir gedenken besonders Frau Helga Rafelski, geborene Betz, die in Tucson/Arizon im Alter von 50 Jahren allzu früh an Leukämie verstorben ist.

⁴⁾ Gerd Binnig erhielt 1986 für die Entwicklung des Raster-Tunnel-Mikroskopes zusammen mit H. Rohrer und E. Ruska den Nobelpreis für Physik. Er ist jetzt IBM-Fellow am IBM-Forschungslabor Rüschlikon/Schweiz und Professor an der Universität in München.

⁵⁾ jetzt Professor an der Technischen Fachhochschule Berlin

⁶⁾ jetzt Professor an der Duke University, Durham, North Carolina, USA, dort Dean of the Faculty

⁷⁾ jetzt Professor an der University of Arizona, Tucson, Arizona, USA

⁸⁾ jetzt Professor an der Technischen Universität Dresden

⁹⁾ jetzt Professor an der Columbia University, New York, USA. Er erhielt 1998 den Nobelpreis für Physik gemeinsam mit Daniel C. Tsui für die Entdeckung des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekts.

Inhaltsverzeichnis

I	Vektorrechnung	1
1	Einführung und Grunddefinitione	1
2	Das Skalarprodukt	3
3	Komponentendarstellung eines Vektors	6
4	Das Vektorprodukt (axialer Vektor)	9
5	Das Spatprodukt	20
6	Anwendung der Vektorrechnung	21
7	Differentiation und Integration von Vektoren	33
8	Das begleitende Dreibein – Frenetsche Formeln	41
9	Flächen im Raum	56
10	Koordinatensysteme	59
11	Vektorielle Differentialoperationen	73
12	Bestimmung von Linienintegralen	98
13	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	101
14	Berechnung von Oberflächenintegralen	113
15	Volumen-(Raum-)Integrale	117
II	Newtonsche Mechanik	121
16	Die Newtonschen Axiome	121
17	Grundbegriffe der Mechanik	126
18	Die allgemeine lineare Bewegung	145
19	Der freie Fall	148
20	Die Reibung	157
21	Der harmonische Oszillator	180
22	Mathematische Zwischenbetrachtung (Reihenentwicklung, Eulersche Formeln)	193
23	Der gedämpfte harmonische Oszillator	196
24	Das Pendel	210
25	Mathematische Vertiefung: Differentialgleichungen	224
26	Planetenbewegungen	229
27	Spezielle Probleme in Zentralfeldern	264
28	Die Erde und unser Sonnensystem	276
III	Relativitätstheorie	345
29	Relativitätsprinzip und Michelson-Versuch	345
30	Die Lorentz-Transformation	353
31	Eigenschaften der Lorentz-Transformation	372
32	Additionstheorem der Geschwindigkeiten	402

33	Die Grundgrößen der Mechanik im Minkowski-Raum	407
34	Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie	442
	Sachwortverzeichnis	467

Aufgaben und Beispiele

A	3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	8
A	4.1	Vektorprodukt	15
A	4.2	Beweis von Determinantenregeln	15
A	4.3	Determinanten	17
B	4.1	Laplacescher Entwicklungssatz	18
A	6.1	Abstandsvektor	21
A	6.2	Projektion eines Vektors auf einen anderen	22
A	6.3	Geraden- und Ebenengleichung	22
B	6.1	Der Kosinussatz	23
B	6.2	Der Satz von Thales	23
B	6.3	Die Drehmatrix	24
A	6.4	Überlagerung von Kräften	26
B	6.4	Gleichgewichtsbedingung für einen starren Körper ohne feste Drehachse	27
A	6.5	Kraft und Drehmoment	28
A	6.6	Stabkräfte im Dreieck	30
A	6.7	Gesamtkraft und Drehmoment	31
B	7.1	Differentiation eines Vektors	33
B	7.2	Differentiation eines Produktes aus Skalar und Vektor	35
A	7.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer Raumkurve	36
B	7.3	Kreisbewegung	36
B	7.4	Schraubenlinie	37
B	7.5	Integration eines Vektors	39
A	7.2	Integration eines Vektors	39
A	7.3	Bewegung auf einer Raumkurve	39
A	7.4	Flugzeug landet auf spezieller Raumkurve	41
A	8.1	Krümmung und Torsion	47
B	8.1	Frenetsche Formeln am Kreis	48
B	8.2	Begleitendes Dreibein und Schraubenlinie	49
B	8.3	Evolvente eines Kreises	53
A	8.2	Bogenlänge	53
B	8.4	Verallgemeinerung der Evolute	54
B	9.1	Normalenvektor einer Fläche im Raum	58
A	10.1	Zur Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zylinderkoordinaten	69
A	10.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten	71
A	10.3	Winkelgeschwindigkeit und Radialbeschleunigung	71

A 11.1	Gradient eines Skalarfeldes	80
A 11.2	Bestimmung des Skalarfeldes aus dem zugehörigen Gradientenfeld	81
A 11.3	Divergenz eines Vektorfeldes	81
A 11.4	Rotation eines Vektorfeldes	81
A 11.5	Elektrische Feldstärke, elektrisches Potential	82
A 11.6	Differentialoperationen in Kugelkoordinaten	83
A 11.7	Reziprokes Dreibein	88
A 11.8	Reziproke Koordinatensysteme	89
B 12.1	Linienintegral über ein Vektorfeld	100
A 13.1	Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals	107
A 13.2	Bestimmung der Potentialfunktion	109
A 13.3	Wirbelfluß eines Kraftfeldes durch eine Halbkugel	110
A 13.4	Zum konservativen Kraftfeld	112
B 14.1	Zur Berechnung eines Oberflächenintegrals	114
A 14.1	Fluß durch eine Oberfläche	115
B 15.1	Berechnung eines Volumenintegrals	118
A 15.1	Berechnung einer Gesamtkraft aus der Kraftdichte	119
A 16.1	Einfache Seilrolle	124
A 16.2	Doppelte Seilrolle	124
B 17.1	Potentielle Energie	129
A 17.1	Impulsstoß durch zeitabhängiges Kraftfeld	131
A 17.2	Kraftstoß	132
A 17.3	Das ballistische Pendel	133
B 17.2	Kräfte bei der Bewegung auf einer Ellipse	137
A 17.4	Berechnung von Drehimpuls und Drehmoment	139
A 17.5	Nachweis, daß ein gegebenes Kraftfeld konservativ ist	140
A 17.6	Kraftfeld, Potential, Gesamtenergie	140
A 17.7	Impuls und Kraft am Rammfahl	141
B 17.3	Elementare Betrachtungen über Scheinkräfte	142
A 19.1	Bewegung einer Masse im konstanten Kraftfeld	153
A 19.2	Bewegung auf einer Schraubenlinie im Schwerfeld	153
A 19.3	Raumschiff umkreist Erde	156
B 20.1	Freier Fall mit Reibung nach Stokes	158
B 20.2	Der schräge Wurf mit Reibung nach Stokes	160
A 20.1	Freier Fall mit Newtonscher Reibung	165
A 20.2	Bewegung einer Lokomotive mit Reibung	168
B 20.3	Die schiefe Ebene	169
A 20.3	Zwei Massen auf schiefen Ebenen	171
A 20.4	Eine Kette rutscht vom Tisch	172
A 20.5	Eine Scheibe auf Eis – der Reibungskoeffizient	174
A 20.6	Ein Autounfall	175
A 20.7	Ein Teilchen auf einer Kugel	176
A 20.8	Eine Leiter lehnt an einer Wand	178
A 20.9	Eine Masse rutscht unter Haft- und Gleitreibung	179

A 21.1	Amplitude, Frequenz und Periode einer harmonischen Schwingung .	187
A 21.2	Masse hängt an Feder	188
A 21.3	Schwingung einer Masse an einer ausgelenkten Feder	188
A 21.4	Schwingung eines schwimmenden Zylinders	189
A 21.5	Masse hängt an zwei Federn und schwingt	189
B 21.1	Zusammengesetzte Federn	191
A 21.6	Schwingung eines drehbar gelagerten Stabes	192
A 22.1	Zur Taylorreihe	195
A 23.1	Gedämpfte Schwingung eines Teilchens	205
A 23.2	Harmonischer Oszillator wird von außen erregt	207
A 23.3	Massenpunkt in der x - y -Ebene	208
A 24.1	Die Zykloide	214
A 24.2	Das Zykloidenpendel	215
A 24.3	Eine Perle gleitet auf einer Zykloide	217
A 24.4	Das Problem der Tautochrone	218
A 24.5	Bewegung einer Peitschenschnur	221
B 26.1	Das Cavendish-Experiment	235
A 26.1	Kraftgesetz einer Kreisbahn	248
A 26.2	Kraftgesetz einer Spiralbahn	249
A 26.3	Die Lemniskatenbahn	249
A 26.4	Fluchtgeschwindigkeit auf der Erde	251
A 26.5	Das Raketenproblem	251
A 26.6	Bewegungsgleichungen einer Zweistufenrakete	254
A 26.7	Kondensation eines Wassertropfens	254
A 26.8	Bewegung eines Lastwagens mit variabler Ladung	255
B 26.2	Die reduzierte Masse	256
A 26.9	Bahn eines Kometen	258
A 26.10	Bewegung im Zentralfeld	259
A 26.11	Meerwasser als Raketenantrieb	262
B 26.3	Geschichtliche Bemerkung zur Vertiefung	262
A 27.1	Gravitationskraft eines homogenen Stabes	267
A 27.2	Gravitationskraft einer homogenen Scheibe	268
A 27.3	Gravitationspotential einer Hohlkugel	269
A 27.4	Tunnel durch die Erde	270
A 27.5	Stabilität einer Kreisbahn	275
A 27.6	Stabilität einer Kreisbahn	275
A 28.1	Massenakkretion der Sonne	327
B 28.1	Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld der Sonne	328
B 28.2	Ausfluß zu den äußeren Planeten	331
A 28.2	Periheldrehung	341
A 30.1	Lorentz-Invarianz der Wellengleichung	365
A 30.2	Rapidität	371
B 31.1	Zerfall der Myonen	374
A 31.1	Zur Zeitdilatation	375

A 31.2	Relativität der Gleichzeitigkeit	376
A 31.3	Klassische Längenkontraktion	378
A 31.4	Zur Längenkontraktion	379
A 31.5	Lorentz-Transformation für beliebig orientierte Relativgeschwindigkeit	401
B 33.1	Konstruktion der Viererkraft durch Lorentz-Transformation	412
B 33.2	Der Einsteinsche Kasten	417
B 33.3	Zum Massenzuwachs mit der Geschwindigkeit	418
A 33.1	Relativistischer Massenzuwachs	420
A 33.2	Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld	422
A 33.3	Massenverlust der Sonne durch Strahlung	430
A 33.4	Geschwindigkeitsabhängigkeit der Protonenmasse	430
A 33.5	Effektivität eines funktionierenden Fusionsreaktors	431
A 33.6	Zerfall des π^+ -Mesons	432
A 33.7	Lebensdauer der K^+ -Mesonen	433
A 33.8	Zur Kernspaltung	436
A 33.9	Masse-Energie-Äquivalenz am Beispiel des π^0 -Mesons	436
A 33.10	Zur Paarvernichtung	437
A 33.11	Kinetische Energie des Photons	438
A 33.12	Das sogenannte „Zwillingsparadoxon“	439
A 33.13	Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens	441
A 34.1	Die relativistische Rakete	452
A 34.2	Die Photonenrakete	454
A 34.3	Das relativistische Zentralkraftproblem	455
B 34.1	Beispiel zur Vertiefung: Gravitationslinsen	463

Historische Notizen

1	Leopold Kronecker	5
2	Pierre Frédéric Sarrus	12
3	Thales von Milet	23
4	Jean Frédéric Frenet	44
5	Jean Gaston Darboux	46
6	Gabriel Cramer	67
7	Pierre Simon Laplace	79
8	Carl Friedrich Gauß	101
9	Sir George Gabriel Stokes	106
10	August Ferdinand Möbius	116
11	Isaak Newton	122
12	Robert Hooke	148
13	Leonhard Euler	195
14	Christiaan Huygens	221
15	Johannes Kepler	229
16	Tycho Brahe	230
17	Henry Cavendish	236
18	Giovanni Domenico Cassini	250
19	Immanuel Kant	291
20	Claudius Ptolemäus	293
21	Nikolaus Kopernikus	294
22	Sir Friedrich Wilhelm Herschel	302
23	Edwin Hubble	302
24	Val Logsdon Fitch	311
25	James Watson Cronin	311
26	Andrej Sacharov	311
27	Robert Woodrow Wilson	311
28	Arno Allan Penzias	312
29	George Gamow	312
30	Robert Dicke	313
31	Philip James Edwin Peebles	313
32	Vera Cooper Rubin	317
33	Fritz Zwicky	321
34	Bohdan Paczynski	323
35	Galileo Galilei	345
36	Albert Abraham Michelson	348

37	Albert Einstein	352
38	Hendrik Antoon Lorentz	354
39	Hermann Minkowski	358
40	Anton Lampa	380
41	Robert Vivian Pound	439
42	Wolfgang Pauli	452
43	Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld	462

I Vektorrechnung

1 Einführung und Grunddefinitione

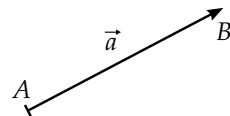
Physikalische Größen, die durch Angabe eines Zahlenwertes vollständig bestimmt sind, nennt man

Skalare (z. B. Masse, Temperatur, Energie, Wellenlänge).

Größen, zu deren vollständiger Beschreibung neben dem Zahlenwert, dem Betrag, noch die Angabe ihrer Richtung erforderlich ist, nennt man

Vektoren (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Drehmoment).

Ein Vektor läßt sich geometrisch durch eine gerichtete Strecke darstellen, d. h. durch eine Strecke, der man eine Richtung zuordnet, so daß z. B. gilt: A sei der Anfangspunkt und B sei der Endpunkt des Vektors \vec{a} (vgl. Figur).



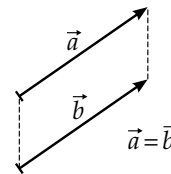
Vektor \vec{a} zeigt von A nach B .

Der *Betrag* des Vektors ist dann durch die Länge der Strecke AB gegeben. Symbolisch beschreibt man einen Vektor häufig durch einen lateinischen Buchstaben, den man zur Verdeutlichung des Vektorcharakters mit einem kleinen Pfeil versieht. Weitere mögliche Darstellungen sind die Benutzung deutscher Buchstaben oder Herausheben durch Fettdruck.

Den Betrag eines Vektors \vec{a} schreibt man als: $|\vec{a}| = a$.

Definition Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen genau dann *gleich*, wenn

1. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,
2. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ (gleichgerichtet parallel)

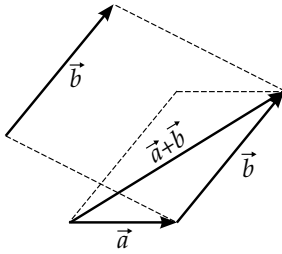
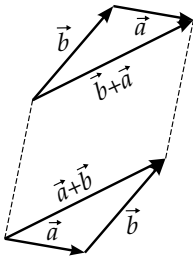


Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind gleich.

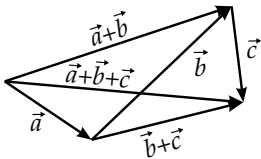
sind. Dann schreiben wir $\vec{a} = \vec{b}$.

Das heißt: Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind gleichberechtigte Darstellungen desselben Vektors. Man sieht also bei einem Vektor von seiner speziellen Lage im Raum ab.

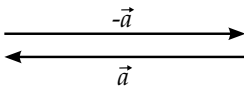
Ein zum Vektor \vec{a} *entgegengesetzt gleicher* Vektor ist $-\vec{a}$. Entgegengesetzt gleiche Vektoren sind längengleich ($|\vec{a}| = |-\vec{a}|$) und liegen auf parallelen Geraden, haben aber entgegengesetzte Richtungen; sie sind somit antiparallel ($\vec{a} \uparrow \downarrow -\vec{a}$). Ist also etwa $\vec{a} = \vec{AB}$, so ist $-\vec{a} = \vec{BA}$.

Addition der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Verdeutlichung der Kommutativität der Vektoraddition.



Verdeutlichung der Assoziativität der Vektoraddition.



Der Nullvektor.

Addition: Sollen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} addiert werden, so bringt man durch Parallelverschiebung den Anfangspunkt des einen Vektors mit dem Endpunkt des anderen zur Deckung. Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$, auch *Resultierende* genannt, entspricht dann der Strecke vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Endpunkt des zweiten. Man kann diese Summe auch als Diagonale des von \vec{a} und \vec{b} gebildeten Parallelogramms finde (vgl. Figur).

Rechenregeln: Es gelten

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

und

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{Assoziativgesetz}),$$

wie man sofort einsieht (vgl. Figuren).

Subtraktion: Die Differenz zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist definiert als:

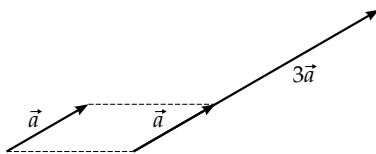
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Nullvektor: Die Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{a}$ bezeichnet man als Nullvektor:

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Der Nullvektor hat den Betrag 0; er ist richtungslos.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: Unter dem Produkt $p\vec{a}$ eines Vektors \vec{a} mit einem Skalar p , wobei p eine reelle Zahl ist, versteht man einen Vektor, der die gleiche Richtung besitzt wie \vec{a} und dessen Betrag $|p\vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}|$ ist.

Die Multiplikation eines Vektors \vec{a} mit einem Skalar p (in diesem Falle ist $p = 3$).

Rechenregeln:

$$q(p\vec{a}) = p(q\vec{a}) = qp\vec{a}, \quad (\text{wobei } p \text{ und } q \text{ reell})$$

$$(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a},$$

$$p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}.$$

Diese Regeln sind sofort einzusehen und bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

2 Das Skalarprodukt

Die physikalischen Größen Kraft und Weg sind gerichtete Größen und werden durch die Vektoren \vec{F} und \vec{s} dargestellt. Die *mechanische Arbeit* W , die eine Kraft \vec{F} längs eines geradlinigen Weges \vec{s} verrichtet, ist:

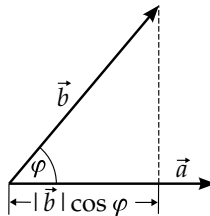
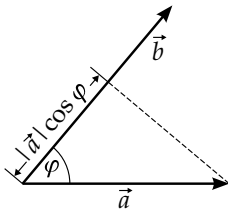
$$W = F s \cos \varphi = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \varphi,$$

wobei φ der von \vec{F} und \vec{s} eingeschlossene Winkel ist. W selbst ist also, obwohl aus zwei Vektoren hervorgegangen, eine *skalare* Größe. Im Hinblick auf derartige physikalische Anwendungen definiere wir deshalb:

Unter dem *Skalarprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren versteht man

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

wobei φ der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine *reelle Zahl*. In Worten ausgedrückt ist das Skalarprodukt so definiert $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$ mal Betrag der Projektion von \vec{b} auf \vec{a} oder umgekehrt.



Veranschaulichung des Skalarproduktes.

Die anschauliche Bedeutung des Skalarproduktes:

- Betrag der Projektion von \vec{b} auf \vec{a} multipliziert mit $|\vec{a}|$ oder
- Betrag der Projektion von \vec{a} auf \vec{b} multipliziert mit $|\vec{b}|$.

Eigenschaften des Skalarproduktes:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ besitzt für φ gleich Null seinen größten Wert ($\cos 0 = 1$, \vec{a} parallel zu \vec{b})

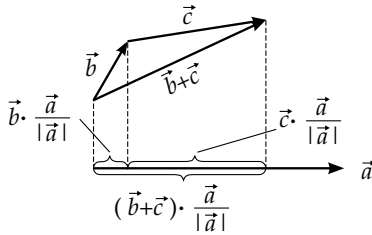
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Für $\varphi = \pi$ nimmt das Skalarprodukt seinen kleinsten Wert an ($\cos \pi = -1$, \vec{a} antiparallel zu \vec{b}), nämlich

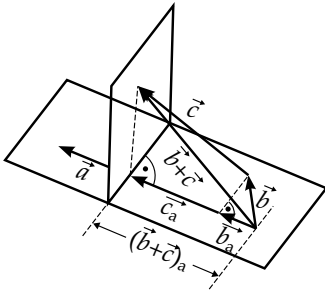
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Für $\varphi = \pi/2$ wird $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, auch wenn \vec{a} und \vec{b} ungleich Null sind ($\cos \pi/2 = 0$, \vec{a} senkrecht auf \vec{b}); also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \text{wenn} \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$



Veranschaulichung des
Distributivgesetzes.



Veranschaulichung des
Distributivgesetzes im Raum.

Rechenregeln: Es gelten

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, & (\text{Kommutativität}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, & (\text{Distributivität}) \\ p(\vec{b} \cdot \vec{c}) &= (p\vec{b}) \cdot \vec{c}. & (\text{Assoziativität})\end{aligned}$$

Die erste und letzte Regel sind sofort einzusehen, die zweite Regel ist in der untenstehenden Figur verdeutlicht.

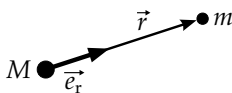
Wenn $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ nicht in einer Ebene liegen, kann man sich die Distributivatsregel leicht mit einem im Raume liegenden Dreieck veranschaulichen. Der Vektor \vec{a} kann durch einen Bleistift oder einen Zeigestock leicht veranschaulicht werden (vgl. Figuren!).

Einheitsvektoren: Unter Einheitsvektoren versteht man Vektoren des Betrages 1. Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

ein Einheitsvektor in Richtung von \vec{a} . In der Tat ist der Betrag von \vec{e} gleich 1; denn $|\vec{e}| = |\vec{a}/|\vec{a}|| = |\vec{a}|/|\vec{a}| = 1$. Eine in der Physik häufig verwendete Möglichkeit ist es, einer skalar formulierten Gleichung durch den Einheitsvektor eine Richtung zuzuordnen. Die Gravitationskraft besitzt z. B. den Betrag

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$



Der Einheitsvektor, der von der großen zur kleinen Masse zeigt, ist $\vec{e} = \vec{r}/|\vec{r}|$.

Sie wirkt entlang der Verbindungslinie der beiden Massen M und m , also

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

\vec{F} ist also die Kraft, die von der Masse M auf die Masse m ausgebt wird. Ihre Richtung ist durch $-\vec{e}_r = -\vec{r}/|\vec{r}|$ gegeben. Sie wirkt also zur Masse M hin.

Kartesische Einheitsvektoren: Die Einheitsvektoren, die in Richtung der positiven x -, y -, bzw. z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen, definier