# Klassische Mechanik II

## Teilchensysteme

## Lagrange-Hamiltonsche Dynamik

## Nichtlineare Phänomene

von

Walter Greiner

**8., überarbeitete und erweiterte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 55668**

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Johann Wolfgang Goethe-Universität
D-60438 Frankfurt am Main

8., überarbeitete und erweiterte Auflage 2008

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5566-8

ISBN 978-3-8085-5816-4 (E-Book)


http://www.europa-lehrmittel.de
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Druck: freiburger graphische betriebe

# Theoretische Physik

## von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnen und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

# Vorwort zur 8. Auflage

Die vorliegende *Klassische Mechanik II* ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die sich in vielen Jahren – seit 1965 – als Teil des Studienprogramms der Theoretischen Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main bewährt haben. Die Vorlesungen werden dort Studierenden der Physik und Mathematik im zweiten Semester angeboten. Sie behandeln im Anschluß an die Einführung in die Newtonsche Mechanik (im ersten Semester) die fortgeschrittenen Themen der Klassischen Mechanik – Systeme von Teilchen, Dynamik des starren Körpers, Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik sowie eine Einführung in die Theorie der Nichtlinearen Dynamik.

Wir haben versucht, die Darstellung des Stoffes so interessant und verständlich wie möglich zu gestalten. Der Text wird daher mit vielen Beispielen und Übungen ergänzt, die bis ins Detail ausgearbeitet sind. Damit soll das Buch für interessierte Leserinnen und Leser auch zum Selbststudium geeignet sein.

Die Behandlung der Newtonschen Mechanik im ersten Semster bedingt, daß dabei großes Gewicht auf die Behandlung elementarer mathematischer Verfahren aus der Vektoralgebra und -analysis sowie der Theorie der linearen Differentialgleichungen gelegt werden muss. So gesehen ist die *Klassische Mechanik I* (die Newtonschen Mechanik) ein Vorkurs zur Theoretischen Physik.

Dies ändert sich deutlich mit den Themen, die im zweiten Semester – und somit in diesem Buch, der *Klassischen Mechanik II* – diskutiert werden. Der Bereich der Theoretische Mechanik wird ausgedehnt von der elementaren Mechanik der Punktteilchen auf die Behandlung von Systemen von Punktteilchen, auf schwingende Saiten und Membranen, starre Körper, die Theorie des Kreisels und schließlich auf die formal-analytischen Aspekte der Mechanik in den Formulierungen von Lagrange, Hamilton und Jacobi. Vom mathematischen Standpunkt liegt das Neue im Auftreten von partiellen Differentialgleichungen, der Fourierentwicklung und von Eigenwertproblemen. Dieses neue Handwerkszeug wird ausführlich erläutert und an zahlreichen physikalischen Beispielen erprobt. Ferner werden einige aktuelle Entwicklungen zum Hamilton-Formalismus im erweiterten Phasenraum und zu verallgemeinerten kanonischen Transformationen erstmalig in einem Lehrbuch dargestellt.

Während damit der übliche Themenkreis der *Klassischen Mechanik* abgedeckt ist, trägt das umfassende folgende Kapitel den neueren Entwicklungen der Nichtlinearen Dynamik Rechung. Behandelt werden Dynamische Systeme, die Stabiltiät zeitabhängiger Bahnen, Bifurkationen, Lyapunov-Exponenten und Chaos sowie Systeme mit chaotischer Dynamik.

Den Abschluß der Vorlesungen bildet ein knapper Abriß über die Geschichte und Entwicklung der Mechanik.

Dies ist deutlich mehr Stoff, als in einer einsemestrigen Kursvorlesung behandelt werden kann. Wir hoffen jedoch, damit Interesse für die vielfältigen Aspekte der Mechanik zu wecken und Studierende zu ermutigen, sich selbständig mit diesen aktuellen und spannenden Themen zu beschäftigen – die *Klassische Mechanik* ist alles andere als eine verstaubte Wissenschaft. Im Gegenteil: Wie die Beispiele der nichtlinearen Dynamik und der verallgemeinerten kanonischen Transformationen zeigen, gibt es auch in diesem klassischen Teilbereich der Physik noch immer neue Entwicklungen.

Dank zum Zustandekommen dieser achten Auflage schulde ich Herrn Dr. Stefan Scherer, der die technische Überwachung der Drucklegung übernommen hat, und vor allem Herrn Dr. Jürgen Struckmeier, der mir bei der Neugestaltung der Abschnitte über kanonische Transformationen sehr geholfen hat.

Frankfurt am Main, im August 2008 Walter Greiner

# Die Mitarbeiter

**An den bisherigen Auflagen haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:**

## 7. Auflage (2003)

Dipl.-Phys. S. Scherer,
S. Schwabe

## 6. Auflage (1998)

Dr. J. Reinhardt (ihm gilt Dank für die Unterstützung bei den Abschnitten zur nichtlinearen Dynamik),
Dipl.-Phys. S. Soff
Dr. E. Stein

sowie

Frau A. Steidl

## 5. Auflage (1989)

Dr. Martin Greiner,
Dipl.-Phys. R. Heuer,
Dr. G. Plunien,
Dr. M. Rufa

## 4. Auflage (1985)

Carsten Greiner,
Martin Greiner,
Dr. M. Seiwert

## 3. Auflage (1982)

Dipl.-Phys. M. Seiwert,
Frau B. Utschig

## 2. Auflage (1977)

Dr. H. Stock

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, Frau B. Utschig

## 1. Auflage (1974)

Dr. H. Diehl
Dr. B. Fricke [1)]

mit

H. Angermüller, P. Bergmann, H. Betz, W. Betz, J. Briechle [2)], C. v. Charzewski, J. v. Czarnecki, H. R. Fiedler, W. Grosch, L. Kohaupt [3)], P. Kurowski, H. Leber, H. J. Lustig, A. Mahn, B. Müller [4)], H. Müller, H. Peitz, J. Rafelski [5)], J. Reinhardt, D. Schebesta, H. J. Scheefer, H. Sewerin, M. Soffel [6)], K. Stiebing, J. Wagner

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, G. Terlecki, Frau B. Utschig

---

[1)] jetzt Professor an der Universität Kassel.

[2)] Wir gedenken besonders Herrn Jörg Briechle, der am 24.3.1970 bei einem Lawinenunglück gestorben ist.

[3)] jetzt Professor an der Technischen Fachhochschule Berlin.

[4)] jetzt Professor an der Duke University, Durham, North Carolina, USA.

[5)] jetzt Professor an der University of Arizona, Tucson, USA.

[6)] jetzt Professor an der Technischen Universität Dresden.

# Inhaltsverzeichnis

# Aufgaben und Beispiele

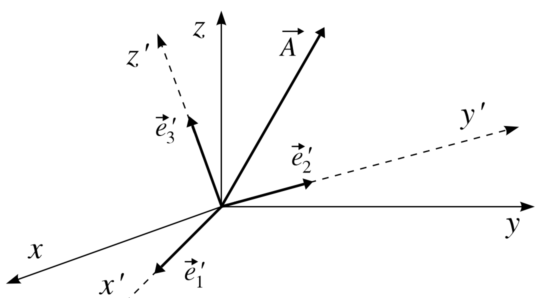
# Historische Notizen

# I Newtonsche Mechanik in bewegten Koordinatensystemen

## 1 Die Newtonschen Gleichungen in einem rotierenden Koordinatensystem

In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen (d. h. Inertialsystemen) gelten in der klassischen Mechanik die Newtonschen Gesetze, wenn sie in einem gelten. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn ein System Beschleunigungen unterworfen wird. Die neuen Beziehungen erhält man, indem man die Bewegungsgleichungen in einem festen System aufstellt und in das beschleunigte System transformiert.

Zunächst betrachten wir die *Rotation* eines $(x', y', z')$-Koordinatensystems um den Ursprung des Inertialsystems $(x, y, z)$, wobei die beiden Koordinatenursprünge zusammenfallen. Hierbei wird das Inertialsystem mit $L$ („Laborsystem“) und das rotierende System mit $B$ („bewegtes System“) bezeichnet.




Relative Lage der beiden Koordinatensysteme $x, y, z$ und $x', y', z'$.

Der Vektor $\vec{A}(t) = A_1'\vec{e}_1^{\,\prime} + A_2'\vec{e}_2^{\,\prime} + A_3'\vec{e}_3^{\,\prime}$ soll sich im gestrichenen System zeitlich ändern; für einen in diesem System ruhenden Beobachter läßt sich das folgendermaßen darstellen:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}A_1'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1^{\,\prime} + \frac{\mathrm{d}A_2'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2^{\,\prime} + \frac{\mathrm{d}A_3'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3^{\,\prime}.$$

Dabei bedeutet der Index B, daß die Ableitung vom bewegten System aus berechnet wird. Im Inertialsystem $(x,y,z)$ ist $\vec{A}$ ebenfalls zeitabhängig; aufgrund der Rotation des gestrichenen Systems ändern sich hier auch noch die Einheitsvektoren $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}$

mit der Zeit, d. h., bei der Ableitung des Vektors $\vec{A}$ vom Inertialsystem aus müssen auch noch die Einheitsvektoren differenziert werden:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{L}} &= \frac{\mathrm{d}A'_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}A'_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}A'_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_3 + A'_1\dot{\vec{e}}'_1 + A'_2\dot{\vec{e}}'_2 + A'_3\dot{\vec{e}}'_3 \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{B}} + A'_1\dot{\vec{e}}'_1 + A'_2\dot{\vec{e}}'_2 + A'_3\dot{\vec{e}}'_3.\end{aligned}$$

Nun gilt allgemein $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{e}'_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma) = \vec{e}'_\gamma \cdot \dot{\vec{e}}'_\gamma + \dot{\vec{e}}'_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) = 0.$

Also ist $\vec{e}'_\gamma \cdot \dot{\vec{e}}'_\gamma = 0$. Die Ableitung eines Einheitsvektors $\dot{\vec{e}}'_\gamma$ steht immer senkrecht auf dem Vektor selbst. Deshalb läßt sich die Ableitung eines Einheitsvektors als Linearkombination der beiden anderen schreiben:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}'_1 &= a_1\vec{e}'_2 + a_2\vec{e}'_3, \\ \dot{\vec{e}}'_2 &= a_3\vec{e}'_1 + a_4\vec{e}'_3, \\ \dot{\vec{e}}'_3 &= a_5\vec{e}'_1 + a_6\vec{e}'_2.\end{aligned}$$

Von diesen sechs Koeffiziente sind nur drei unabhängig. Um dies zu zeigen, differenzieren wir zunächst $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = 0$ und erhalten

$$\dot{\vec{e}}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = -\dot{\vec{e}}'_2 \cdot \vec{e}'_1.$$

Multipliziert man $\dot{\vec{e}}'_1 = a_1\vec{e}'_2 + a_2\vec{e}'_3$ mit $\vec{e}'_2$ und entsprechend $\dot{\vec{e}}'_2 = a_3\vec{e}'_1 + a_4\vec{e}'_3$ mit $\vec{e}'_1$, so erhält man:

$$\vec{e}'_2 \cdot \dot{\vec{e}}'_1 = a_1 \qquad \text{und} \qquad \vec{e}'_1 \cdot \dot{\vec{e}}'_2 = a_3,$$

damit folgt $a_3 = -a_1$.

Analog ergibt sich auch $a_6 = -a_4$ und $a_5 = -a_2$.

Die Ableitung des Vektors $\vec{A}$ im Intertialsystem läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{L}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{B}} + A'_1(a_1\vec{e}'_2 + a_2\vec{e}'_3) + A'_2(-a_1\vec{e}'_1 + a_4\vec{e}'_3) + A'_3(-a_2\vec{e}'_1 - a_4\vec{e}'_2) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{B}} + \vec{e}'_1(-a_1A'_2 - a_2A'_3) + \vec{e}'_2(a_1A'_1 - a_4A'_3) + \vec{e}'_3(a_2A'_1 + a_4A'_2).\end{aligned}$$

Aus der Rechenregel für das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}\vec{C} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}'_1(C_2A'_3 - C_3A'_2) - \vec{e}'_2(C_1A'_3 - C_3A'_1) + \vec{e}'_3(C_1A'_2 - C_2A'_1)\end{aligned}$$