




Edition
Harri 
Deutsch 

Klassische Mechanik II

Teilchensysteme

Lagrange-Hamiltonsche Dynamik

Nichtlineare Phänomene

von

Walter Greiner

8., überarbeitete und erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55668

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Johann Wolfgang Goethe-Universität
D-60438 Frankfurt am Main

8., überarbeitete und erweiterte Auflage 2008

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5566-8

ISBN 978-3-8085-5816-4 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2008 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Druck: freiburger graphische betriebe

Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnet und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

Vorwort zur 8. Auflage

Die vorliegende *Klassische Mechanik II* ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die sich in vielen Jahren – seit 1965 – als Teil des Studienprogramms der Theoretischen Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main bewährt haben. Die Vorlesungen werden dort Studierenden der Physik und Mathematik im zweiten Semester angeboten. Sie behandeln im Anschluß an die Einführung in die Newtonsche Mechanik (im ersten Semester) die fortgeschrittenen Themen der Klassischen Mechanik – Systeme von Teilchen, Dynamik des starren Körpers, Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik sowie eine Einführung in die Theorie der Nichtlinearen Dynamik.

Wir haben versucht, die Darstellung des Stoffes so interessant und verständlich wie möglich zu gestalten. Der Text wird daher mit vielen Beispielen und Übungen ergänzt, die bis ins Detail ausgearbeitet sind. Damit soll das Buch für interessierte Leserinnen und Leser auch zum Selbststudium geeignet sein.

Die Behandlung der Newtonschen Mechanik im ersten Semester bedingt, daß dabei großes Gewicht auf die Behandlung elementarer mathematischer Verfahren aus der Vektoralgebra und -analysis sowie der Theorie der linearen Differentialgleichungen gelegt werden muss. So gesehen ist die *Klassische Mechanik I* (die Newtonschen Mechanik) ein Vorkurs zur Theoretischen Physik.

Dies ändert sich deutlich mit den Themen, die im zweiten Semester – und somit in diesem Buch, der *Klassischen Mechanik II* – diskutiert werden. Der Bereich der Theoretische Mechanik wird ausgedehnt von der elementaren Mechanik der Punktteilchen auf die Behandlung von Systemen von Punktteilchen, auf schwingende Saiten und Membranen, starre Körper, die Theorie des Kreisels und schließlich auf die formal-analytischen Aspekte der Mechanik in den Formulierungen von Lagrange, Hamilton und Jacobi. Vom mathematischen Standpunkt liegt das Neue im Auftreten von partiellen Differentialgleichungen, der Fourierreentwicklung und von Eigenwertproblemen. Dieses neue Handwerkszeug wird ausführlich erläutert und an zahlreichen physikalischen Beispielen erprobt. Ferner werden einige aktuelle Entwicklungen zum Hamilton-Formalismus im erweiterten Phasenraum und zu verallgemeinerten kanonischen Transformationen erstmalig in einem Lehrbuch dargestellt.

Während damit der übliche Themenkreis der *Klassischen Mechanik* abgedeckt ist, trägt das umfassende folgende Kapitel den neueren Entwicklungen der Nichtlinearen Dynamik Rechnung. Behandelt werden Dynamische Systeme, die Stabilität zeitabhängiger Bahnen, Bifurkationen, Lyapunov-Exponenten und Chaos sowie Systeme mit chaotischer Dynamik.

Den Abschluß der Vorlesungen bildet ein knapper Abriß über die Geschichte und Entwicklung der Mechanik.

Dies ist deutlich mehr Stoff, als in einer einsemestrigen Kursvorlesung behandelt werden kann. Wir hoffen jedoch, damit Interesse für die vielfältigen Aspekte der Mechanik zu wecken und Studierende zu ermutigen, sich selbständig mit diesen aktuellen und spannenden Themen zu beschäftigen – die *Klassische Mechanik* ist alles andere als eine verstaubte Wissenschaft. Im Gegenteil: Wie die Beispiele der nichtlinearen Dynamik und der verallgemeinerten kanonischen Transformationen zeigen, gibt es auch in diesem klassischen Teilbereich der Physik noch immer neue Entwicklungen.

Dank zum Zustandekommen dieser achten Auflage schulde ich Herrn Dr. Stefan Scherer, der die technische Überwachung der Drucklegung übernommen hat, und vor allem Herrn Dr. Jürgen Struckmeier, der mir bei der Neugestaltung der Abschnitte über kanonische Transformationen sehr geholfen hat.

Frankfurt am Main, im August 2008

Walter Greiner

Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflagen haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

7. Auflage (2003)

Dipl.-Phys. S. Scherer,
S. Schwabe

6. Auflage (1998)

Dr. J. Reinhardt (ihm gilt Dank für die Unterstützung bei den Abschnitten zur nichtlinearen Dynamik),
Dipl.-Phys. S. Soff
Dr. E. Stein
sowie
Frau A. Steidl

5. Auflage (1989)

Dr. Martin Greiner,
Dipl.-Phys. R. Heuer,
Dr. G. Plunien,
Dr. M. Rufa

4. Auflage (1985)

Carsten Greiner,
Martin Greiner,
Dr. M. Seiwert

3. Auflage (1982)

Dipl.-Phys. M. Seiwert,
Frau B. Utschig

2. Auflage (1977)

Dr. H. Stock

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, Frau B. Utschig

1. Auflage (1974)

Dr. H. Diehl

Dr. B. Fricke¹⁾

mit

H. Angermüller, P. Bergmann, H. Betz, W. Betz, J. Briechle²⁾, C. v. Charzewski, J. v. Czarnecki, H. R. Fiedler, W. Grosch, L. Kohaupt³⁾, P. Kurowski, H. Leber, H. J. Lustig, A. Mahn, B. Müller⁴⁾, H. Müller, H. Peitz, J. Rafelski⁵⁾, J. Reinhardt, D. Schebesta, H. J. Scheefer, H. Sewerin, M. Soffel⁶⁾, K. Stiebing, J. Wagner

sowie

Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig, G. Terlecki, Frau B. Utschig

¹⁾ jetzt Professor an der Universität Kassel.

²⁾ Wir gedenken besonders Herrn Jörg Briechle, der am 24.3.1970 bei einem Lawineneunglück gestorben ist.

³⁾ jetzt Professor an der Technischen Fachhochschule Berlin.

⁴⁾ jetzt Professor an der Duke University, Durham, North Carolina, USA.

⁵⁾ jetzt Professor an der University of Arizona, Tucson, USA.

⁶⁾ jetzt Professor an der Technischen Universität Dresden.

Inhaltsverzeichnis

I	Newtonsche Mechanik in bewegten Koordinatensystemen	1
1	Die Newtonschen Gleichungen in einem rotierenden Koordinatensystem	1
2	Der freie Fall auf der rotierenden Erde	6
3	Das Foucaultsche Pendel	18
II	Mechanik der Teilchensysteme	33
4	Freiheitsgrade	33
5	Der Schwerpunkt	35
6	Mechanische Grundgrößen von Massenpunktsystemen	55
III	Schwingende Systeme	69
7	Schwingungen gekoppelter Massenpunkte	69
8	Die schwingende Saite	88
9	Fourierreihen	107
10	Die schwingende Membran	117
IV	Mechanik der starren Körper	145
11	Rotation um eine feste Achse	145
12	Rotation um einen Punkt	165
13	Kreiseltheorie	187
V	Lagrange-Gleichungen	239
14	Generalisierte Koordinaten	239
15	D'Alembertsches Prinzip und Herleitung der Lagrange-Gleichungen	246
16	Die Lagrange-Gleichung für nichtholonome Zwangsbedingungen	278
17	Spezielle Probleme (Zur Vertiefung)	287
VI	Die Hamiltonsche Theorie	303
18	Die Hamiltonschen Gleichungen	303
19	Kanonische Transformationen	340
20	Hamilton-Jacobi-Theorie	356
21	Verallgemeinerte kanonische Transformationen	386
22	Die verallgemeinerte Fassung der Hamilton-Jacobi-Gleichung	416
VII	Nichtlineare Dynamik	421
23	Dynamische Systeme	422
24	Stabilität zeitabhängiger Bahnen	444
25	Bifurkationen	453
26	Lyapunov-Exponenten und Chaos	460
27	Systeme mit chaotischer Dynamik	475
VIII	Aus der Geschichte der Mechanik	511
	Sachwortverzeichnis	537

Aufgaben und Beispiele

B	1.1	Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$	4
B	1.2	Ortsvektor \vec{r}	4
B	2.1	Ostablenkung eines fallenden Körpers	13
A	2.1	Ostablenkung eines geworfenen Körpers	14
A	2.2	Flußüberhöhung	15
A	2.3	Differenz der Meerestiefe zwischen Pol und Äquator	16
A	3.1	Kette hängt an einem rotierenden Stab	23
A	3.2	Pendel im fahrenden Zug	24
A	3.3	Entstehung von Zyklonen	27
A	3.4	Verschiebbare Masse im rotierenden Rohr	29
A	5.1	Schwerpunkt eines Systems dreier Massenpunkte	36
A	5.2	Schwerpunkt einer Pyramide	37
A	5.3	Schwerpunkt eines Halbkreises	38
A	5.4	Schwerpunkt eines Kreiskegels	38
A	5.5	Momentanzentrum und Polbahn	40
B	5.1	Streuung im Zentralfeld	41
A	5.6	Der Rutherford'sche Streuquerschnitt	46
A	5.7	Streuung eines Teilchens am sphärischen Potentialtopf	50
A	5.8	Streuung zweier Atome	54
B	6.1	Abplattung einer Galaxie	56
B	6.2	Drehimpulserhaltung bei Pirouette	57
A	6.1	Die reduzierte Masse	62
A	6.2	Bewegung zweier Körper unter Einfluß wechselseitiger Gravitation	63
A	6.3	Atwoodsche Fallmaschine	64
A	6.4	Unser Sonnensystem in der Milchstraße	65
A	7.1	Zwei gleiche Massen, gekoppelt durch zwei gleiche Federn	72
B	7.1	Gekoppelte Pendel	74
A	7.2	Eigenfrequenzen der schwingenden Kette	82
A	7.3	Schwingung zweier gekoppelter Massenpunkte, zweidimensional	84
A	7.4	Drei Massen auf einer Saite	85
A	7.5	Eigenschwingungen eines dreiatomigen Moleküls	87
A	8.1	Kinetische und potentielle Energie der schwingenden Saite	95
A	8.2	Drei ungleiche Massen äquidistant auf Saite	97
A	8.3	Kompliziert gekoppeltes Schwingungssystem	99

B 8.1	Mathematische Ergänzung zur Vertiefung: Die Cardanische Formel	100
B 9.1	Anfangsbedingungen für schwingende Saite	110
A 9.1	Fourierreihe der Sägezahnfunktion	111
A 9.2	Schwingende Saite bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung	112
A 9.3	Fourierreihe bei Stufenfunktion	114
A 9.4	Eindeutigkeit des Tautochronenproblems	115
B 10.1	Die longitudinale Kette – Die Poincarésche Wiederkehrzeit	135
A 10.1	Orthogonalität der Eigenmoden	140
B 11.1	Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszyinders	147
B 11.2	Trägheitsmoment einer dünnen rechteckigen Scheibe	149
A 11.1	Trägheitsmoment einer Kugel	151
A 11.2	Trägheitsmoment eines Würfels	151
A 11.3	Schwingungen eines aufgehängten Würfels	152
B 11.3	Abrollen eines Zylinders; Rollenpendel	153
B 11.4	Trägheitsmomente einiger starrer Körper um ausgewählte Achsen	157
A 11.4	Würfel kippt über Tischkante	158
A 11.5	Hockey puck trifft Stab	159
A 11.6	Queue stößt Billardkugel	161
A 11.7	Zwangskräfte eines rotierenden Stabes	163
A 11.8	Stab schwingt auf Federn	164
B 12.1	Trägheitstensor eines massebelegten Quadrats	172
B 12.2	Transformation des Trägheitstensors eines massebelegten Quadrats	179
A 12.1	Rollender Kreiskegel	180
A 12.2	Trägheitsellipsoid einer quadratischen Scheibe	182
A 12.3	Symmetrieachse als Hauptachse	183
A 12.4	Trägheitstensor und Trägheitsellipsoid eines Systems dreier Massen	184
A 12.5	Reibungskräfte und Beschleunigung eines Autos	186
B 13.1	Nutation der Erde	195
B 13.2	Trägheitsellipsoid eines regelmäßigen Polyeders	196
A 13.1	Rotierendes Ellipsoid	197
A 13.2	Drehmoment einer rotierenden Platte	198
A 13.3	Drehung eines oszillierenden Neutronensterns	199
A 13.4	Lagerkräfte einer rotierenden Kreisscheibe	200
A 13.5	Drehmoment auf eine elliptische Scheibe	201
A 13.6	Gyrokompas	209
A 13.7	Gezeitenkräfte: Mond- und Sonnenfinsternis – Der Saroszyklus ¹⁾	210
B 13.3	Der schlafende Kreisel	228
B 13.4	Der schwere symmetrische Kreisel	230
A 13.8	Stabile und instabile Rotationen des asymmetrischen Kreisels	236
B 14.1	Kleine Kugel rollt auf großer Kugel	241
B 14.2	Ein Körper rutscht auf schiefer Ebene	241

B 14.3	Rad rollt auf Ebene	241
B 14.4	Generalisierte Koordinaten	243
B 14.5	Zylinder rollt auf schiefer Ebene	243
A 14.1	Klassifizierung der Zwangsbedingungen	244
B 15.1	Zwei Massen an konzentrischen Rollen	249
B 15.2	Zwei durch Seil verbundene Massen auf schiefer Ebene	250
B 15.3	Gleichgewichtsbedingung einer Klappbrücke	251
B 15.4	Zwei durch Stange verbundene Klötze	256
B 15.5	Ignorable Koordinate	257
B 15.6	Kugel am rotierenden Rohr	259
A 15.1	Aufrechtes Pendel	260
A 15.2	Lage des stabilen Gleichgewichts beim aufrechten Pendel	261
A 15.3	Schwingungsfrequenzen eines dreiatomigen, symmetrischen Moleküls	263
A 15.4	Normalfrequenzen eines Dreieckmoleküls	266
A 15.5	Normalfrequenzen eines nichtsymmetrischen, linearen Moleküls	268
A 15.6	Doppelpendel	269
A 15.7	Massenpunkt auf Zykloidenbahn	271
A 15.8	Das Fadenpendel	273
A 15.9	Gekoppelte Massenpunkte auf einem Kreis	274
A 15.10	Lagrangefunktion des asymmetrischen Kreisels	276
B 16.1	Zylinder rollt auf schiefer Ebene herunter	281
A 16.1	Teilchen bewegt sich im Paraboloid	283
A 16.2	Drei Massen – durch Stangen gekoppelt – gleiten im Kreisreifen	285
B 17.1	Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	289
B 17.2	Bewegung eines Projektils an der Luft	293
A 17.1	Gekoppelte gedämpfte Federn – das Dämpfen unerwünschter Schwingungen	293
A 17.2	Kreisscheibe rollt auf Ebene	298
A 17.3	Der Fliehkraftregler	300
B 18.1	Zentralbewegung	308
B 18.2	Das Pendel in der Newtonschen, Lagrangeschen und Hamiltonschen Theorie	309
A 18.1	Hamilton-Funktion und kanonische Bewegungsgleichungen	310
A 18.2	Beispiel einer Variationsaufgabe	313
A 18.3	Kettenlinie	317
A 18.4	Brachystochrone – Konstruktion einer Notrutsche	319
A 18.5	Herleitung der Hamiltonschen Gleichungen	324
B 18.3	Phasendiagramm eines ebenen Pendels	326
B 18.4	Phasenraumdichte für Teilchen im Gravitationsfeld	329
A 18.6	Kühlung eines Teilchenstrahls	335
B 19.1	Beispiel einer kanonischen Transformation	344
B 19.2	Punkttransformationen	345
B 19.3	Der harmonische Oszillator	345

B 19.4	Der gedämpfte harmonische Oszillator	347
B 19.5	Infinitesimale Zeitschritt	349
B 19.6	Die allgemeinste Form des Liouvilleschen Satzes	350
B 19.7	Die kanonische Invarianz der Poisson-Klammern	352
B 19.8	Der Poissonsche Satz	353
B 19.9	Invarianten des ebenen Kepler-Systems	354
B 20.1	Beispiel zur Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung	359
B 20.2	Winkelvariable	363
A 20.1	Lösung des Keplerproblems mit der Hamilton-Jacobi-Methode	363
A 20.2	Aufstellung der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Bewegung eines Teilchens im azimuthalsymmetrischen Potential	365
A 20.3	Lösung der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung aus Aufgabe 20.2	366
A 20.4	Aufstellung der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für schrägen Wurf	369
B 20.3	Veranschaulichung der Wirkungswellen	371
B 20.4	Periodische und mehrfach periodische Bewegungen	374
A 20.5	Das Bohr-Sommerfeldsche Wasserstoffatom	381
A 20.6	Über die Poisson-Klammern	383
A 20.7	Totale zeitliche Ableitung einer beliebigen von q , p und t abhängenden Funktion	385
B 21.1	Identische kanonische Transformation	393
B 21.2	Identische Zeittransformation: konventionelle kanonische Transformationen	394
B 21.3	Reine Zeit-Energie-Transformation	394
B 21.4	Der Liouvillesche Satz im erweiterten Phasenraum	395
B 21.5	Regularisierung der Kepler-Bewegung	395
B 21.6	Der zeitabhängige gedämpfte harmonische Oszillator	398
B 21.7	Die Galilei-Transformation	401
B 21.8	Die Lorentz-Transformation	402
B 21.9	Die Lorentz-invariante Form der Hamilton-Funktion eines freien Teilchens	404
B 21.10	Die relativistische Hamilton-Funktion eines Teilchens im Potential $V(q, t)$	406
B 21.11	Der relativistische harmonische Oszillator	407
B 21.12	Erweiterte Poisson-Klammern	408
B 21.13	Kanonische Quantisierung im erweiterten Hamilton-Formalismus	409
B 21.14	Infinitesimal kanonische Transformationen, verallgemeinertes Noether-Theorem	410
B 21.15	Infinitesimal Punkttransformationen, konventionelles Noether-Theorem	413
B 21.16	Der Runge-Lenz-Vektor des Kepler-Systems als verallgemeinerte Noether-Invariante	414

B 22.1	Der zeitabhängige harmonische Oszillator	417
B 23.1	Lineare Stabilität in zwei Dimensionen	431
A 23.1	Nichtlinearer Oszillator mit Reibung	433
A 23.2	Van-der-Pol-Oszillator mit schwacher Nichtlinearität	440
A 23.3	Relaxationsschwingungen	442
B 24.1	Die Stabilitätstheorie von Floquet	448
A 24.1	Stabilität eines Grenzyklus	451
A 26.1	Die Bäckertransformation	474
B 27.1	Die logistische Abbildung	478
A 27.1	Logistische Abbildung und Bernoulli-Shift	486
B 27.2	Der periodisch angestoßene Rotator	489
B 27.3	Das periodisch angetriebene Pendel	496
B 27.4	Chaos in der Himmelsmechanik: Das Taumeln von Hyperion	503

Historische Notizen

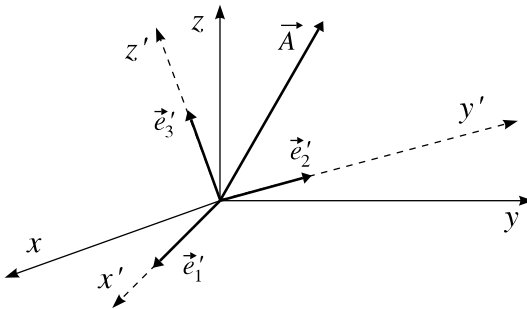
1	Jean Bernard Léon Foucault	18
2	Michael Chasles	34
3	Hieronimo Cardano	103
4	Scipion Ferro	104
5	François Vieta	105
6	Jean Baptiste Joseph Fourier	107
7	Friedrich Wilhelm Bessel	129
8	Enrico Fermi	142
9	John Pasta	142
10	Stanislaw Marcin Ulam	142
11	Jacob Steiner	148
12	Louis Poincot	188
13	Seth Carlo Chandler	196
14	Arnold Sommerfeld	204
15	Felix Klein	204
16	Leonhard Euler	218
17	Jean le Rond D'Alembert	246
18	Joseph Louis Lagrange	255
19	Sir William Rowan Hamilton	303
20	Adrien Marie Legendre	304
21	Joseph Liouville	327
22	Simon van der Meer	330
23	Carlo Rubbia	334
24	Siméon Denis Poisson	352
25	Carl David Tolmé Runge	355
26	Wilhelm Lenz	355
27	Carl Gustav Jacob Jacobi	357
28	Emmy Amalie Noether	411
29	Jules-Henri Poincaré	421
30	Eberhard Friedrich Ferdinand Hopf	458
31	Alexander Mikhailovich Lyapunov	460
32	Benoit B. Mandelbrot	466
33	Georg Cantor	468
34	Niels Fabian Helge von Koch	469
35	Waclaw Sierpinski	470
36	Giuseppe Peano	472
37	Felix Hausdorff	473
38	Mitchell Feigenbaum	481

I Newtonsche Mechanik in bewegten Koordinatensystemen

1 Die Newtonschen Gleichungen in einem rotierenden Koordinatensystem

In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen (d. h. Inertialsystemen) gelten in der klassischen Mechanik die Newtonschen Gesetze, wenn sie in einem gelten. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn ein System Beschleunigungen unterworfen wird. Die neuen Beziehungen erhält man, indem man die Bewegungsgleichungen in einem festen System aufstellt und in das beschleunigte System transformiert.

Zunächst betrachten wir die *Rotation* eines (x', y', z') -Koordinatensystems um den Ursprung des Inertialsystems (x, y, z) , wobei die beiden Koordinatenursprünge zusammenfallen. Hierbei wird das Inertialsystem mit L („Laborsystem“) und das rotierende System mit B („bewegtes System“) bezeichnet.



Relative Lage der beiden
Koordinatensysteme x, y, z und
 x', y', z' .

Der Vektor $\vec{A}(t) = A'_1 \vec{e}'_1 + A'_2 \vec{e}'_2 + A'_3 \vec{e}'_3$ soll sich im gestrichelten System zeitlich ändern; für einen in diesem System ruhenden Beobachter läßt sich das folgendermaßen darstellen:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_B = \frac{dA'_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{dA'_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{dA'_3}{dt} \vec{e}'_3.$$

Dabei bedeutet der Index B, daß die Ableitung vom bewegten System aus berechnet wird. Im Inertialsystem (x, y, z) ist \vec{A} ebenfalls zeitabhängig; aufgrund der Rotation des gestrichelten Systems ändern sich hier auch noch die Einheitsvektoren $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$

mit der Zeit, d. h., bei der Ableitung des Vektors \vec{A} vom Inertialsystem aus müssen auch noch die Einheitsvektoren differenziert werden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L &= \frac{dA'_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{dA'_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{dA'_3}{dt} \vec{e}'_3 + A'_1 \mathcal{E}_1 + A'_2 \mathcal{E}_2 + A'_3 \mathcal{E}_3 \\ &= \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_B + A'_1 \mathcal{E}_1 + A'_2 \mathcal{E}_2 + A'_3 \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

Nun gilt allgemein $\frac{d}{dt}(\vec{e}'_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma) = \vec{e}'_\gamma \cdot \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_\gamma \cdot \vec{e}'_\gamma = \frac{d}{dt}(1) = 0$.

Also ist $\vec{e}'_\gamma \cdot \mathcal{E}_\gamma = 0$. Die Ableitung eines Einheitsvektors \mathcal{E}_γ steht immer senkrecht auf dem Vektor selbst. Deshalb läßt sich die Ableitung eines Einheitsvektors als Linearkombination der beiden anderen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= a_1 \vec{e}'_2 + a_2 \vec{e}'_3, \\ \mathcal{E}_2 &= a_3 \vec{e}'_1 + a_4 \vec{e}'_3, \\ \mathcal{E}_3 &= a_5 \vec{e}'_1 + a_6 \vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Von diesen sechs Koeffizienten sind nur drei unabhängig. Um dies zu zeigen, differenzieren wir zunächst $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = 0$ und erhalten

$$\mathcal{E}_1 \cdot \vec{e}'_2 = -\mathcal{E}_2 \cdot \vec{e}'_1.$$

Multipliziert man $\mathcal{E}_1 = a_1 \vec{e}'_2 + a_2 \vec{e}'_3$ mit \vec{e}'_2 und entsprechend $\mathcal{E}_2 = a_3 \vec{e}'_1 + a_4 \vec{e}'_3$ mit \vec{e}'_1 , so erhält man:

$$\vec{e}'_2 \cdot \mathcal{E}_1 = a_1 \quad \text{und} \quad \vec{e}'_1 \cdot \mathcal{E}_2 = a_3,$$

damit folgt $a_3 = -a_1$.

Analog ergibt sich auch $a_6 = -a_4$ und $a_5 = -a_2$.

Die Ableitung des Vektors \vec{A} im Inertialsystem läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_L &= \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_B + A'_1(a_1 \vec{e}'_2 + a_2 \vec{e}'_3) + A'_2(-a_1 \vec{e}'_1 + a_4 \vec{e}'_3) + A'_3(-a_2 \vec{e}'_1 - a_4 \vec{e}'_2) \\ &= \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_B + \vec{e}'_1(-a_1 A'_2 - a_2 A'_3) + \vec{e}'_2(a_1 A'_1 - a_4 A'_3) + \vec{e}'_3(a_2 A'_1 + a_4 A'_2). \end{aligned}$$

Aus der Rechenregel für das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \vec{C} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}'_1(C_2 A'_3 - C_3 A'_2) - \vec{e}'_2(C_1 A'_3 - C_3 A'_1) + \vec{e}'_3(C_1 A'_2 - C_2 A'_1) \end{aligned}$$