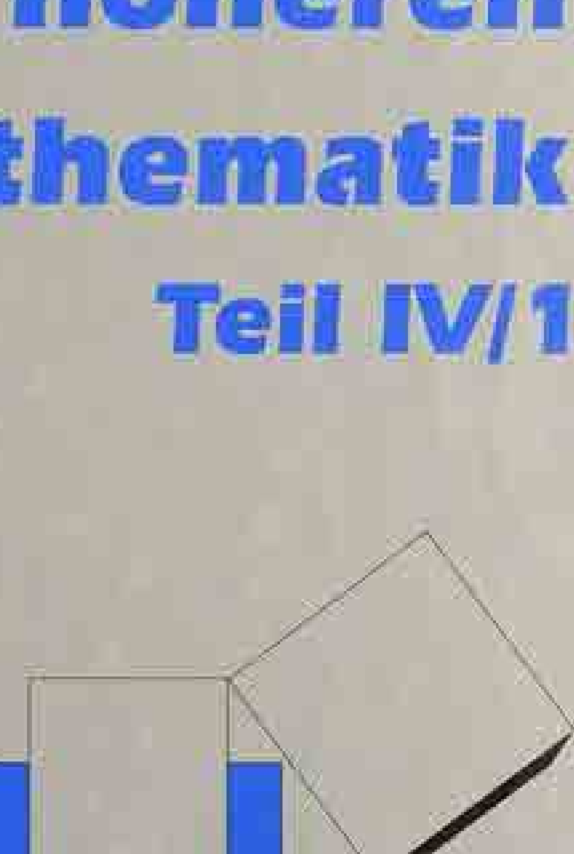
W.I. Smirnow

Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil IV/1



Verlag Harri Deutsch

W. I. SMIRNOW
LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL IV/1

W. I. Smirnow. Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 2004, 449 Seiten, 190 Abb., geb.,
ISBN 3-8171-1297-1
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen, Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
17. Auflage 1990, 618 Seiten, 156 Abb., geb., ISBN 3-8171-1298-X
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale, Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
12. Auflage 1991, 283 Seiten, 1 Abb., geb., ISBN 3-8171-1299-8
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 1995, 599 Seiten, 35 Abb., geb.,
ISBN 3-8171-1300-5
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 2004, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN 3-8171-1301-3
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume, Verallgemeinerte Ableitungen, Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 1995, 409 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN 3-8171-1302-1
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
11. Auflage 1991, 548 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 3-8171-1303-X
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen, Absolute Stetigkeit – Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow. Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN 3-8171-1419-2

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

VON

W. I. SMIRNOW
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

TEIL IV/1

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe:

В. И. Смирнов, Курс высшей математики
Том четвертый, Часть первая
Издание шестое
Наука, Москва 1974

Die Ausgabe in deutscher Sprache (nach der 3. russischen Auflage) besorgten:
Christa Berg und Lothar Berg (Übersetzung),
Herbert Beckert, Günther Schmidt, Hans Schubert (Wissenschaftliche Redaktion)
Die Übersetzung der Änderungen und Ergänzungen nach der 6. russischen Auflage besorgte:
Werner Plischke (Wissenschaftliche Redaktion: Lothar Berg)

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-8171-1301-3

Unveränderter Nachdruck der 8. Auflage 1988, 2004

Druck: Präzis-Druck GmbH, Karlsruhe <www.praezis-druck.de>
Printed in Germany

Inhalt

I. Integralgleichungen

II. Variationsrechnung

I. Integralgleichungen

1. Beispiele für die Aufstellung von Integralgleichungen. Unter einer *Integralgleichung* versteht man eine Gleichung, bei der die gesuchte Funktion auch unter dem Integralzeichen auftritt. Es sei beispielsweise die Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gesucht. Wie wir bereits früher [II, 51] gesehen haben, kann diese Aufgabe auf die Auflösung der Integralgleichung

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt + y_0$$

zurückgeführt werden. Entsprechend läßt sich das Anfangswertproblem $y'' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ auf die Integralgleichung

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f[z, y(z)]\,dz + y_0 + y_0'(x - x_0)$$

zurückführen. Formt man das iterierte Integral nach [II, 17] in ein einfaches Integral um, so erhält die Integralgleichung die Gestalt

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - z)\, f[z, y(z)]\,dz + y_0 + y_0'(x - x_0).$$

Die allgemeine Lösung von $y'' = f(x, y)$ ergibt sich aus der Integralgleichung

$$y(x) = \int_{0}^{x} (x - z)\, f[z, y(z)]\,dz + c_1 + c_2 x, \tag{1}$$

in der c_1 und c_2 willkürliche Konstante sind und die untere Integrationsgrenze gleich 0 gesetzt worden ist. Wir betrachten nun für unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Randwertproblem, und zwar suchen wir diejenige Lösung, welche die Randbedingungen $y(0) = a$, $y(l) = b$ erfüllt. Für $x = 0$ und $x = l$ erhalten wir aus (1) zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten zwei lineare Gleichungen, aus denen sich

$$c_1 = a \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{b - a}{l} - \frac{1}{l} \int_{0}^{l} (l - z)\, f[z, y(z)]\,dz$$

ergibt. Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir für unser Randwertproblem die Integralgleichung

$$y(x) = F(x) + \int_{0}^{x} (x - z)\, f[z, y(z)]\,dz - \frac{x}{l} \int_{0}^{l} (l - z)\, f[z, y(z)]\,dz, \tag{2}$$

wobei

$$F(x) = a + \frac{b - a}{l}\, x.$$

ist. Statt dessen können wir auch

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l-x)}{l} f[z, y(z)]\, dz - \int_x^l \frac{x(l-z)}{l} f[z, y(z)]\, dz \tag{3}$$

schreiben.

Führen wir jetzt die Funktion zweier Veränderlicher

$$K(x, z) = \begin{cases} \dfrac{z(l-x)}{l} & \text{für} \quad z \leq x\,, \\ \dfrac{x(l-z)}{l} & \text{für} \quad x \leq z \end{cases} \tag{4}$$

ein, so können wir der Gleichung (3) schließlich folgende Gestalt geben:

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z)\, f[z, y(z)]\, dz\,. \tag{5}$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf die lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\, y = \omega(x) \tag{6}$$

an, dann gelangen wir zu dem Satz, daß die Bestimmung einer Lösung des Randwertproblems

$$y'' + p(x)\, y = \omega(x), \quad y(0) = a, \quad y(l) = b \tag{7}$$

gleichwertig ist mit der Auflösung der linearen Integralgleichung

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^l K(x, z)\, p(z)\, y(z)\, dz\,; \tag{8}$$

darin ist $y(x)$ die gesuchte Funktion und

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z)\, \omega(z)\, dz$$

eine bekannte Funktion der unabhängigen Veränderlichen x.

Wir weisen darauf hin, daß in der Gleichung (1) die obere Integrationsgrenze veränderlich ist, dagegen in (8) beide Integrationsgrenzen konstant sind. Ferner sei bemerkt, daß in (1) wie auch in (8) die gesuchte Funktion nicht nur unter dem Integralzeichen, sondern auch außerhalb desselben vorkommt. Diese Tatsache ist, wie wir bereits gesehen haben [**II, 50**], wesentlich, wenn man die Integralgleichung durch sukzessive Approximation auflösen will.

Wir multiplizieren nun den Koeffizienten $p(x)$ in der Differentialgleichung (6) mit einem Parameter λ und betrachten die homogene Differentialgleichung

$$y'' + \lambda p(x)\, y = 0 \tag{9}$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0\,. \tag{10}$$

Dieses homogene Randwertproblem führt auf die folgende homogene Integralgleichung, die den Parameter λ enthält:

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z)\, p(z)\, y(z)\, dz\,. \tag{11}$$

Eines der wichtigsten Probleme, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen, besteht darin, festzustellen, für welche Werte von λ nicht identisch verschwindende

Lösungsfunktionen existieren. Auf dieses Problem waren wir schon bei der Anwendung der Fouriermethode auf Randwertprobleme der mathematischen Physik gestoßen. Es sei noch auf einige charakteristische Eigenschaften der Funktion $K(x, z)$, die der *Kern* unserer Integralgleichung genannt wird, hingewiesen. Dieser Kern ist in dem durch $0 \leq x \leq l$, $0 \leq z \leq l$ definierten Quadrat k_0 stetig. Auf der Diagonalen $x = z$ dieses Quadrates ist die erste Ableitung des Kerns unstetig:

$$K_x(x, z)\,|_{x=z+0} - K_x(x, z)\,|_{x=z-0} = -1\,.$$

Außerhalb der Diagonalen ist der Kern als Funktion von x eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' = 0$ und genügt den homogenen Randbedingungen (10). Schließlich ist der Kern symmetrisch:

$$K(z, x) = K(x, z)\,. \tag{12}$$

Alle diese Eigenschaften des Kerns ergeben sich unmittelbar aus (4).

Der Kern $K(x, z)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung. Wirkt senkrecht auf eine an den Enden eingespannte Saite im Punkt $x = c$ eine Kraft, so muß bekanntlich [II, 176] im Angriffspunkt der Kraft die Bedingung

$$T_0[(u_x)_{x=c+0} - (u_x)_{x=c-0}] = -P$$

erfüllt sein, in der P der Betrag der Kraft und T_0 die Saitenspannung ist. Man kann leicht nachprüfen, daß die Funktion

$$u(x) = \frac{P}{T_0}\,K(x, c)$$

die Form der statischen Ausbiegung der Saite unter dem Einfluß der Kraft darstellt. Wir erwähnen hierzu noch, daß die Gleichung der schwingenden Saite für den statischen Fall einfach auf die Differentialgleichung $u_{xx} = 0$ führt. Die Überführung eines Randwertproblems in eine Integralgleichung, die hier für einen sehr einfachen Fall dargestellt wurde, wird ausführlich in Teil IV/2 behandelt.

Zum Schluß wollen wir noch auf eine charakteristische Methode zur Überführung von Randwertproblemen der mathematischen Physik in Integralgleichungen hinweisen. Wir hatten früher [III/2, 139] das Potential der einfachen Kugelflächenbelegung durch die Formel

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{\varrho(M')}{d}\,d\sigma$$

definiert, in der $\varrho(M')$ eine auf der Kugeloberfläche S gegebene Funktion, $d\sigma$ das Flächenelement der Kugeloberfläche und d die Entfernung zwischen einem beliebigen Punkt M des Raumes und einem beliebigen Punkt M' der Kugeloberfläche bedeuten. Es seien n die Richtung der äußeren Normalen in einem Punkt M_0 der Kugeloberfläche und $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ bzw. $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_a$ die Grenzwerte der Ableitung $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ für den Fall, daß der Raumpunkt M von innen bzw. von außen gegen den Punkt M_0 der Kugeloberfläche konvergiert. Wir erhielten damals die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i &= -\iint\limits_S \varrho(M')\,\frac{\cos\varphi}{d^2}\,d\sigma + 2\pi\varrho(M_0)\,,\\
\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_a &= -\iint\limits_S \varrho(M')\,\frac{\cos\varphi}{d^2}\,d\sigma - 2\pi\varrho(M_0)\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

wobei d nun die Entfernung zwischen den beiden Punkten M_0 und M' der Kugeloberfläche angibt und ω der Winkel zwischen der Kugelsekante $\overline{M'M_0}$ und der Normalen n ist.

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, daß diese Formeln nicht nur für die Kugeloberfläche richtig sind. Wir formulieren nun das Neumannsche Problem für das Kugelinnere. Wir suchen eine Funktion, die im Innern der Kugel harmonisch ist und deren Normalableitung auf der Kugeloberfläche die vorgegebenen Randwerte

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(M_0) \tag{14}$$

annimmt. Wir setzen die Funktion u als Potential einer Kugelflächenbelegung an. Da ein solches Potential im Innern der Kugel eine harmonische Funktion ist, haben wir nur die Belegungsdichte $\varphi(M')$ so zu wählen, daß auch die Randbedingung (14) erfüllt ist. Aus der ersten Beziehung (13) und der Randbedingung (14) erhalten wir zur Bestimmung der gesuchten Dichte die Integralgleichung

$$2\pi\varphi(M_0) = f(M_0) + \iint_S \varphi(M') \frac{\cos\omega}{d^2}\, ds\,.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Funktionen $f(M)$ und $\varphi(M)$ jetzt auf einer Kugeloberfläche definiert sein müssen und die Integration nicht wie bisher über ein Intervall der x-Achse, sondern über die Kugeloberfläche zu erstrecken ist.

2. Klassifikation der Integralgleichungen. Wir betrachten als erstes lineare Integralgleichungen, und zwar zunächst für den Fall, daß die gesuchte Funktion von einer einzigen Veränderlichen x abhängt. In der Integralgleichung

$$y(x) = \int_a^x K(x, z)\, y(z)\, dz + f(x) \tag{15}$$

sei $y(x)$ die gesuchte Funktion, $f(x)$ und $K(x, z)$ seien gegebene Funktionen. Die Funktion $K(x, z)$ heißt der *Kern der Integralgleichung*.

Die Gleichung (15) wird *Volterrasche Integralgleichung zweiter Art* genannt. Die analoge Integralgleichung

$$y(x) = \int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz + f(x) \tag{16}$$

mit konstanten Grenzen heißt *Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art*. Kommt die gesuchte Funktion nur unter dem Integralzeichen vor, so handelt es sich um eine *Volterrasche* bzw. *Fredholmsche Integralgleichung erster Art*

$$\int_a^x K(x, z)\, y(z)\, dz = f_1(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz = f_1(x)\,. \tag{17}$$

Ein Beispiel für eine Volterrasche Integralgleichung erster Art ist die Abelsche Integralgleichung

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y)\, dy}{\sqrt{h-y}}\,,$$

von der schon in [**II**, 82] die Rede war.

Wir geben noch ein Beispiel für eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art an. Es sei $u(x)$ die statische Ausbiegung einer Saite bei einer kontinuierlich verteilten Belastung $p(z)$, bezogen auf die Längeneinheit. Fassen wir diese Belastung als Summe von Einzelkräften $p(z)\,dz$ auf, so erhalten wir nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes von einer jeden solchen Einzelkraft die statische Ausbiegung

$$\frac{1}{T_0} K(x, z)\, p(z)\, dz ,$$

wobei $K(x, z)$ durch (4) bestimmt ist. Durch Integration erhalten wir als statische Ausbiegung bei kontinuierlich verteilter Belastung

$$u(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, z)\, p(z)\, dz .$$

Diese Gleichung ist eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art, wenn die Ausbiegung $u(x)$ gegeben und die Belastung $p(z)$ gesucht ist.

Wir bemerken, daß die Volterrasche Integralgleichung ein Spezialfall der Fredholmschen Integralgleichung ist; denn wir können in den Volterraschen Integralgleichungen (15) oder (17) über z von $z = a$ bis $z = b$ integrieren, wenn wir von vornherein die Definition des Kerns $K(x, z)$ durch die Bedingung $K(x, z) = 0$ für $z > x$ ergänzen.

Im folgenden werden wir uns fast ausschließlich mit Integralgleichungen zweiter Art und dabei in der Hauptsache mit Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art beschäftigen; denn dieser Art von Integralgleichungen begegnet man bei der Lösung von Randwertproblemen der mathematischen Physik am häufigsten. Die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art ist bedeutend einfacher als die Theorie der Integralgleichungen erster Art. Wie wir schon erwähnt haben, gibt uns das Auftreten der gesuchten Funktion außerhalb des Integralzeichens die Möglichkeit, die Methode der sukzessiven Approximation anzuwenden.

Die Theorie der Integralgleichungen ist in mancher Hinsicht der linearen Algebra analog, die in Teil III/1 behandelt worden ist. Bekanntlich hat eine lineare Transformation im n-dimensionalen Raum die Gestalt

$$y_i = a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Sie läßt sich durch eine Matrix ausdrücken, die aus den Koeffizienten a_{ik} der Transformation gebildet wird. Wir schreiben damit die Transformation in der Gestalt

$$\boldsymbol{y} = A \boldsymbol{u} ,$$

wobei $\boldsymbol{u}(u_1, \dots, u_n)$ der ursprüngliche Vektor, $\boldsymbol{y}(y_1, \dots, y_n)$ der transformierte Vektor und A die Matrix der Koeffizienten a_{ik} ist. Im Fall der Integralgleichungen tritt an die Stelle eines n-dimensionalen Vektors eine Funktion, die gewöhnlich auf einem Intervall $[a, b]$ erklärt ist; die Matrix A wird durch den Kern $K(x, z)$ und die Summation durch eine Integration ersetzt, so daß der linearen Transformation jetzt eine Beziehung

$$y(x) = \int_a^b K(x, z)\, u(z)\, dz \tag{18}$$

entspricht. Hierin ist $u(z)$ die ursprüngliche und $y(x)$ die transformierte Funktion.

Weiterhin erinnern wir daran, daß wir diejenigen Werte des Parameters λ Eigenwerte der Matrix A genannt haben, für welche die Gleichung

$$Ax = \mu x$$

von 0 verschiedene Lösungen x besitzt. Unter Eigenwerten des Kerns $K(x, y)$ oder der zugehörigen Transformation werden wir die Werte des Parameters μ verstehen, für die die homogene Integralgleichung

$$\int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz = \mu y(x)$$

nicht verschwindende Lösungen hat. In der Theorie der Integralgleichungen ist es üblich, neben den Eigenwerten μ die *charakteristischen Zahlen* $\lambda = \mu^{-1}$ einzuführen. Man nennt also λ eine charakteristische Zahl, wenn die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz \qquad (19)$$

von 0 verschiedene Lösungen besitzt. Diese Lösungen $y(x)$ selbst heißen Eigenfunktionen des Kerns.

Es sei noch erwähnt, daß die identische Transformation, durch die eine Funktion $u(x)$ sich selbst zugeordnet wird [wobei also $y(x)$ mit $u(x)$ übereinstimmt], sich nicht in der Integralform (18) ausdrücken läßt.

In der Theorie der Integralgleichungen müssen wir natürlich einige Voraussetzungen über den Kern $K(x, z)$ sowie über die Funktionen $f(x)$ und $y(x)$ machen.

Einstweilen werden wir uns, wie schon erwähnt, mit Integralgleichungen im eindimensionalen Fall beschäftigen. Auf den Übergang zum mehrdimensionalen Fall wird später eingegangen werden.

Schließlich bemerken wir noch, daß im folgenden sowohl die gegebenen als auch die gesuchten Funktionen zuweilen komplexwertig sein werden:

$$K(x, z) = K_1(x, z) + iK_2(x, z),$$
$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$
$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x);$$

dabei sind $K_s(x, z)$, $f_s(x)$ und $y_s(x)$ $(s = 1, 2)$ reellwertige Funktionen. Die unabhängige Veränderliche wird stets als reell angenommen. Im folgenden werden wir es oft mit endlichen abgeschlossenen Intervallen zu tun haben. Ein solches Intervall soll mit $[a, b]$ bezeichnet werden.

3. Orthogonale Funktionensysteme. In der Theorie der Integralgleichungen trifft man häufig auf orthogonale Funktionensysteme. In Teil II wurde die Theorie solcher Systeme auf der Grundlage sowohl des Riemannschen als auch des Lebesgueschen Integralbegriffs für reelle und komplexe Funktionen ausführlich entwickelt [**II, 160, 163**]. Hier sollen diese Ergebnisse durch die Darstellung des Orthogonalisierungsverfahrens für Systeme linear unabhängiger Funktionen ergänzt werden.

In [**III/1,31**] haben wir gesehen, daß man zu m linear unabhängigen Vektoren stets ebenso viele paarweise orthogonale und normierte Vektoren bilden kann derart, daß sich die ursprünglichen Vektoren linear durch die letzteren ausdrücken lassen und umgekehrt. Dieses Verfahren läßt sich wörtlich auf Funktionen übertragen.[1]

[1] Das Verfahren stammt von ERHARD SCHMIDT und heißt daher *Erhard-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren*. (Anm. d. Red.)

Es seien $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ auf $[a, b]$ stetige linear unabhängige Funktionen, eine Identität

$$\alpha_1 \psi_1(x) + \ldots + \alpha_m \psi_m(x) \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten α_k kann also nur dann bestehen, wenn alle diese Koeffizienten gleich 0 sind. Wir bilden neue auf $[a, b]$ orthogonale und normierte Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ derart, daß sich jedes $\varphi_k(x)$ linear durch $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ und umgekehrt jedes $\psi_k(x)$ linear durch $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ ausdrücken läßt. Zur Abkürzung führen wir eine Schreibweise ein, die der bereits in der Algebra benutzten analog ist, und zwar bezeichnen wir mit (f, F) das Integral des Produktes $f(x)\,\overline{F(x)}$ über das Intervall $[a, b]$:

$$(f, F) = \int_a^b f(x)\,\overline{F(x)}\,dx\,.$$

Die Orthogonalisierung der Funktionen $\psi_k(x)$, d. h. die Konstruktion der Funktionen $\varphi_k(x)$, geschieht in folgender Weise:

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1, \psi_1)}}\,,$$

$$\chi_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\,\varphi_1(x)\,, \qquad \varphi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(\chi_2, \chi_2)}}\,,$$

$$\chi_3(x) = \psi_3(x) - (\psi_3, \varphi_2)\,\varphi_2(x) - (\psi_3, \varphi_1)\,\varphi_1(x)\,, \qquad \varphi_3(x) = \frac{\chi_3(x)}{\sqrt{(\chi_3, \chi_3)}}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\chi_m(x) = \psi_m(x) - (\psi_m, \varphi_{m-1})\,\varphi_{m-1}(x) - \ldots - (\psi_m, \varphi_1)\,\varphi_1(x)\,, \quad \varphi_m(x) = \frac{\chi_m(x)}{\sqrt{(\chi_m, \chi_m)}}\,.$$

Die Funktionen $\varphi_k(x)$ unterscheiden sich von den Funktionen $\chi_k(x)$ nur durch konstante Normierungsfaktoren, mit denen erreicht wird, daß das von a bis b erstreckte Integral über das Produkt $\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(x)}$ für jede einzelne Funktion $\varphi_k(x)$ gleich 1 ist. Aus den angegebenen Formeln folgt unmittelbar die erwähnte lineare Abhängigkeit zwischen den Funktionen $\psi_k(x)$ und $\varphi_k(x)$. Wir bemerken noch, daß keine der Funktionen $\chi_k(x)$ identisch verschwindet, so daß auch $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$ gilt. Denn wäre beispielsweise $\chi_2(x) \equiv 0$, so wären $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ linear abhängig:

$$\psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\,\varphi_1(x) \equiv 0\,.$$

Diese Gleichung würde aber zur linearen Abhängigkeit von $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ führen, im Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\psi_k(x)$. Daraus folgt aber $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$, da andernfalls $\chi_k \equiv 0$ sein müßte. Somit haben alle Formeln, durch die die Funktionen φ_k bestimmt werden, einen Sinn. Die Orthogonalität einer Funktion $\chi_k(x)$ zu den bereits konstruierten Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$ kann schrittweise nachgeprüft werden. Beispielsweise ist

$$(\chi_2, \varphi_1) = (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1)\,(\varphi_1, \varphi_1) = (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1) = 0\,.$$

Da die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ orthogonal und normiert sind, ergibt sich

$$(\chi_3, \varphi_1) = (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_2)\,(\varphi_2, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1)\,(\varphi_1, \varphi_1) = (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1) = 0$$

und ebenso $(\chi_3, \varphi_2) = 0$ usw.

Wir erwähnen noch die elementare Eigenschaft, daß orthogonale Funktionen stets linear unabhängig sind. Nehmen wir an, es bestünde eine Beziehung

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0\,.$$

Dann multiplizieren wir beide Seiten mit $\overline{\varphi_k(x)}$ $(k=1, \ldots, m)$ und integrieren. Da die Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ nach Voraussetzung orthogonal sind, erhalten wir $a_k=0$, d. h., alle Koeffizienten a_k müssen tatsächlich gleich 0 sein.

Bis jetzt haben wir Funktionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen zugrunde gelegt. Alles bisher Gesagte läßt sich auch auf Funktionen übertragen, die auf einem endlichen abgeschlossenen Bereich[1]) der Ebene, des dreidimensionalen oder des n-dimensionalen Raumes erklärt sind.

Es sei P ein veränderlicher Punkt aus einem endlichen meßbaren abgeschlossenen Bereich B der Ebene, des dreidimensionalen Raumes oder einer Fläche, d. h. aus einem Bereich, zu dem alle Randpunkte hinzugezählt werden. Die Funktionen $\varphi_k(P)$ bilden ein normiertes Orthogonalsystem, wenn die Beziehungen

$$\int_B \varphi_p(P)\,\overline{\varphi_q(P)}\,d\omega_P = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{für} \quad p = q \end{cases}$$

bestehen. Das (der Einfachheit halber nur mit einem einzigen Integralzeichen geschriebene) Integral ist als Doppel-, Raum- oder Oberflächenintegral aufzufassen. Mit $d\omega_P$ wird das entsprechende Flächen- oder Raumelement im Punkt P bezeichnet. Beispielsweise gilt für ein Doppelintegral in kartesischen Koordinaten $d\omega_P = dx\,dy$.

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(P)$ sind

$$c_k = \int_B f(P)\,\overline{\varphi_k(P)}\,d\omega_P\,, \tag{20}$$

und die Besselsche Ungleichung schreibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_B |f(P)|^2\,d\omega_P\,. \tag{21}$$

4. Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art. Nach den vorhergehenden einleitenden Abschnitten beginnen wir nun mit dem Studium der Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art in einer Veränderlichen

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt\,, \tag{22}$$

die den Parameter λ enthält. Wir nehmen an, daß $f(s)$ auf dem endlichen Intervall $[a, b]$ stetig ist und daß der Kern $K(s, t)$ in dem durch die Ungleichungen $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ definierten Quadrat k_0 eine stetige Funktion ist. Unter diesen Voraussetzungen sind alle im folgenden durchzuführenden Umformungen zulässig, so daß wir unsere ganze Aufmerksamkeit auf die prinzipielle Vorgehensweise richten können. Die Funktionen $f(s)$ und $K(s, t)$ werden, falls nicht etwas anderes vereinbart wird, als komplexwertig angenommen:

$$K(s, t) = K_1(s, t) + iK_2(s, t)\,,$$
$$f(s) = f_1(s) + if_2(s), \quad \varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s)\,.$$

Die Lösungen der Integralgleichung suchen wir in der Klasse der stetigen Funktionen. Danach werden wir Integralgleichungen mit polaren Kernen eines speziellen Typs untersuchen. Im Fall einer unabhängigen Veränderlichen sind das Integral-

[1]) Wir nennen eine zusammenhängende Punktmenge einen *Bereich* und einen offenen Bereich speziell ein *Gebiet*. (Anm. d. Red.)

gleichungen der Gestalt

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{L(s,t)}{|s-t|^\alpha}\, \varphi(t)\, dt \qquad (0 < \alpha < 1)$$

mit einer in k_0 stetigen Funktion $L(s, t)$. Wir setzen $f(s)$ als stetig voraus und suchen wieder stetige Lösungen. Im zweidimensionalen Fall haben diese Integralgleichungen die Gestalt

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \iint_B \frac{L(P, Q)}{r^\alpha(P, Q)}\, \varphi(Q)\, dx\, dy,$$

wobei $0 < \alpha < 2$ gilt und $r(P, Q)$ der Abstand zwischen den Punkten P und Q aus dem Gebiet B ist. Die Integration erfolgt hier nach dem variablen Punkt Q. Eine analoge Gestalt besitzen die Integralgleichungen mit polarem Kern im dreidimensionalen Gebiet, auf einer Fläche und allgemein im n-dimensionalen Gebiet.

Schließlich werden wir bei Verwendung des Lebesgueschen Integralbegriffs noch Integralgleichungen in der Klasse L_2 [**II, 161**] unter zusätzlichen Voraussetzungen betrachten, die im weiteren noch zu präzisieren sind.

Zunächst wenden wir uns der „Integraltransformation" (dem „Integraloperator")

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{23}$$

zu. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des Kerns $K(s, t)$ in k_0 wird dabei jeder auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion $\varphi(t)$ eine stetige Funktion $\psi(s)$ zugeordnet. Aus (23) folgt nämlich

$$\psi(s+h) - \psi(s) = \int_a^b [K(s+h, t) - K(s, t)]\, \varphi(t)\, dt.$$

Nehmen wir nun an, daß das Integral von $|\varphi(t)|^2$ endlich ist, so erhalten wir mit Hilfe der Bunjakowskischen Ungleichung[1]

$$|\psi(s+h) - \psi(s)|^2 \leq \int_a^b |K(s+h, t) - K(s, t)|^2\, dt \int_a^b |\varphi(t)|^2\, dt.$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite ist eine Konstante, so daß sich aus der Stetigkeit von $K(s, t)$ die von $\psi(s)$ ergibt. Der Operator (23) transformiert demnach jede Funktion mit der oben genannten Eigenschaft in eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $\psi(s)$. Aus dem Gesagten folgt: Bei stetigen Funktionen $K(s, t)$ und $f(s)$ ist es ganz natürlich, auch die Lösung $\varphi(s)$ der Integralgleichung (22) in der Klasse der stetigen Funktionen zu suchen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Operator (23) linear ist, d. h., sind c_i $(i = 1, \ldots, m)$ Konstanten, so gilt

$$\int_a^b K(s, t) \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t)\, dt = \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b K(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt. \tag{24}$$

Im Fall $f(s) \not\equiv 0$ heißt (22) eine inhomogene Integralgleichung.

Die zugehörige homogene Integralgleichung lautet

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{25}$$

[1] In der deutschen Literatur *Schwarzsche Ungleichung* genannt. (Anm. d. Red.)

Sie hat die triviale Lösung $\varphi(s)\equiv 0$, die wir Nullösung nennen. Wie bereits in [2] erwähnt wurde, *heißt der Wert $\lambda=\lambda_0$, für den die Integralgleichung* (25) *von der Nullösung verschiedene Lösungen hat, charakteristische Zahl des Kerns $K(s,t)$ oder der zugehörigen Integralgleichung, und jede von der Nullösung verschiedene Lösung der Integralgleichung*

$$\varphi(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{26}$$

wird Eigenfunktion für die zugehörige charakteristische Zahl $\lambda=\lambda_0$ genannt. Die Zahl $\lambda_0=0$ kann offenbar keine charakteristische Zahl sein, weil dann aus (26) die Beziehung $\varphi(s)\equiv 0$ folgen würde. Es seien $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_m(s)$ Eigenfunktionen, die zu ein und derselben charakteristischen Zahl $\lambda=\lambda_0$ gehören. Da die Integralgleichung (25) linear und homogen bezüglich der gesuchten Funktion ist, ist auch die Linearkombination

$$\varphi(s)=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+\cdots+c_m\varphi_m(s) \tag{27}$$

mit willkürlichen Konstanten c_i Eigenfunktion, die zu demselben $\lambda=\lambda_0$ gehört, sofern nur (27) nicht in s identisch verschwindet. Wenn die Funktionen $\varphi_i(s)$ ($i=1, \ldots, m$) linear unabhängig sind, dann gilt $\varphi(s)\equiv 0$ nur in dem Fall, daß alle Konstanten c_p gleich 0 sind. Wie wir später zeigen werden, gehören zu jeder charakteristischen Zahl nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen $\varphi_p(s)$ ($p=1, 2, \ldots, k$), so daß durch

$$\varphi(s)=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+\cdots+c_k\varphi_k(s) \tag{28}$$

mit willkürlichen Konstanten c_p, die nicht alle gleich 0 sind, alle zur charakteristischen Zahl $\lambda=\lambda_0$ gehörenden Eigenfunktionen dargestellt werden. Allgemein gesagt, bilden die Funktionen $\varphi_p(s)$ ($p=1, 2, \ldots, k$) eine *Basis* für die Lösungen der Integralgleichung (26). Wird die Basis $\varphi_p(s)$ durch die lineare Abbildung

$$\psi_p(s)=a_{p1}\varphi_1(s)+a_{p2}\varphi_2(s)+\cdots+a_{pk}\varphi_k(s) \qquad (p=1, 2, \ldots, k) \tag{29}$$

mit von 0 verschiedener Koeffizientendeterminante $|a_{pq}|$ transformiert, so bilden die $\psi_p(s)$ wieder eine Basis für die Lösungen der Integralgleichung. Insbesondere läßt sich das Orthogonalisierungsverfahren auf das Funktionensystem $\varphi_p(s)$ anwenden, so daß wir die Basis als orthonormiert annehmen können.

5. Iterierte Kerne. Im folgenden schreiben wir für Integraloperatoren der Gestalt

$$\psi(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{30}$$

zur Abkürzung häufig $\psi=K\varphi$. Wie wir schon erwähnt haben, ist dieser Operator linear:

$$K(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1K\varphi_1+c_2K\varphi_2, \tag{31}$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind.

Gegeben seien zwei Integraloperatoren mit stetigen Kernen:

$$v(s)=\int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt, \qquad v_1(s)=\int_a^b L(s,t)\,u(t)\,dt. \tag{32}$$

Wir bezeichnen sie mit K und L. Weiterhin sei $LK[u(t)]$ oder einfach LKu derjenige Operator, den man erhält, wenn man zuerst den Operator K und danach den

Operator L auf $u(t)$ anwendet. Aus der Umformung

$$LK[u(t)] = \int_a^b L(s,t_1)\left[\int_a^b K(t_1,t)\,u(t)\,dt\right]dt_1 = \int_a^b\left[\int_a^b L(s,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1\right]u(t)\,dt$$

ist ersichtlich, daß der Kern des Operators LK durch

$$\bar K(s,t) = \int_a^b L(s,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1 \tag{33}$$

definiert ist. Erwähnt sei noch, daß der Kern des Operators KL analog durch

$$\bar L(s,t) = \int_a^b K(s,t_1)\,L(t_1,t)\,dt_1 \tag{34}$$

erklärt und $\bar L(s,t)$ im allgemeinen von $\bar K(s,t)$ verschieden ist, d. h., die Operatoren LK und KL sind im allgemeinen voneinander verschieden. Wenn der Operator LK mit dem Operator KL übereinstimmt, dann sagt man, daß die Operatoren K und L *kommutieren*.

Wir führen jetzt die *iterierten* Kerne ein, die den Potenzen des Operators K mit ganzzahligen positiven Exponenten entsprechen. Der Einheitlichkeit halber wird der Ausgangskern $K(s,t)$ dabei mit $K_1(s,t)$ bezeichnet:

$$K_1(s,t) = K(s,t), \qquad K_n(s,t) = \int_a^b K_{n-1}(s,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1. \tag{35}$$

$K_n(s,t)$ ist der Kern des Operators K^n. Speziell ist

$$K_2(s,t) = \int_a^b K(s,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1,$$

$$K_3(s,t) = \int_a^b\int_a^b K(s,t_2)\,K(t_2,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1\,dt_2$$

und allgemein

$$K_n(s,t) = \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_{n-1})\,K(t_{n-1},t_{n-2})\cdots K(t_2,t_1)\,K(t_1,t)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1},$$

wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig ist. Offensichtlich gilt

$$K_{p+q}(s,t) = \int_a^b K_p(s,\tau)\,K_q(\tau,t)\,d\tau, \tag{36}$$

da man nur $p-1$ Quadraturen zur Bildung von $K_p(s,\tau)$ und $q-1$ Quadraturen zur Bildung von $K_q(\tau,t)$ auszuführen braucht und noch eine Quadratur nach τ übrigbleibt.

Wir führen jetzt die Bezeichnung

$$P^2 = \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,ds\,dt \tag{37}$$

ein, wobei $P > 0$ ist, wenn $K(s,t) \not\equiv 0$ gilt. Zur Abkürzung setzen wir

$$Q(s) = \left(\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \qquad R(t) = \left(\int_a^b |K(s,t)|^2\,ds\right)^{1/2}$$

und erhalten

$$P^2 = \int_a^b Q^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b R^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{38}$$

Zur schrittweisen Abschätzung der iterierten Kerne benutzen wir (35) und die Bunjakowskische Ungleichung [II, 161]:

$$|K_2(s,t)|^2 = \left|\int_a^b K(s,t_1)\,K(t_1,t)\,\mathrm{d}t_1\right|^2 \leq Q^2(s)\,R^2(t)\,,$$

$$|K_3(s,t)|^2 = \left|\int_a^b K_2(s,t_1)\,K(t_1,t)\,\mathrm{d}t_1\right|^2 \leq \int_a^b Q^2(s)\,R^2(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \int_a^b |K(t_1,t)|^2\,\mathrm{d}t_1\,,$$

woraus

$$|K_3(s,t)|^2 \leq Q^2(s)\int_a^b R^2(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,R^2(t) = Q^2(s)\,R^2(t)\,P^2$$

folgt. Weiterhin ist

$$|K_4(s,t)|^2 = \left|\int_a^b K_3(s,t_1)\,K(t_1,t)\,\mathrm{d}t_1\right|^2 \leq \int_a^b Q^2(s)\,R^2(t_1)\,P^2\,\mathrm{d}t_1 \int_a^b |K(t_1,t)|^2\,\mathrm{d}t_1$$

und damit

$$|K_4(s,t)|^2 \leq Q^2(s)\,R^2(t)\,P^4\,.$$

Allgemein gilt

$$|K_{n+1}(s,t)|^2 \leq Q^2(s)\,R^2(t)\,P^{2(n-1)}$$

oder

$$|K_{n+1}(s,t)| \leq Q(s)\,R(t)\,P^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Wir betrachten die sogenannte Neumannsche Reihe

$$R(s,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s,t)\,\lambda^n \qquad (K_1(s,t) = K(s,t))\,. \tag{39}$$

Unter der Voraussetzung der Stetigkeit des Kerns $K(s,t)$ in k_0 sind die Funktionen $Q(s)$ und $R(t)$ ebenfalls stetig und damit auf $[a,b]$ beschränkt, d. h., es existiert eine positive Zahl M derart, daß $Q(s)$ und $R(t)$ höchstens gleich M sind. Daher gilt

$$|K_{n+1}(s,t)| \leq M^2 P^{n-1}\,, \tag{40}$$

und folglich konvergiert die Reihe, die aus den Beträgen der Glieder der Reihe (39) besteht, gleichmäßig in s und t im Quadrat k_0, falls

$$|\lambda| < P^{-1}, \quad \text{d. h.} \quad |\lambda| < \left[\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right]^{-1/2} \tag{41}$$

ist. Die Neumannsche Reihe (39) konvergiert demnach unter der Bedingung (41) absolut und gleichmäßig in k_0. Allgemein sagt man, daß *eine Reihe regulär konvergiert*, wenn die aus den Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe gleichmäßig konvergent ist. Aus der gezeigten regulären Konvergenz folgt also die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (39).

Mit $R(s,t;\lambda)$ bezeichneten wir die Summe der Reihe (39). Diese Funktion heißt *Resolvente* oder *lösender Kern* des Kerns $K(s,t)$ oder der Integralgleichung (22). Sie ist unter der Bedingung (41) *stetig*.