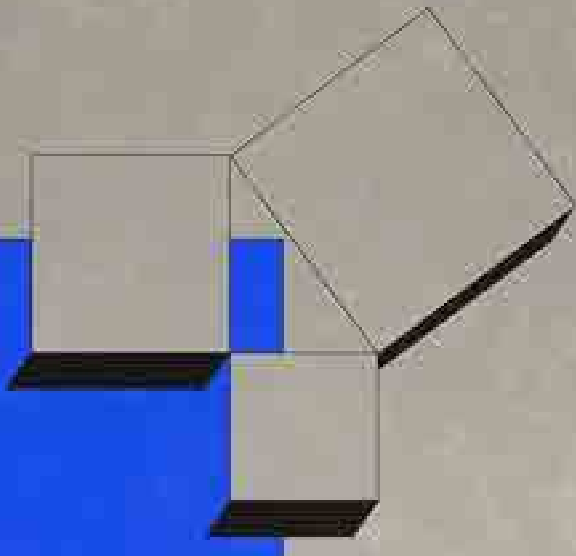
W.I. Smirnow

Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil IV/2



Verlag Harri Deutsch

W. I. SMIRNOW
LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL IV/2

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 2004, 449 Seiten, 190 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1297-5 (ISBN-10: 3-8171-1297-1)
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen, Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 2005, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1298-2 (ISBN-10: 3-8171-1298-X)
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale, Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1299-9 (ISBN-10: 3-8171-1299-8)
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 2005, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1300-2 (ISBN-10: 3-8171-1300-5)
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 2004, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1301-9 (ISBN-10: 3-8171-1301-3)
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume: Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 2006, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1302-6 (ISBN-10: 3-8171-1302-1)
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 2005, 545 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13: 978-3-8171-1303-3 (ISBN-10: 3-8171-1303-X)
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN-13: 978-3-8171-1419-1 (ISBN-10: 3-8171-1419-2)

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

VON

W. I. SMIRNOW
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

TEIL IV/2

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe

В.И. Смирнов
Курс высшей математики,
Том Четвертый, Часть вторая
Издание шестое
Наука. Москва 1981

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN-10 3-8171-1302-1
ISBN-13 978-3-8171-1302-6

Unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1995, 2006

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt

Printed in Germany

Geleitwort des Verlages

Der Verlag Harri Deutsch hat zu erheblichen Teilen die Tradition übernommen, wichtige Titel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichs russischer Autoren in deutscher Sprache weiterzuführen oder neu zu erschließen. So werden wir auch dieses schon klassisch gewordene Lehrbuch der höheren Mathematik weiter komplett lieferbar halten. Für Hinweise auf Druckfehler und Verbesserungs- oder Ergänzungsvorschläge der Benutzer sind wir stets dankbar und erbitten diese an

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.harri-deutsch.de/verlag/

Inhalt

II. Randwertprobleme

I. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen

§1. Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Quasilineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Schon mehrmals sind bisher Differentialgleichungen aufgetreten, welche partielle Ableitungen der gesuchten Funktion enthalten. Diese Differentialgleichungen, die aus konkreten Problemen der mathematischen Physik hervorgingen, hatten stets eine spezielle Gestalt. Das Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln. Dabei beginnen wir mit der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer einzigen gesuchten Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ hat die Gestalt

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

wobei die x_k unabhängige Veränderliche und die $p_k = u_{x_k}$ die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion nach diesen unabhängigen Veränderlichen bedeuten. Wir behandeln zunächst Differentialgleichungen, die in bezug auf die partiellen Ableitungen p_k linear sind, d. h. Differentialgleichungen der Gestalt

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\, p_1 + \cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\, p_n = c(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten a_k und c gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_k und der gesuchten Funktion u sind. Da die Funktion u in beliebiger Weise in den Koeffizienten vorkommen kann, werden diese Differentialgleichungen meist nicht lineare, sondern *quasilineare Differentialgleichungen* genannt. In diesem Abschnitt wollen wir eine Differentialgleichung der Gestalt (1) im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher untersuchen. In diesem Spezialfall werden die unabhängigen Veränderlichen gewöhnlich mit x und y und die partiellen Ableitungen mit $p = u_x$ und $q = u_y$ bezeichnet. Wir untersuchen also die Differentialgleichung

$$a(x, y, u)\, p + b(x, y, u)\, q = c(x, y, u). \tag{2}$$

Es sei daran erinnert, daß wir uns schon früher [**II, 22**] mit linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt haben. Damals haben wir gesehen, daß die Integration der Differentialgleichung (2) der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen äquivalent ist. Zu den früher erhaltenen Ergebnissen fügen wir jetzt einige neue hinzu, die sich für die spätere Untersuchung schwierigerer Probleme als nützlich erweisen werden.

Die gegebenen Funktionen $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ und $c(x, y, u)$ bestimmen im x, y, u-Raum ein Richtungsfeld, und zwar gibt es in jedem festen Punkt dieses Raumes eine Richtung, deren Richtungskosinus zu a, b und c proportional sind. Dieses Richtungsfeld bestimmt eine Schar von Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung des Feldes in diesem Punkt besitzen. Man erhält die Kurvenschar durch Integration des Systems

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \tag{3}$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen, das man auch, wenn man den gemeinsamen Wert der drei Quotienten mit ds bezeichnet, in der Form

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \qquad \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \tag{4}$$

schreiben kann. Die Größen p, q und -1 sind den Richtungskosinus der Normalen der gesuchten Fläche $u = u(x, y)$ proportional; die Differentialgleichung (2) bringt zum Ausdruck, daß

$$ap + bq + c(-1) = 0$$

ist, die Normalen der gesuchten Fläche und die Feldrichtung also zueinander orthogonal sind. Aus der Differentialgleichung (2) ergibt sich somit, daß in jedem Punkt der gesuchten Fläche die durch das Richtungsfeld bestimmte Richtung in der Tangentialebene der Fläche liegt. Die durch das Differentialgleichungssystem (4) bestimmten Kurven nennt man die *charakteristischen Kurven* oder die *Charakteristiken* der Differentialgleichung (2). Stellt eine Fläche $u = u(x, y)$ den geometrischen Ort für die Charakteristiken der Differentialgleichung (2) dar, wird also die Fläche von Kurven Γ erzeugt, die dem Differentialgleichungssystem genügen, so liegt in jedem Punkt dieser Fläche die Tangente der Kurve Γ, die von diesem Punkt ausgeht, in der Tangentialebene der Fläche. Folglich genügt diese Fläche der Differentialgleichung (2), d. h., sie ist eine Integralfläche dieser Differentialgleichung. Wenn somit *eine Fläche $u = u(x, y)$ von Charakteristiken der Differentialgleichung (2) erzeugt wird, ist sie eine Integralfläche dieser Differentialgleichung.*

Wir setzen voraus, daß die Fläche $u = u(x, y)$ in jedem Punkt eine Tangentialebene besitzt und daß sich die Richtung der Flächennormalen längs der Fläche stetig ändert. Dies ist der Fall, wenn die Ableitungen erster Ordnung von $u(x, y)$ existieren und stetig sind.

Wenn wir im folgenden von einer Integralfläche sprechen, so nehmen wir an, daß diese Fläche die soeben angegebene Eigenschaft besitzt. Allgemein nennen wir Flächen mit dieser Eigenschaft *glatt*.

Wir haben soeben gezeigt, daß eine glatte Fläche, die eine Gleichung der Gestalt $u = u(x, y)$ besitzt und von Charakteristiken erzeugt wird, eine Integralfläche ist. Man kann zeigen, daß auch umgekehrt *eine glatte Fläche mit Charakteristiken überdeckt werden kann, wenn sie die Differentialgleichung (2) erfüllt, d. h., wenn sie eine Integralfläche ist.*

Genügt nämlich eine Fläche S der Differentialgleichung (2), so liegt in jedem ihrer Punkte die Richtung (a, b, c) in der Tangentialebene von S und liefert somit auf S ein Richtungsfeld. Integrieren wir die zu diesem Richtungsfeld gehörige gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, so finden wir Kurven Γ, die auf der Fläche S liegen und dem Differentialgleichungssystem (4) genügen. Als eine solche Differentialgleichung erster Ordnung kann beispielsweise die Gleichung

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)}$$

dienen, in der u durch den Ausdruck $u = u(x, y)$ der Flächengleichung zu ersetzen ist. Wir nehmen an, daß der Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf die Differentialgleichung anwendbar ist, wobei die Integralkurven l, ohne sich zu schneiden, ein gewisses Gebiet D überdecken und die Funktion $u = u(x, y)$ in diesem Gebiet erklärt ist. Die Kurven l' sind nun die Kurven auf S, deren Projektion auf die x, y-Ebene die Kurven l ergeben.

Bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir gesehen [**II, 50, 51**], daß die gesuchten Funktionen durch die Anfangswerte für einen gegebenen Wert der unabhängigen Veränderlichen völlig bestimmt sind. Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die willkürlichen Konstanten bestimmen, die im allgemeinen Integral vorkommen, falls wir dieses ermitteln konnten. Die Lösungen lassen sich aber auch ohne Kenntnis eines allgemeinen Integrals durch Anfangsbedingungen bestimmen, und zwar mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation, die wir beim Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes benutzt haben [**II, 51**]. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) enthält nicht willkürliche Konstante, sondern willkürliche Funktionen [**II, 23**], und das Problem, die Lösungen durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen, läßt sich in diesem Fall folgendermaßen formulieren: *Gesucht ist diejenige Integralfläche der Differentialgleichung* (2), *die durch eine vorgegebene Kurve l im x, y, u-Raum hindurchgeht.* Bezeichnen wir mit λ die Projektion der Kurve l auf die x, y-Ebene, so besteht das gestellte Problem darin, diejenige Lösung der Differentialgleichung (2) zu ermitteln, die in den Punkten der Kurve λ vorgegebene Werte annimmt. Wir skizzieren jetzt die Behandlung des Problems [**II, 23**]. Es sei M_0 ein Punkt der Kurve l. Wir benutzen seine Koordinaten als Anfangswerte der Funktionen, die durch das Differentialgleichungssystem (4) bestimmt werden. Auf Grund des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erhalten wir eine wohlbestimmte Charakteristik, die durch diesen Punkt M_0 hindurchgeht. Führen wir dies für jeden Punkt der Kurve l durch, so erhalten wir eine Schar von Charakteristiken; wir setzen voraus, daß diese eine Fläche S erzeugen, die durch $u = u(x, y)$ darstellbar sei. Die Fläche geht durch die Kurve l und ist somit eine Integralfläche der Differentialgleichung (2).

Ein strenger Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unseres Problems erfordert einige Voraussetzungen über die rechten Seiten der Differentialgleichungen (4) und einige wesentliche Einschränkungen in bezug auf die Kurve l. Ist beispielsweise die vorgegebene Kurve l selbst eine Charakteristik, so führt das angegebene Verfahren zur Konstruktion der Charakteristiken durch die Punkte der Kurve l nicht zu einer Fläche, sondern nur zur Kurve l selbst. In diesem Fall kann es unendlich viele Lösungen geben [**II, 24**]. Um dies nachzuweisen, legen wir durch einen beliebigen Punkt von l eine Kurve l_1, die keine Charakteristik ist. Wenn wir durch die Punkte dieser Kurve die entsprechenden Charakteristiken hindurchlegen (unter denen sich auch die vorgegebene Kurve l befindet), erhalten wir unter bestimmten Voraussetzungen eine Integralfläche, die durch die gegebene Kurve l hindurchgeht. Da nun l_1 beliebig gewählt ist, kann das Problem unendlich viele Lösungen besitzen, wenn die gegebene Kurve l eine Charakteristik ist. Es kann auch vorkommen, daß das Problem überhaupt keine Lösung hat. Dies gilt dann, wenn die Charakteristiken, die durch die Punkte von l hindurchgehen, in der Umgebung dieser Kurve keine Fläche erzeugen, die eine explizite Gleichung $u = u(x, y)$ besitzt, wobei $u(x, y)$ eindeutig und stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn die fraglichen Charakteristiken eine Zylinderfläche bilden, deren Erzeugenden zur u-Achse parallel verlaufen. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die Bedingungen, unter denen das gestellte Problem eine wohlbestimmte Lösung besitzt.

2. Das Cauchysche Problem und die Charakteristiken. Unter dem Cauchyschen Problem versteht man gewöhnlich das im vorigen Abschnitt formulierte Problem, diejenige Integralfläche der Differentialgleichung (2) zu bestimmen, die durch eine gegebene Kurve l geht. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems genau untersuchen zu können, benutzen wir den folgenden Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz. *Sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen des Systems*

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

in dem Bereich, der durch die Ungleichungen

$$|x - a| \leq A, \qquad |y_k - b_k| \leq B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

definiert ist, stetige Funktionen ihrer Argumente und existieren außerdem in diesem Bereich stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, *so ist die nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz durch beliebige Anfangswerte* $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *aus dem Innern des Bereiches* (6) *bestimmte Lösung*

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

des Differentialgleichungssystems (5) *eine stetige Funktion ihrer Argumente und besitzt partielle Ableitungen* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}$ *nach den Anfangswerten, die ebenfalls stetige Funktionen ihrer Argumente* $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *sind.*

Um unsere Ausführungen nicht zu unterbrechen, verschieben wir den Beweis dieses Satzes auf einen der folgenden Abschnitte.

Wir kehren zur Lösung des Cauchyschen Problems zurück und setzen voraus, daß die Gleichung der Kurve l in einer Parameterdarstellung

$$x_0 = x_0(t), \qquad y_0 = y_0(t), \qquad u_0 = u_0(t) \qquad (t_0 \leq t \leq t_1) \tag{7}$$

gegeben ist und daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (4) den Voraussetzungen des soeben formulierten Satzes in einem Bereich des x, y, u-Raumes genügen, der die Kurve l im Innern enthält. Nehmen wir die Koordinaten der Punkte von l als Anfangswerte für $s = 0$, so erhalten wir für hinreichend kleine s

$$x = x(s, x_0, y_0, u_0), \qquad y = y(s, x_0, y_0, u_0), \qquad u = u(s, x_0, y_0, u_0)$$

oder mit (7)

$$x = x(s, t), \qquad y = y(s, t), \qquad u = u(s, t) \tag{8}$$

als Lösung des Differentialgleichungssystems (4).

Setzen wir noch voraus, daß die rechten Seiten der Gleichungen (7) stetig nach t differenzierbar sind, und benutzen den angegebenen Satz, so finden wir, daß die Funktionen (8) stetige Ableitungen nicht nur nach s, sondern auch nach t besitzen. Bei beliebig vorgegebenem t aus dem Intervall $t_0 < t < t_1$ sind die Funktionen (8) für alle hinreichend kleinen s bestimmt. Die Funktionaldeterminante der ersten beiden dieser Funktionen nach s und t lautet

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s. \tag{9}$$

Für das Folgende ist wesentlich, ob diese Determinante von 0 verschieden ist oder nicht. Wir betrachten zunächst den Fall $\Delta \neq 0$ längs der Kurve l und darauf den Fall $\Delta = 0$ längs l. Wir beginnen mit dem Fall

$$\Delta \neq 0 \quad (\text{längs der Kurve } l), \tag{10}$$

d.h. $\Delta \neq 0$ für $s = 0$. Da die in Δ vorkommenden Ableitungen stetig sind, gilt deshalb $\Delta \neq 0$ auch in einer gewissen Umgebung des Anfangswertes $s = 0$ und des Wertes t, der zu einem beliebigen Punkt M von l gehört. Demzufolge kann man die ersten beiden Gleichungen (8) nach s und t auflösen für alle x und y, die sich in einer Umgebung der Koordinaten x_0, y_0 des Punktes M befinden. Diese Auflösung ist eindeutig, und die erhaltenen Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$ haben stetige Ableitungen erster Ordnung [**III/1, 19**]. Setzen wir die Funktionen $s(x, y)$ und $t(x, y)$ in die dritte Gleichung (8) ein, so erhalten wir in der erwähnten Umgebung eine Funktion $u(x, y)$, die stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt; die Fläche $u = u(x, y)$ enthält dabei ein bestimmtes Stück der Kurve l, das in der Umgebung von M liegt. Aus den geometrischen Überlegungen des vorigen Abschnittes geht unmittelbar hervor, daß $u(x, y)$ der Differentialgleichung (2) genügt. Wir werden das auch noch analytisch nachweisen.

Bemerkung. Wir haben die Lösung $u(x, y)$ nur in der Umgebung eines beliebig vorgegebenen Punktes M der Kurve l konstruiert; man sagt auch, es ist eine lokale Lösung des Problems konstruiert worden. Unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten a, b, c und die Kurve l kann man die Integralfläche auch in einer gewissen Umgebung der ganzen Kurve l konstruieren, d. h. für alle Punkte (x, y), die der Kurve $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ in der x, y-Ebene hinreichend benachbart sind. Hierbei nimmt man an, daß die Ableitungen $x_0'(t)$ und $y_0'(t)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Eine genaue Formulierung analoger Resultate geben wir im folgenden Abschnitt.

Die Existenz einer Lösung in einem vorgegebenen Bereich der x, y-Ebene im Großen nachzuweisen, ist äußerst schwierig. Man kann einen Bereich B der x, y-Ebene und in ihm eine Funktion $b(x, y)$ konstruieren, die Ableitungen jeder Ordnung besitzt derart, daß für die Differentialgleichung

$$u_x + b(x, y)\, u_y = 0$$

die Funktion $u = \text{const}$ die einzige Lösung ist, welche stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt und im ganzen Bereich B existiert.

Jetzt zeigen wir, daß die konstruierte Funktion $u(x, y)$ tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Wenn wir die Kettenregel und die Beziehungen (4) benutzen, erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b .$$

Diese Beziehung gilt für alle s und t, die in einer Umgebung des Wertes $s = 0$ und desjenigen Wertes von t liegen, der zu einem beliebigen Punkt $M(x_0, y_0)$ der Kurve l gehört. Es ist aber $\frac{du}{ds} = c$; also erfüllt die Funktion $u(x, y)$ für alle x, y in einer Umgebung von $M(x_0, y_0)$ die Differentialgleichung (2).

Zum Beweis der Eindeutigkeit braucht man nur zu zeigen, daß jede durch l verlaufende glatte Integralfläche $u = u(x, y)$ aus Charakteristiken erzeugt werden kann. Wir bilden das System der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = a[x, y, u(x, y)], \qquad \frac{dy}{ds} = b[x, y, u(x, y)] . \tag{11}$$

Nach unseren Voraussetzungen sind die rechten Seiten so beschaffen, daß für alle x, y in einer Umgebung von x_0, y_0 der Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt. Da die Integralfläche eine explizite Darstellung $u = u(x, y)$ besitzt und durch das in der Umgebung des Punktes $M(x_0, y_0, u_0)$ verlaufende Stück der Kurve l hindurchgeht, sind die Koordinaten x, y verschiedener Punkte von l in der Umgebung von M verschieden (wir nehmen an, daß l doppelpunktfrei ist). Benutzen wir diese Koordinaten als Anfangswerte bei der Integration des Systems (11) und setzen wir die erhaltenen Lösungen in die Funktion $u = u(x, y)$ ein, so erhalten wir eine Schar von Kurven auf unserer Integralfläche. Längs dieser Kurven sind wegen (11) die ersten beiden Differentialgleichungen (4) erfüllt. Es läßt sich leicht verifizieren, daß auch die dritte Differentialgleichung erfüllt ist. Denn wegen (11) erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b .$$

Da aber $u = u(x, y)$ eine Integralfläche ist, also $u_x a + u_y b = c$ gilt, folgt $\frac{du}{ds} = c$. Somit sind die konstruierten Kurven, welche die Fläche $u = u(x, y)$ überdecken, wirklich Charakteristiken. *Also hat das Cauchysche Problem unter der Bedingung* (10) *genau eine Lösung.* Auf die Frage der Eindeutigkeit gehen wir noch einmal bei der Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung ein.

Wir setzen nun voraus, daß längs der Kurve l, also für $s = 0$,

$$\Delta = x_t y_s - x_s y_t = 0 \tag{12}$$

gilt.

Existiert in diesem Fall eine Integralfläche $u = u(x, y)$ mit stetigen Ableitungen erster Ordnung, die durch die Kurve l hindurchgeht, so muß diese Kurve, wie wir sogleich zeigen wollen, eine Charakteristik sein. Wenn wir davon sprechen, daß die Fläche $u = u(x, y)$ durch die Kurve l hindurchgeht, ist dies stets lokal zu verstehen, d. h., wir betrachten nur eine gewisse Teilkurve von l.

Wir nehmen an, die Größen a und b seien längs l von 0 verschieden. Unter Berücksichtigung der ersten beiden Differentialgleichungen (4) läßt sich die Bedingung (12) auch in der Gestalt

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = k \qquad (s = 0) \tag{13}$$

schreiben, wobei mit k die beiden übereinstimmenden Quotienten bezeichnet sind. Es sei $u = u(x, y)$ eine Integralfläche, die durch l hindurchgeht. Setzen wir in $u(x, y)$ die Ausdrücke $x = x_0(t)$ und $y = y_0(t)$ ein, differenzieren nach t und benutzen (13), so erhalten wir $\frac{du}{dt} = u_x ka + u_y kb$. Da $u = u(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist, ergibt sich daraus $\frac{du}{dt} = kc$. Diese Beziehung führt gerade auf das Differentialgleichungssystem

$$\frac{x_t}{a} = \frac{y_t}{b} = \frac{u_t}{c} \qquad (s = 0),$$

aus dem hervorgeht, daß l eine Charakteristik ist. Also gilt: *Dafür, daß im Fall $\Delta = 0$ eine Integralfläche existiert, die durch eine Kurve l hindurchgeht, ist notwendig, daß diese Kurve eine Charakteristik ist.* Dann gehen durch die Kurve l, wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, unendlich viele Integralflächen hindurch. Bei der Durchführung des letzten Beweises war wesentlich, daß die Integralfläche $u = u(x, y)$, die durch l hindurchgeht, in den Punkten dieser Kurve stetige Ableitungen besitzt. Es kann vorkommen, wie wir an einem Beispiel sehen werden, daß durch eine Kurve l, längs der $\Delta=0$ gilt, die aber keine Charakteristik ist, trotzdem eine Integralfläche hindurchgeht; dann sind die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ in den Punkten von l nicht mehr stetig, mit anderen Worten, l ist eine singuläre Kurve der Integralfläche. Ist l keine Charakteristik, gilt aber $\Delta=0$ längs l, so bedeutet dies, daß längs der Kurve

$$\frac{x_s}{a} = \frac{y_s}{b} \neq \frac{u_s}{c}$$

ist.

Wir erwähnen noch eine Besonderheit des Systems (4). Der Hilfsparameter s kommt auf der rechten Seite der Gleichungen nicht vor, so daß eine der willkürlichen Konstanten als additiver Summand bei s auftritt. Diese willkürliche Konstante spielt keine wesentliche Rolle und bedeutet nur, daß der Anfangswert s willkürlich gewählt werden kann. Somit treten bei der Integration dieses Systems nur zwei wesentliche willkürliche Konstanten auf. Man erkennt dies sofort, wenn man das Differentialgleichungssystem (4) in der Form (3) darstellt.

Wir erinnern daran, daß sich die inhomogene quasilineare Differentialgleichung (2) in eine homogene lineare Differentialgleichung überführen läßt, wenn wir die Lösung in der impliziten Form [**II, 21**]

$$\varphi(x, y, u) = C \tag{14}$$

suchen, mit einer willkürlichen Konstanten C. Auf Grund der Differentiationsregel für implizite Funktionen gilt

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \qquad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u},$$

und die Differentialgleichung (2) führt auf die homogene lineare Differentialgleichung

$$a(x, y, u)\,\varphi_x + b(x, y, u)\,\varphi_y + c(x, y, u)\,\varphi_u = 0. \tag{15}$$

Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist das System (3). Sind $\varphi_1(x, y, u) = C_1$, $\varphi_2(x, y, u) = C_2$ zwei unabhängige Integrale dieses Systems, so ist auch die Funktion $\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2)$, wobei F eine willkürliche Funktion ihrer Argumente bedeutet, eine Lösung der Differentialgleichung (15). Wir haben gesehen, in welcher Weise aus den Nebenbedingungen des Cauchyschen Problems die Gestalt dieser Funktion bestimmt werden kann [**II, 24**].

Die angestellten Überlegungen geben zu folgender Frage Anlaß. Wir suchten die Lösung der Differentialgleichung (2) aus der Gesamtheit von Lösungen, welche durch eine implizite Gleichung der Gestalt (14) gegeben werden, in der eine willkürliche Konstante C auftritt. Es ist leicht zu zeigen, daß uns auf diesem Wege keine einzige Lösung unserer Differentialgleichung verlorengeht. Da die Anfangswerte im Cauchyschen Problem willkürlich sind, können wir nämlich annehmen, daß jede Lösung unserer Differentialgleichung in einer ganzen Schar von Lösungen vorkommt, deren Anfangswerte eine willkürliche Konstante enthalten. Lösen wir nach dieser willkürlichen Konstanten auf, so können wir uns davon überzeugen, daß wir jede Lösung aus einer Gleichung der Gestalt (14) erhalten können. Uns konnten nur diejenigen (singulären) Lösungen verlorengehen, die wir nicht durch die angegebene Konstruktion der Lösung des Cauchyschen Problems erhalten können. Solche Lösungen kann es nicht geben, wenn die Funktionen a, b und c gewisse allgemeine

Bedingungen erfüllen. Diese Betrachtungen sind rein formaler Natur, und wir werden auf exaktere Formulierungen nicht eingehen.

3. Quasilineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen. Wir behandeln jetzt die quasilineare Differentialgleichung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\, p_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\, p_n = c(x_1, \dots, x_n, u). \tag{16}$$

Dabei setzen wir stets voraus, daß die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ für die betrachteten Werte der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ nicht gleichzeitig verschwinden, d. h., daß $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ ist. Bei der Untersuchung der Differentialgleichung (16) bedienen wir uns einer geometrischen Terminologie in Analogie zum dreidimensionalen Raum. Im vorliegenden Fall haben wir es mit einem $(n+1)$-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n, u$ zu tun. Unter einer *m-dimensionalen Mannigfaltigkeit* verstehen wir in diesem Raum eine Gesamtheit von Punkten, deren Koordinaten sich durch m willkürliche Parameter ausdrücken lassen $(m \leq n)$:

$$x_k = x_k(t_1, \dots, t_m), \qquad u = u(t_1, \dots, t_m) \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dabei nehmen wir an, daß sich jeweils m dieser Gleichungen nach $t_1, \dots, t_m$ auflösen lassen. Für $m = n$ ergibt sich eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die wir eine Fläche nennen. Benutzen wir die Größen $x_1, \dots, x_n$ als Parameter, so haben wir eine explizite Gleichung für die Fläche in der Form $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Diese Gestalt muß gerade die Gleichung einer Integralfläche der Differentialgleichung (16) haben. Für $m = 1$ heißt die entsprechende eindimensionale Mannigfaltigkeit eine Kurve des $(n+1)$-dimensionalen Raumes.

Die Charakteristiken der Differentialgleichung (16) definieren wir durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k(x_1, \dots, x_n, u), \qquad \frac{du}{ds} = c(x_1, \dots, x_n, u), \tag{17}$$

in dem s einen Parameter bezeichnet. Jede Lösung dieser Gleichungen, mit Ausnahme der Lösungen, in denen alle x_k und u konstant sind, liefert eine Kurve des $(n+1)$-dimensionalen Raumes. Eine Lösung, in der alle x_k und u konstant sind, kann aber wegen $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$ nicht existieren. Die Koordinaten dieser Kurven lassen sich durch den Parameter s ausdrücken. Um aus diesen Kurven eine Fläche zu konstruieren, müssen wir von einer Kurvenschar ausgehen, die von $n-1$ willkürlichen Parametern abhängt. Im allgemeinen erhält man daraus eine Gesamtheit von Punkten, die von n Parametern abhängt. *Wenn eine glatte Fläche* $u = u(x_1, \dots, x_n)$ *von einer Schar von Charakteristiken erzeugt wird, die von $n-1$ Parametern abhängt, ist sie eine Integralfläche der Gleichung* (16). Denn differenzieren wir $u(x_1, \dots, x_n)$ nach s und benutzen die Differentialgleichungen (17), so erhalten wir

$$\frac{du}{ds} = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} a_k .$$

Auf Grund der letzten Differentialgleichung (17) folgt aber hieraus die Differentialgleichung (16). Umgekehrt *kann jede glatte Integralfläche* $u = u(x_1, \dots, x_n)$ *von einer Schar von Charakteristiken erzeugt werden, die von $n-1$ Parametern abhängt.* Denn ist eine Integralfläche $u = u(x_1, \dots, x_n)$ gegeben, so können wir die x_k aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{18}$$

bestimmen, das uns $n-1$ willkürliche Konstanten liefert. Die willkürliche Konstante, die additiv zu s hinzutritt, spielt keine wesentliche Rolle. Setzen wir die Lösung des Differentialgleichungssystems (18) in die rechte Seite von $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ ein, differenzieren nach s und benutzen die Differentialgleichungen (16) und (18), so finden wir, daß u die letzte der Differentialgleichungen (17) erfüllt.

Wie in [2] nehmen wir an, daß die Funktion $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ und die Funktionen auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (17) stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Das Cauchysche Problem für die Differentialgleichung (16) besteht in der Bestimmung derjenigen Integralfläche, die eine vorgegebene $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_k = x_k(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u = u(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

enthält; dabei sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen in einem Bereich D des $(n-1)$-dimensionalen Raumes der $t_1, \ldots, t_{n-1}$ stetig sein und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Wir setzen voraus, daß der Rang der Matrix, die aus den Ableitungen $\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$ besteht, gleich $n-1$ ist und daß verschiedenen Systemen von Werten $t_1, \ldots, t_{n-1}$ verschiedene Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ entsprechen. Weiterhin setzen wir, wie bereits erwähnt wurde, voraus, daß die Koeffizienten $a_k(x_1, \ldots, x_n, u)$ und $c(x_1, \ldots, x_n, u)$ in einem Bereich des Raumes, der die Mannigfaltigkeit (19) im Innern enthält, stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Insbesondere kann die Anfangsbedingung beim Cauchyschen Problem darin bestehen, daß die gesuchte Funktion u für einen vorgegebenen Wert einer unabhängigen Veränderlichen als Funktion der übrigen Veränderlichen gegeben ist,

$$u|_{x_1 = x_1^{(0)}} = \varphi(x_2, \ldots, x_n). \tag{20}$$

Die Lösung des Problems erfolgt wie im Fall zweier unabhängiger Veränderlicher. Die Ausdrücke (19) benutzen wir als Anfangsbedingungen bei der Integration des Differentialgleichungssystems (17). Damit erhalten wir eine Lösung der Gestalt

$$x_k = x_k(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{21}$$

Im folgenden spielt die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{22}$$

eine wesentliche Rolle, die wir mit Hilfe der Differentialgleichungen (17) in der Gestalt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{23}$$

schreiben können. Ist diese Determinante auf der Mannigfaltigkeit (19), d. h. für $s=0$, von 0 verschieden, so lassen sich die ersten n Gleichungen von (21) nach $s, t_1, \dots, t_{n-1}$ auflösen. Setzen wir diese Lösung in die letzte der Gleichungen (21) ein, so erhalten wir eine Integralfläche der Differentialgleichung (16). In diesem Fall kann das Cauchysche Problem keine weiteren Lösungen besitzen. Dies alles läßt sich ebenso beweisen wie im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher.

Nun betrachten wir den Fall, daß die Anfangsbedingung die Form (20) hat, und nehmen an, daß die $x_2, \dots, x_n$ jetzt die Rolle der Parameter $t_1, \dots, t_{n-1}$ spielen. Dabei wollen wir noch voraussetzen, daß die Differentialgleichung linear und die Determinante (23) auf unserer Mannigfaltigkeit von 0 verschieden ist. Wegen $\frac{\partial x_p}{\partial x_q}=0$ für $p \neq q$ und $\frac{\partial x_p}{\partial x_p}=1$ ergibt sich $\Delta = a_1 \neq 0$. Dividieren wir die Differentialgleichung durch den Koeffizienten a_1, so gelangen wir zu der Differentialgleichung

$$p_1 + a_2(x_1, \dots, x_n)\, p_2 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)\, p_n = b(x_1, \dots, x_n)\, u + c(x_1, \dots, x_n). \tag{24}$$

Wir setzen noch voraus, daß die Koeffizienten a_k, b und c für $\alpha \leq x_1 \leq \beta$ und beliebige reelle Werte von $x_2, \dots, x_n$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x_2, \dots, x_n$ besitzen und daß ferner die Koeffizienten für diese Werte der Veränderlichen beschränkt sind: $|a_k| \leq M$, $|b| \leq M$, $|c| \leq M$.

Wählen wir x_1 als unabhängige Veränderliche, so können wir das Differentialgleichungssystem (17) in der Gestalt

$$\frac{dx_k}{dx_1} = a_k(x_1, \dots, x_n) \qquad (k = 2, \dots, n), \tag{25}$$

$$\frac{du}{dx_1} = b(x_1, \dots, x_n)\, u + c(x_1, \dots, x_n) \tag{26}$$

schreiben.

Es sei $x_1^{(0)}$ ein Anfangswert von x_1 aus dem Intervall $[\alpha, \beta]$. Wir integrieren das Differentialgleichungssystem (25) mit beliebigen Anfangsbedingungen

$$x_k|_{x_1 = x_1^{(0)}} = x_k^{(0)} \qquad (k = 2, \dots, n).$$

Aus $|a_k| \leq M$ folgt, daß die Lösungsfunktionen x_k des Differentialgleichungssystems (25) beschränkte Ableitungen besitzen, $\left|\frac{dx_k}{dx_1}\right| \leq M$. Damit bleiben auch die Lösungen x_k selbst dem absoluten Betrag nach beschränkt: $|x_k - x_k^{(0)}| \leq M(\beta - \alpha)$. Durch Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation [II, 51] können wir uns leicht davon überzeugen, daß die Lösungen

$$x_k = \varphi_k(x_1, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \qquad (k = 2, \dots, n) \tag{27}$$

auf dem ganzen Intervall $\alpha \leq x_1 \leq \beta$ für beliebige Anfangswerte $x_k^{(0)}$ $(k = 2, \dots, n)$ existieren. Wir können sagen, daß diejenige Integralkurve, die durch den Punkt $A_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ geht, auch den Punkt $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ enthält, dessen Koordinaten durch (27) bestimmt sind. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes gilt: Wählen wir den Punkt A als Anfangspunkt, so geht die zugehörige Integralkurve durch den Punkt A_0. Hieraus folgt, daß die Gleichungen (27) für beliebige x_1 nach $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ auflösbar sind, wobei die Lösungen die Gestalt

$$x_k^{(0)} = \psi_k(x_1^{(0)}, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (k = 2, \dots, n) \tag{27$_1$}$$

haben.