

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL V

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I

unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 449 Seiten, 190 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5574-3, Europa-Nr. 55743

Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II

unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5576-7, Europa-Nr. 55767

Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale. Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1

12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5578-1, Europa-Nr. 55781

Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2

unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5580-4, Europa-Nr. 55804

Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1

unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5582-8, Europa-Nr. 55828

Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5584-2, Europa-Nr. 55842

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V

unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 545 Seiten, 3 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5586-6, Europa-Nr. 55866

Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

ISBN 978-3-8085-5572-9, Europa-Nr. 55729



Edition
Harri 
Deutsch 

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

TEIL V

VON

W. I. SMIRNOW

11. Auflage 1991

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselderger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55866

Titel der Originalausgabe

В. И. Смирнов

Курс высшей математики, Том 5

Физматгиз, Москва 1959

Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten Renate Helle und Brigitte Mai.

Unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991

Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5586-6

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,
42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagbild basierend auf einer Abbildung aus dem Buch „Höhere Mathematik“
von Prof. Dr. Karlheinz Spindler

Druck: winterwork, 04451 Borsdorf

Aus dem Vorwort zur russischen Ausgabe

In der modernen mathematischen Physik sind die Funktionen einer reellen Veränderlichen, verschiedene Funktionenräume und die allgemeine Theorie der Operatoren von großer Bedeutung. Diesen Fragen ist im wesentlichen das vorliegende Buch gewidmet, das aus der im Jahre 1947 erschienenen ersten Auflage entstanden ist.

Die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen in diesem Buch umfaßt die Theorie des klassischen Stieltjesschen Integrals, des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals und die Theorie der volladditiven Mengenfunktionen.

Im ersten Kapitel ist die Theorie des klassischen Stieltjesschen Integrals dargestellt. Ferner wird eine allgemeinere Definition des Stieltjesschen Integrals über ein Intervall beliebiger Art angegeben; diese Definition basiert auf der Übereinstimmung des entsprechenden oberen und unteren Darbouschen Integrals bei der Zerlegung des Grundintervalls in beliebige Teilintervalle. Als Beispiel für das klassische Stieltjessche Integral werden die Fourier-Stieltjesschen und die Cauchy-Stieltjesschen Integrale betrachtet und für diese Integrale Umkehrformeln aufgestellt. Auch wird das Stieltjessche Integral für den Fall einer Ebene definiert. Wir studieren ferner den Raum C der stetigen Funktionen und geben die allgemeine Form der linearen Funktionalen auf diesem Raum an.

Das zweite Kapitel enthält Grundzüge der metrischen Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen und die Grundlagen des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals. Die ganze Theorie wird im Fall der Ebene erklärt, und es wird gezeigt, wie diese Theorie auf den n -dimensionalen euklidischen Raum übertragen werden kann. Die Maßtheorie wird für eine beliebige, nichtnegative, additive und normale Funktion aufgebaut, die auf halboffenen zweidimensionalen Intervallen gegeben ist. Das Lebesgue-Stieltjessche Integral einer beschränkten Funktion wird definiert mit Hilfe der Übereinstimmung des oberen und des unteren Darbouschen Integrals bei Zerlegung der zugrunde gelegten meßbaren Menge in meßbare Teilmengen. Am Schluß des zweiten Kapitels wird ausführlich auf den Prozeß der Mittelung von Funktionen und auf die Eigenschaften der Mittelfunktionen unter gewissen Forderungen für den Mittelungskern eingegangen. Dieser Prozeß wird im weiteren Verlauf der Ausführungen oft benutzt.

Im dritten Kapitel werden die volladditiven Mengenfunktionen behandelt. Nach dem Beweis des ersten Satzes dieser Theorie wird (zunächst ohne Beweis) ein Satz angegeben, der die Zerlegung einer volladditiven Mengenfunktion in einen singulären und in einen absolut stetigen Summanden betrifft, und die mit dieser Zerlegung verknüpften grundlegenden Tatsachen werden erinnert. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen wird eingehend untersucht. Im allgemeinen Fall betrachten wir eine absolut stetige Mengenfunktion und geben eine Formel für die Variationsabszision in nichtreduzierten Lebesgue-Stieltjesschen Integral an. Am Schluß des dritten Kapitels wird dann der Satz über die Zerlegung einer volladdi-

tiven Mengenfunktion in zwei Sätzen bewiesen. Für den mehrdimensionalen Fall führen wir dann den Begriff des Hellinger'schen Integrals ein und untersuchen seine Eigenschaften. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen dem Hellinger'schen und dem Lebesgue-Stieltjes'schen Integral erwähnt und auf den Fall des eindimensionalen Hellinger'schen Integrals ausführlich eingegangen. Sämtliche am Schluß dieses Kapitels geführten Beweise stützen sich auf die vorübergehenden Untersuchungen der Eigenschaften volladditiver Mengenfunktionen [78, 79].

Das vierte Kapitel enthält die Grundzüge der Theorie der metrischen und der normierten Räume und außerdem eine ausführliche Behandlung der verallgemeinerten Ableitungen, der Einbettungssätze für verschiedene Funktionenräume und der Theorie der Funktionale im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen. Diese Fragen sind mit den bekannten Sobolew'schen Untersuchungen verknüpft.¹⁾ Die verallgemeinerten Ableitungen werden zweifach definiert, und zwar mit Hilfe der Formel für die partielle Integration und durch das Abschließen der Funktionen mit stetigen Ableitungen, wobei dann die Äquivalenz dieser beiden Definitionen nachgewiesen wird. Der Fall sternförmiger Gebiete wird gesondert betrachtet. Ferner werden die vollständigen normierten Funktionenräume $W_p^{(k)}(D)$ und $W_2^{(k)}(D)$ eingeführt; der Raum $W_p^{(k)}(D)$ besteht aus denjenigen Funktionen $\varphi(x)$, die in einem Gebiet D definiert sind und verallgemeinerte k -te Ableitungen haben, wobei $\varphi(x)$ selbst allen Ableitungen zu $L_p(D)$ gehört; der Raum $W_2^{(k)}(D)$ enthält diejenigen Funktionen $\varphi(x)$, die alle verallgemeinerten Ableitungen bis einschließlich k -ter Ordnung besitzen. Dann wird gezeigt, daß die Räume $W_p^{(k)}(D)$ und $W_2^{(k)}(D)$ für eine umfangreiche Klasse von Gebieten D ein und dieselben Funktionen enthalten und daß die in ihnen eingeführten Normen äquivalent sind. Ferner lassen sich für den Raum $W_p^{(k)}(D)$ verhältnismäßig einfache Sätze beweisen, die Spezialfälle der Einbettungssätze für $W_2^{(k)}(D)$ sind. Nach der Formulierung der Einbettungssätze wird (in Kleindruck) ihr Beweis mit Hilfe der Sobolew'schen Integraldarstellung angegeben. Der hier behandelte Stoff faßt sich auch in der in der Fußnote zitierten Monographie.

Das fünfte und letzte Kapitel bringt die allgemeine Theorie des Hilbert'schen Raumes (zunächst nur für beschränkte Operatoren). Hier werden die Fredholm'schen Sätze für lineare Gleichungen mit vollstetigen Operatoren bewiesen; für normierte Räume sind diese Sätze ohne Beweis notiert. Ferner werden für selbstadjungierte Operatoren auf einem kontinuierlichen Spektrum die entsprechenden Integraldarstellungen durch Differentiallösungen mit Hilfe von Hellinger'schen Integralen angegeben und Beispiele für die Anwendung der allgemeinen Theorie der beschränkten Operatoren aus l_2 und L_2 betrachtet. Der letzte Paragraph dieses Kapitels ist der Theorie der nicht beschränkten Operatoren im Hilbert'schen Raum gewidmet. Nachdem die allgemeinen Sätze bewiesen sind, werden zahlreiche Beispiele für Differentialoperatoren mit einer und mit mehreren unabhängigen Veränderlichen angegeben. Nach der allgemeinen Theorie der Erweiterungen abgeschlossener symmetrischer Operatoren werden speziell halb- h -beschränkte Operatoren und insbesondere ihre Friedrich'sche Erweiterung untersucht.

Bei der Zusammenstellung dieses Buches habe ich außer speziellen Arbeiten mehrere Bücher benutzt, in der Hauptsache: W. I. GLEWENKO, Das Stieltjes'sche Inte-

¹⁾ Vgl. S. L. SOBOL'EV, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik. In dieser Monographie werden die hier erwähnten Fragen behandelt (Bezüglich des Erscheinungsortes und Jahres dieses Buches muß wegen der beschränkten Zahl der Werke auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Buches.)

gral, I. P. NATANSON, Theorie der Funktionen einer zweiten Veranderlichen; S. SAKS, Théorie de l'intégrale. Cf. DE LA VALLEE-POISSON, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire; M. H. STONE, Linear transformation in Hilbert space and their applications to analysis; N. I. ACHESER und I. M. GLASMAN, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum; A. I. PUGSNER, Spektraltheorie der linearen Operatoren I; N. I. ACHESER, Unendliche Jacobische Matrizen und das Momentenproblem; S. L. SONOLEW, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik.

Abschließend möchte ich Herrn S. M. LOSISSKI danken, der das ursprüngliche Manuskript gelesen und mir eine Reihe wertvoller Hinweise gegeben hat. Mehrere Darlegungen im zweiten Teil dieses Buches stammen von Frau G. A. LAUVSTENSKAYA, die den ersten Teil mitgearbeitet hat und mit der ich den Aufbau des Buches eingehend erörtert habe. Eine große Hilfe bei der Zusammenstellung des zweiten Teils erwies mir auch Herr M. S. BERMAN. Von ihm stammen die Ausführungen über die Einbettungssätze [114–118] und die Theorie der kleinen Störungen des Spektrums [198]. Wertvolle Ratschläge gab er mir für die Spektren symmetrischer Operatoren und deren Erweiterungen sowie für die Darlegung des Stoffes im vierten Kapitel. Meinen tiefen Dank möchte ich hierfür Frau LAUVSTENSKAYA und Herrn BERMAN aussprechen; ohne ihre Hilfe hätte ich die Arbeit nicht durchführen können. Die ersten drei Kapitel sind auch von Herrn G. P. AKHLOW gelesen worden, von dem ich viele Hinweise erhielt und dem ich hiermit sehr dafür danke.

Leningrad, 20. Juli 1959

W. SPTIKOW

Hinweis

Die Rückverweise auf die Teile III:2, IV:1 und IV:2 beziehen sich auf meine überarbeitete russische Ausgaben in den sebziger und achtziger Jahren. Deutschsprachige Ausgaben der Teile IV:1 und IV:2 erschienen 1988 bzw. 1989, die des Teiles III:2 ist in Vorbereitung.

Inhalt

I. Das Stieltjesche Integral

1. Mengen und ihre Mächtigkeit	15
2. Das Stieltjesche Integral und seine Haupteigenschaften	17
3. Darbousche Summen	21
4. Das Stieltjesche Integral einer stetigen Funktion	24
5. Das uneigentliche Stieltjesche Integral	27
6. Die Sprungfunktion	29
7. Physikalische Interpretation	32
8. Funktionen von beschränkter Variation	33
9. Integrierbare Funktionen von beschränkter Variation	38
10. Existenz des Stieltjeschen Integrals	39
11. Grenzübergang unter dem Stieltjeschen Integral	40
12. Satz von HENRY	42
13. Das Auswahlprinzip	45
14. Der Raum der stetigen Funktionen	47
15. Die allgemeine Form der Funktionale in C	48
16. Lineare Operatoren in C	52
17. Intervallfunktionen	53
18. Das selbige neue Stieltjesche Integral	55
19. Eigenschaften des allgemeinen Stieltjeschen Integrals	57
20. Existenz des allgemeinen Stieltjeschen Integrals	60
21. Intervallfunktionen in der Ebene	62
22. Übergang zur Punktfunktion	65
23. Das Stieltjesche Integral in der Ebene	67
24. Funktionen von beschränkter Variation in der Ebene	68
25. Der Raum der stetigen Funktionen reeller Variablen	71
26. Das Fubini-Stieltjesche Integral	71
27. Die Umkehrformel	74
28. Der Faltungssatz	76
29. Das Cauchy-Stieltjesche Integral	79

II. Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral

§ 1. Mengenfunktionen und Maßtheorie	82
30. Mengengeräte	82
31. Punktengen	85
32. Eigenschaften abgeschlossener und offener Mengen	86
33. Elementarbereiche	89
34. Das äußere Maß mit seine Eigenschaften	92
35. Meßbare Mengen	94
36. Meßbare Mengen (Fortsetzung)	101

14) Inhalt	
37. Meßbarkeitskriterien	102
38. Mengenkörper	104
39. Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems	106
40. Der Körper \mathbb{R}	107
41. Der Fall einer Veränderlichen	108
§ 2. Meßbare Funktionen	109
42. Die Definition der meßbaren Funktionen	109
43. Eigenschaften der meßbaren Funktionen	112
44. Der Grenzwert meßbarer Funktionen	113
45. Die Eigenschaft C	117
46. Stetigweise konstante Funktionen	117
47. Die Borelschen Klassen	119
§ 3. Das Lebesgue-Meßintegral	120
48. Das Integral beschränkter Funktionen	120
49. Eigenschaften des Integrals	123
50. Das Integral von unbeschränkten, nichtnegativen Funktionen	126
51. Eigenschaften des Integrals	129
52. Funktionen beliebigen Vorzeichens	131
53. Komplexe summierbare Funktionen	135
54. Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen	136
55. Die Klasse L_1	139
56. Konvergenz im Mittel	141
57. Der Hilbertsche Funktionenraum	144
58. Orthogonale Funktionensysteme	146
59. Der Raum l_2	150
60. Lineare Unabhängigkeiten in L_2	152
61. Beispiele für vollständige Systeme	155
62. Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung	156
63. Das Integral über eine Menge unendlichen Maßes	160
64. Die Klasse L_1 auf einer Menge unendlichen Maßes	164
65. Integrierbare Funktionen von beschränkter Variation	166
66. Die Reduktion mehrfacher Integrale	168
67. Der Fall einer charakteristischen Funktion	170
68. Der Satz von FUBINI	173
69. Das Vorzeichen der Richtigkeit der Integration	176
70. Die Stetigkeit im Mittel	177
71. Mittelfunktionen	179

III. Mengenfunktionen, Absolute Stetigkeit, Verallgemeinerung des Integralbegriffs

72. Additive Mengenfunktionen	185
73. Die additive Funktion	188
74. Der Fall einer Veränderlichen	190
75. Absolut stetige Mengenfunktionen	191
76. Beispiel	199
77. Absolut stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher	201
78. Hilfsätze	203
79. Hilfsätze (Fortsetzung)	207
80. Hauptatz	211

81. Das Hellinger'sche Integral	214
82. Der Fall einer Veränderlichen	217
83. Eigenfunktionen des Hellinger'schen Integrals	220

IV. Metrische und normierte Räume

84. Der metrische Raum	224
85. Vervollständigung eines metrischen Raumes	226
86. Operatoren und Funktionale. Das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen	230
87. Beispiele	231
88. Beispiele für die Anwendung des Prinzips der kontrahierenden Abbildungen	234
89. Kompaktheit	236
90. Kompaktheit im Raum C	239
91. Kompaktheit im Raum L_p	238
92. Kompaktheit im Raum l_p	241
93. Funktionale auf in sich kompakten Mengen	242
94. Separabilität	243
95. Lineare normierte Räume	245
96. Beispiele für normierte Räume	248
97. Operatoren in normierten Räumen	249
98. Lineare Funktionale	251
99. Konjugierte Räume	254
100. Schwache Konvergenz von Funktionalen	257
101. Schwache Konvergenz von Elementen	259
102. Lineare Funktionale in den Räumen C , l_p und l_p	262
103. Schwache Konvergenz in den Räumen C , L_p und l_p	268
104. Der Raum der linearen Operatoren und die Konvergenz von Operatorfolgen	269
105. Adjungierte Operatoren	271
106. Vollstetige Operatoren	271
107. Operatorengleichungen	272
108. Vollstetige Operatoren in den Räumen C , L_p und l_p	274
109. Verallgemeinerte Ableitungen	277
110. Verallgemeinerte Ableitungen (Fortsetzung)	281
111. Sternförmige Gebiete	283
112. Die Räume $W_p^{(1)}$ und $W_p^{(2)}$	284
113. Eigenschaften der Funktionen aus der Klasse $W_p^{(1)}(D)$	286
114. Einbettungssätze	292
115. Integraloperatoren mit polaren Kernen	295
116. Sobolew'sche Integraldarstellungen	300
117. Einbettungssätze	304
118. Gebiete allgemeinen Art	308
119. Der Raum $C^{(2)}(D)$	307

V. Der Hilbert'sche Raum

§ 1. Die Theorie der beschränkten Operatoren	317
120. Die Axiome des Raumes	317
121. Orthogonalität und Orthogonalsysteme von Elementen	319
122. Die Projektion	322

123. Lineare Funktionale	324
124. Lineare Operatoren	326
125. Bilinear und quadratische Funktionale	329
126. Die Grenzen eines selbstadjungierten Operators	330
127. Der inverse Operator	332
128. Das Spektrum eines Operators	335
129. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators	337
130. Die Resolvente	341
131. Folgen von Operatoren	341
132. Schwache Konvergenz	342
133. Vollstetige Operatoren	344
134. Die Räume H und h	346
135. Lineare Gleichungen mit vollstetigen Operatoren	348
136. Vollstetige selbstadjungierte Operatoren	352
137. Unitäre Operatoren	358
138. Die absolute Norm eines Operators	359
139. Operatoren über Unterräumen	361
140. Projektionsoperatoren	362
141. Zerlegung der Einheits- Das Stieltjes'sche Integral	366
142. Die Spektraltheorie eines selbstadjungierten Operators	371
143. Stetige Funktionen eines selbstadjungierten Operators	372
144. Eine Formel für die Resolvente. Die Charakterisierung der regulären Werte von A	375
145. Eigenwerte und Eigenräume	377
146. Das reelle Punktspektrum	378
147. Das einfache kontinuierliche Spektrum	379
148. Unzerlegte Unterräume	384
149. Der allgemeine Fall eines kontinuierlichen Spektrums	386
150. Das gemischte Spektrum	388
151. Differentialgleichungen	389
152. Die Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen	392
153. Unitär äquivalente selbstadjungierte Operatoren	394
154. Die Spektralüberlegung unitärer Operatoren	395
155. Funktionen eines selbstadjungierten Operators	396
156. Vertauschbare Operatoren	399
157. Störung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators	400
158. Normale Operatoren	402
159. Hilfesatz	404
160. Die Potenzreihe eines Operators	407
161. Die Spektraltheorie	408
§ 2. Die Räume l_1 und l_2	411
162. Lineare Operatoren im Raum l_1	411
163. Beschränkte Operatoren	412
164. Unitäre Matrizen und Projektionsoperatoren	416
165. Selbstadjungierte Matrizen	417
166. Das kontinuierliche Spektrum	419
167. Jacobische Matrizen	423
168. Differentialgleichungen	425
169. Beispiele	427
170. Schwache Konvergenz im Raum l_2	430
171. Vollstetige Operatoren im Raum l_2	430
172. Integralsoperatoren im Raum l_2	431
173. Der adjungierte Operator	433
174. Vollstetige Operatoren	434

175. Die Spektraltheorie	435
176. Die Spektraltheorie (Fortsetzung)	436
177. Unitäre Transformationen im Raum L_2	438
178. Fouriertansformationen	440
179. Fouriertansformationen und Hermitesche Funktionen	443
180. Die Operation der Multiplikation	444
181. Differenzkerne	446
182. Schwache Konvergenz	450
183. Andere Beschreibungen des Raumes H	450
§ 3. Nichtbeschränkte Operatoren	451
184. Abgeschlossene Operatoren	451
185. Der adjungierte Operator	453
186. Der Graph eines Operators	455
187. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren	457
188. Beispiele für nichtbeschränkte Operatoren	459
189. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators	468
190. Das Punktspektrum	471
191. Invariante Unterräume und Reduzibilität eines Operators	472
192. Zerlegung der Einheit. Das Stieltjesche Integral	475
193. Stetige Funktionen eines selbstadjungierten Operators	480
194. Die Resolvente	481
195. Eigenwerte	483
196. Das getrennte Spektrum	483
197. Funktionen eines selbstadjungierten Operators	485
198. Kleine Störungen des Spektrums	487
199. Der Operator der Multiplikation	489
200. Integraloperatoren	492
201. Erweiterung eines abgeschlossenen symmetrischen Operators	495
202. Defektindizes	498
203. Der adjungierte Operator	501
204. Maximale Operatoren	503
205. Erweiterung symmetrischer halbbeschränkter Operatoren	504
206. Vergleich halbbeschränkter Operatoren	508
207. Beispiele aus der Theorie der Erweiterungen	510
208. Das Spektrum eines symmetrischen Operators	512
209. Einige Sätze über Erweiterungen und ihre Spektren	514
210. Die Umblutbarkeit der Defektindizes von λ	516
211. Über die Invarianz des kontinuierlichen Teils des Kerns bei symmetrischen Erweiterungen	518
212. Über die Spektren selbstadjungierter Erweiterungen	519
213. Beispiele	519
214. Unerlöbte Matrizen	520
215. Jacobi'sche Matrizen	522
216. Matrizen und Operatoren	526
217. Unitäre Äquivalenz von C -Matrizen	528
218. Die Existenz einer Spektraltheorie	530

Literaturhinweise	531
------------------------------------	------------

Namen- und Sachverzeichnis	540
---	------------

I. Das Stieltjessche Integral

1. Mengen und ihre Mächtigkeit. Bei der Anwendung der Analysis in der modernen Naturwissenschaft spielen mehrere Integrallbegriffe eine große Rolle. In den ersten beiden Kapiteln dieses Bandes wird die Integrationslehre unter einem allgemeineren Gesichtspunkt als früher behandelt. In diesem Abschnitt bringen wir zur Vorbereitung einige grundsätzliche Ausführungen aus der Mengenlehre. Sie bilden in gewisser Weise eine Ergänzung zu dem in [IV/1, 15] Gesagten.

Gegeben seien zwei aus irgendwelchen Objekten (Elementen) bestehende Mengen A_1 und A_2 . Die Mengen heißen von gleicher Mächtigkeit, wenn sich die Elemente von A_1 und die Elemente von A_2 einindeutig einander zuordnen lassen, d. h., wenn jedem Element von A_1 ein einziges Element von A_2 zugeordnet werden kann und umgekehrt jedem Element aus A_2 ein und nur ein Element aus A_1 entspricht. Eine unendliche Menge (d. h. eine Menge, die unendlich viele Elemente enthält) heißt abzählbar, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge aller natürlichen Zahlen, d. h., wenn die Elemente dieser Menge mit Hilfe der natürlichen Zahlen nummeriert werden können a_1, a_2, a_3, \dots . Zwei abzählbare Mengen haben die gleiche Mächtigkeit.

Wir leiten nun einige Eigenschaften abzählbarer Mengen her. Es sei p_1, p_2, p_3, \dots eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Wir wählen aus einer abzählbaren Menge eine unendliche Teilmenge aus, die aus den Elementen $a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, \dots$ besteht. Die Elemente dieser neuen Menge kann man ebenfalls nummerieren. Nummer eines jeden Elementes ist die bei p stehende Indizeszahl. Mit anderen Worten, die Elemente werden mit den wachsenden Indizes p_1, p_2, \dots nummeriert. Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist also wieder eine abzählbare Menge. Wir betrachten jetzt zwei abzählbare Mengen: die aus den Elementen a_1, a_2, a_3, \dots bestehende Menge $A(a_1, a_2, a_3, \dots)$ und die aus den Elementen b_1, b_2, b_3, \dots bestehende Menge $B(b_1, b_2, b_3, \dots)$.

Wir bilden die Summe der beiden Mengen, d. h., wir vereinigen zu einer einzigen Menge C alle Elemente, die zu einer der beiden obigen Mengen gehören. Die so erhaltene neue Menge C nennt man gewöhnlich *Summe*¹⁾ der Mengen A und B ; sie ist ebenfalls abzählbar. Man braucht die Elemente von C beispielsweise nur in der Reihenfolge $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ anzuordnen, um sich von der Abzählbarkeit zu überzeugen. Wenn gleiche Elemente a_i, b_j auftreten, kann man eines von ihnen beibehalten und die übrigen streichen. Analoges gilt auch für die Summe endlich vieler abzählbarer Mengen, d. h., die Summe endlich vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Wir nehmen nun an, es seien abzählbar viele abzählbare Mengen gegeben. Die Elemente aller dieser Mengen bezeichnet man mit einem Buchstaben mit zwei

¹⁾ In der deutschen Literatur spricht man auch häufig von der Vereinigung der Mengen A und B (Anm. d. Red.).

ganzähnlichen Indizes: a_i^j . Der obere Index gibt die Nummer der Menge an, zu der das Element gehört, der untere Index die Nummer des Elementes in dieser abzählbaren Menge, zu der es gehört. Es ist nicht schwer, alle Elemente a_i^j zu nummerieren. Als erstes Element nehmen wir dasjenige, bei dem beide Indizes gleich 1 sind: a_1^1 . Dann nehmen wir die Elemente, bei denen die Summe der Indizes gleich 2 ist, und ordnen sie nach wachsendem oberem Index. Wir erhalten so das zweite Element a_2^1 und das dritte Element a_1^2 . Wir wählen nun die Elemente, bei denen die Summe der Indizes gleich 3 ist, und ordnen sie nach wachsendem oberem Index: a_3^1 , a_2^2 , a_1^3 . Dadurch erhalten wir das vierte, fünfte und sechste Element. Dieses Verfahren lehrt, daß die Summe von abzählbar vielen abzählbaren Mengen wieder eine abzählbare Menge ist. Diese Behauptung gilt offenbar auch, wenn einige der zu summierenden Mengen nicht abzählbare, sondern endliche Mengen sind.

Es sei jetzt eine unendliche Menge A gegeben. Wir wählen aus A ein beliebiges Element und ordnen ihm die Nummer 1 zu. Die übrigbleibende Menge ist auch wie vor unendlich. Wir wählen aus ihr ein weiteres Element aus und ordnen ihm die Nummer 2 zu. Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, sehen wir, daß auf diese Weise von jeder unendlichen Menge eine abzählbare Menge abspalten werden kann. Die nach einer solchen Abspaltung übrigbleibende Menge kann entweder leer sein (d. h., sie braucht kein einziges Element zu enthalten), oder sie kann endlich bzw. unendlich sein. Wir zeigen, ist die übrigbleibende Menge unendlich, so hat sie die gleiche Mächtigkeit wie die ursprüngliche Menge, d. h., es gilt die folgende Behauptung: Wenn beim Abspalten einer abzählbaren Menge P von der unendlichen Menge A eine unendliche Menge B übrigbleibt, dann haben die Mengen A und B die gleiche Mächtigkeit. Wir spalten von der unendlichen Menge B nochmals eine abzählbare Menge Q ab, und es sei C die übrigbleibende Menge. Die ursprüngliche Menge A wird also in drei Mengen zerlegt, $A = P + Q + C$, von denen die Menge C auch leer oder unendlich sein kann und die Mengen P und Q abzählbar sind. Vor der zweiten Abspaltung war $A = P + B$. Es ist nicht schwierig, die Elemente von A und B einindeutig miteinander zuzuordnen. In der Tat gilt $A = P + Q + C$ und $B = Q + C$. Die Menge $P + Q$ ist als Summe abzählbarer Mengen wieder abzählbar, daher kann man die Elemente von $P + Q$ und Q einindeutig einander zuordnen. Jedes Element der Menge C wird sich selbst zugeordnet. Auf diese Weise entsteht eine einindeutige Zuordnung der Elemente von A und B . Aus dem selben Beweisen folgt unmittelbar: Wenn man zu einer unendlichen Menge eine abzählbare Menge addiert, dann hat die so erhaltene Menge die gleiche Mächtigkeit wie die ursprüngliche Menge. Diese beiden Behauptungen über die Subtraktion und Addition einer abzählbaren Menge gelten auch, wenn man die abzählbare Menge durch eine endliche Menge ersetzt. Das kann man genauso beweisen.

Wir haben früher gezeigt (IV/1.15), daß die Menge der in einem Intervall $[a, b]$ liegenden rationalen Zahlen sowie die Menge aller rationalen Zahlen abzählbar ist. Das läßt sich auf dieselbe Art beweisen wie die Behauptung, daß die Summe von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar ist. Den oberen Index entsprechen jetzt die Zähler, den unteren Index die Nenner der Brüche. Dabei betrachtet man zuerst nur die positiven Brüche. Wir bringen nun ein Beispiel für eine nicht abzählbare Menge. Wir betrachten alle reellen Zahlen im Intervall $(0, 1]$. Jede dieser Zahlen, mit Ausnahme der Null, läßt sich als unendlicher Dezimalbruch mit verschwindendem ganzen Anteil darstellen. Umgekehrt läßt sich jedem solchen Dezimalbruch eine gewisse reelle Zahl aus dem Intervall $(0, 1]$ zuordnen. Mit endlichen Dezimalbrüchen beschäftigen wir uns nicht, weil sie dieselben Zahlen dar-

stellen wie unendliche Dezimalbrüche mit der Periode 9, etwa $0,37 = 0,36999\dots$. Wir beweisen nun indirekt, daß die Menge dieser reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Wir nehmen an, daß wir alle betrachteten Dezimalbrüche samt dem Dezimalbruch $0,00\dots$, der dem linken Endpunkt des Intervalls entspricht, nummerieren können. Wir bilden nun folgendermaßen einen neuen Dezimalbruch mit verschwindendem ganzem Anteil. Als erste Ziffer nach dem Komma wählen wir irgendeine Ziffer, die von der ersten nach dem Komma stehenden Ziffer des ersten der nummerierten Dezimalbrüche verschieden ist, als zweite Ziffer wählen wir irgendeine Ziffer, die von der zweiten Ziffer des zweiten der nummerierten Dezimalbrüche verschieden ist, usw. Die Zahl 10 wird dabei nicht verwendet. Es ergibt sich ein unendlicher Dezimalbruch, der von allen nummerierten Dezimalbrüchen verschieden ist. Also ist die ihm entsprechende reelle Zahl noch nicht nummeriert worden, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht, daß alle reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nummeriert worden seien. Wir haben also bewiesen, daß die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nicht abzählbar ist. Man sagt, diese Menge habe die *Mächtigkeit des Kontinuums*. Man sieht leicht, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebigen endlichen Intervall (a, b) offenbar die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ hat, denn die Elemente der beiden Mengen können durch die Relation $y = \frac{x-a}{b-a}$ einindeutig einander zugeordnet werden. Wenn die Veränderliche x das Intervall $[a, b]$ durchläuft, durchläuft die Veränderliche y das Intervall $[0, 1]$. Wenn wir die Relation $y = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ benutzen, so durchläuft bei der Variation von x innerhalb von $[0, 1]$ die Veränderliche y die Menge aller reellen Zahlen, d. h., die Menge aller reellen Zahlen hat ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums. Wenn die Endpunkte des Intervalls zur Menge gehören, ändert sich die Mächtigkeit der Menge nicht, denn die Mächtigkeit einer unendlichen Menge bleibt erhalten, wenn man eine endliche Menge addiert oder subtrahiert.

Im folgenden werden wir ein abgeschlossenes Intervall mit $[a, b]$, ein offenes Intervall, d. h. ein Intervall ohne Endpunkte, mit (a, b) bezeichnen. Wenn der linke Endpunkt nicht, der rechte dagegen wohl zum Intervall gehört, wird die Bezeichnung $[a, b)$ benutzt, entsprechend $]a, b]$. Die Zahlen a und b können auch unendliche Werte annehmen: $a = -\infty$ und $b = \infty$, d. h., die betrachteten Intervalle können sich unendlich weit nach links oder rechts erstrecken. Zum Beispiel schreibt man für das abgeschlossene Intervall, das beide unendlich fernen Elemente enthält, $[-\infty, \infty]$. Entsprechend kann auch eine Funktion $f(x)$ für $x = \infty$ und für $x = -\infty$ definiert werden. Man schreibt dann beispielsweise $f(\infty)$. Die Stetigkeit für $x = \infty$ ist gleichbedeutend mit der Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty)$. Dasselbe gilt für $x = -\infty$. Man kann hierfür auch die üblichen Bezeichnungen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty + 0)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(\infty - 0)$ verwenden.

Es ist leicht zu zeigen [I, 43], daß eine in abgeschlossenen Intervall $[-\infty, \infty]$ endliche und stetige Funktion $f(x)$ in diesem Intervall auch gleichmäßig stetig ist.

2. Das Stieltjes'sche Integral und seine Haupteigenschaften. Wir erinnern an die Definition des Riemann'schen Integrals, die wir in den Teilen I bis IV benutzt haben. Es sei $[a, b]$ ein endliches Intervall und $f(x)$ eine in diesem Intervall definierte beschränkte Funktion. Wir zerlegen das Intervall durch n Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, wählen in jedem der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ einen gewissen Punkt ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

ξ_k und bilden den Ausdruck

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})). \quad (1)$$

Wenn bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung und bei beliebiger Wahl der Punkte ξ_k die Summe auf der rechten Seite von (1) einen endlichen Grenzwert A hat, dann sagt man, $f(x)$ sei in $[a, b]$ integrierbar, und nennt diesen Grenzwert das Integral von $f(x)$ längs $[\varphi, \psi]$. Es sei δ die größte der Differenzen $x_k - x_{k-1}$. Die beliebige Verfeinerung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle ist gleichbedeutend mit $\delta \rightarrow 0$, und die Existenz eines endlichen Grenzwertes A für die Summe (1) ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Bei beliebig vorgegebenem positivem ϵ existiert ein solches positives η , daß

$$\left| A - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) \right| < \epsilon$$

gilt für $\delta < \eta$.

Damit analog kann man einen allgemeineren Integralbegriff aufstellen, der zum ersten Male von dem holländischen Mathematiker STIELTJES im Jahre 1894 bei der Untersuchung von Kettenbrüchen eingeführt, später weiterentwickelt und auf viele Fragen der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften angewandt wurde. In dem endlichen Intervall $[a, b]$ seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, die in jedem Punkt dieses Intervalls endliche Werte annehmen. An Stelle der Summe (1) bilden wir die Summe

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})). \quad (2)$$

Diese Summe nennt man *Riemann-Stieltjessche Summe*. Wenn bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung und bei beliebiger Wahl der Punkte ξ_k diese Summe gegen einen endlichen Grenzwert strebt, sagt man, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ bezüglich der Funktion $g(x)$ integrierbar ist, und schreibt

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Beim Riemannschen Integral spielt x die Rolle von $g(x)$. Für das neue Integral gelten offenbar viele Eigenschaften, die analog den Eigenschaften des Riemannschen Integrals sind, und diese Eigenschaften kann man genauso wie die entsprechenden für das Riemannsche Integral beweisen. Wir geben diese Eigenschaften an und betonen dabei an, daß alle in den Formeln auftretenden Integrale existieren:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k f_k dg(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f_k(x) dg(x), \\ \int_a^b f(x) d \sum_{k=1}^n a_k g_k(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f(x) dg_k(x), \\ \int_a^b f(x) dg(x) &= \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(a_k ist eine Konstante).

Außerdem gilt offenbar

$$\int_a^b (g(x) - g(b) + g(a)) dg(x) = 0. \quad (4)$$

In der ersten und zweiten Formel von (3) folgt aus der Existenz der rechts stehenden Integrale die Existenz des links stehenden Integrals.

Wir gehen ausführlicher auf die partielle Integration ein. Wir setzen voraus, daß das Integral der Funktion $g(x)$ bezüglich der Funktion $f(x)$ existiert, und beweisen, daß dann auch das Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$ existiert. Dazu wählen wir die Summe (2) nach den Werten der Funktion $g(x)$, wir summieren also die Glieder mit gleichen $g(x)$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n g(x_k) [f(\xi_{k-1}) - f(\xi_k)] + g(b) [f(\xi_n) - g(a)] f(\xi_1).$$

Abziehen und subtrahieren wir die Differenz

$$[f(x)g(x)]_a^b - f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

so erhalten wir

$$\sigma = [f(x)g(x)]_a^b - \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(a) [f(\xi_1) - f(a)] + g(b) [f(b) - f(\xi_n)] \right\}. \quad (5)$$

In der geschweiften Klammer steht die Riemann-Stieltjes'sche Summe (2) für das Integral von $g(x)$ bezüglich $f(x)$. Nach Voraussetzung existiert das Integral von $g(x)$ bezüglich $f(x)$, d. h., bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung strebt die geschweifete Klammer gegen dieses Integral. Nach (5) hat also die Summe σ einen Grenzwert, d. h., es existiert das Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$, und wir können die Formel für die partielle Integration folgendermaßen schreiben:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) df(x) \quad (6)$$

oder

$$\int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x) = [f(x)g(x)]_a^b, \quad (7)$$

wobei aus der Existenz des einen Integrals in (7) die Existenz des anderen folgt.

Wir betrachten nun zwei Sonderfälle des Stieltjes'schen Integrals. Wir nehmen an, daß das Intervall $[a, b]$ durch endlich viele Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$ zerlegt wird und daß die Funktion $g(x)$ im Innern jedes der entstehenden Teilintervalle (x_{k-1}, x_k) den konstanten Wert g_k annimmt. Also macht die Funktion $g(x)$ in jedem Punkt x_k im Innern des Intervalls $[a, b]$ einen Sprung von der Größe $x_k - g_{k-1} - g_k$. Auch in den Randpunkten des Intervalls können Sprünge auftreten: ein Sprung von der Größe $x_0 - g_1 - g(a)$ im linken Randpunkt und ein Sprung von der Größe $x_p - g(b) - g_p$ im rechten Randpunkt. Wir nehmen weiter an, daß die Funktion $f(x)$ in allen Sprungstellen x_k und in den Randpunkten des Intervalls stetig ist. Die Punkte x_k seien mit Ausnahme von x_0 und x_p keine Teilpunkte des Intervalls. In der Summe (2) sind alle Summanden, bei denen x_{k-1} und x_k im Innern des gleichen Intervalls (x_{k-1}, x_k) liegen, gleich 0, weil in diesem Fall $g(x_{k-1}) = g(x_k)$ ist. Wenn das Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ eine Sprungstelle x_k enthält, streben bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung $f(\xi_k)$ gegen $f(x_k)$ und $g(x_k) - g(x_{k-1})$ gegen x_k . Daher folgt unmittelbar, daß man als Grenzwert der Summe (2) die endliche Summe

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=0}^p f(x_k) x_k \quad (8)$$

erhält.

Ist der Punkt ξ_k ein Teilpunkt von $[a, b]$, so kann man die beiden angrenzenden Intervalle betrachten und zu dem gleichen Ergebnis kommen. Beim zweiten Sonderfall des Stieltjes'schen Integrals nehmen wir an, daß $f(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$ stetig sind und daß $g(x)$ im Innern von $[a, b]$ eine Ableitung $g'(x)$ besitzt, die im Riemann'schen Sinne integrierbar und folglich beschränkt ist. Wenn man auf die Differenz $g(\xi_k) - g(x_{k-1})$ die Lagrange'sche Formel¹⁾ anwendet, erhält man für die Summe (8)

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (g(\xi_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g'(\xi_k^*) (\xi_k - x_{k-1}), \quad (9)$$

wobei ξ_k^* ein Wert im Innern von (x_{k-1}, ξ_k) ist. Setzt man $f(\xi_k) = f(\xi_k^*) = \zeta_k$, so strebt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ in $[a, b]$ der größte der Werte ζ_k bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung gegen 0, d. h., bei beliebig vorgegebenem positivem ϵ existiert ein solches positives η , daß $\zeta_k < \epsilon$ ist für $\delta < \eta$. Die Summe (9) kann man nun wie folgt schreiben:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(\xi_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^*) g'(\xi_k^*) (\xi_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \epsilon_k g'(\xi_k^*) (\xi_k - x_{k-1}), \quad (9')$$

Das Produkt zweier im Riemann'schen Sinne integrierbarer Funktionen ist wieder integrierbar [I, II 7], und der erste Summand auf der rechten Seite der letzten Formel strebt bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung gegen das Riemann'sche Integral des Produkts $f(x)g'(x)$. Wie man leicht sieht, strebt der zweite Summand auf der rechten Seite gegen 0. Die Funktion $g'(x)$ ist nach Voraussetzung beschränkt, d. h., $g'(x) \leq M$, wobei M eine konstante positive Zahl ist. Wie wir erwähnt haben, existiert bei vorgegebenem positivem ϵ ein solches positives η , daß $\zeta_k < \epsilon$ ist für $\delta < \eta$, und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k g'(\xi_k^*) (\xi_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \epsilon M (\xi_k - x_{k-1}) = \epsilon M (b - a).$$

Da ϵ beliebig gewählt war, folgt daraus, daß der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung (9') gegen 0 strebt. Somit erhalten wir als Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (10)$$

d. h., unter den obigen Voraussetzungen artet das Stieltjes'sche Integral in ein gewöhnliches Riemann'sches Integral aus. Im vorhergehenden Fall artete es in eine endliche Summe aus. Wie man leicht sieht, gilt die Formel (10) auch, wenn $f(x)$ nicht als stetig, sondern nur als im Riemann'schen Sinne integrierbar vorausgesetzt wird. Im folgenden werden wir die Existenz solcher oben definierter Stieltjes'scher Integrale und gewisser allgemeinerer, noch zu definierender Integrale untersuchen. Eine wesentliche Voraussetzung bei allen diesen Integralen ist, daß die Funktion $g(x)$ in $[a, b]$ nicht abnimmt. Eine nicht abnehmende Funktion werden wir im weiteren oft (monoton wachsend) nennen.²⁾ Bei einer solchen Funktion stellen $g(a)$ den größten und $g(b)$ den kleinsten Wert dar.

Der folgende Abschnitt dient der Vorbereitung für die Untersuchung der Existenz des oben definierten Stieltjes'schen Integrals und allgemeinerer Integrale, die wir im weiteren noch definieren werden.

1) In der deutschen Literatur: *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* genannt (Auss. d. Red.).

2) Oft auch im weiteren Sinne *monoton wachsend* genannt (Auss. d. Red.).