LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL V

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 449 Seiten, 190 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5574-3, Europa-Nr. 55743
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5576-7, Europa-Nr. 55767
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale. Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5578-1, Europa-Nr. 55781
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5580-4, Europa-Nr. 55804
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5582-8, Europa-Nr. 55828
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5584-2, Europa-Nr. 55842
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 545 Seiten, 3 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5586-6, Europa-Nr. 55866
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN 978-3-8085-5572-9, Europa-Nr. 55729

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

TEIL V

VON

W. I. SMIRNOW

11. Auflage 1991

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55866

Titel der Originalausgabe

В. И. Смирнов
Курс высшей математики, Том 5
Физматгиз, Москва 1959

Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten Renate Helle und Brigitte Mai.

Unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5586-6

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagbild basierend auf einer Abbildung aus dem Buch „Höhere Mathematik“
von Prof. Dr. Karlheinz Spindler
Druck: winterwork, 04451 Borsdorf

Aus dem Vorwort zur russischen Ausgabe

In der modernen mathematischen Physik sind die Funktionen einer reellen Veränderlichen, verschiedene Funktionenräume und die allgemeine Theorie der Operatoren von großer Bedeutung. Diesen Fragen ist im wesentlichen das vorliegende Buch gewidmet, das aus der im Jahre 1947 erschienenen ersten Auflage entstanden ist.

Die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen in diesem Buch umfaßt die Theorie des klassischen Stieltjesschen Integrals, des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals und die Theorie der volladditiven Mengenfunktionen.

Im ersten Kapitel ist die Theorie des klassischen Stieltjesschen Integrals dargelegt. Ferner wird eine allgemeinere Definition des Stieltjesschen Integrals über ein Intervall beliebiger Art angegeben; diese Definition basiert auf der Übereinstimmung des entsprechenden oberen und unteren Darbouxschen Integrals bei der Zerlegung des Grundintervalls in beliebige Teilintervalle. Als Beispiel für das klassische Stieltjessche Integral werden die Fourier-Stieltjesschen und die Cauchy-Stieltjesschen Integrale betrachtet und für diese Integrale Umkehrformeln aufgestellt. Auch wird das Stieltjessche Integral für den Fall einer Ebene definiert. Wir studieren ferner den Raum C der stetigen Funktionen und geben die allgemeine Form der linearen Funktionale auf diesem Raum an.

Das zweite Kapitel enthält Grundzüge der metrischen Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen und die Grundlagen des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals. Die ganze Theorie wird am Fall der Ebene erklärt, und es wird gezeigt, wie diese Theorie auf den n-dimensionalen euklidischen Raum übertragen werden kann. Die Maßtheorie wird für eine beliebige, nichtnegative, additive und normale Funktion aufgebaut, die auf halboffenen zweidimensionalen Intervallen gegeben ist. Das Lebesgue-Stieltjessche Integral einer beschränkten Funktion wird definiert mit Hilfe der Übereinstimmung des oberen und des unteren Darbouxschen Integrals bei Zerlegung der zugrunde gelegten meßbaren Menge in meßbare Teilmengen. Am Schluß des zweiten Kapitels wird ausführlich auf den Prozeß der Mittelung von Funktionen und auf die Eigenschaften der Mittelfunktionen unter gewissen Forderungen für den Mittelungskern eingegangen. Dieser Prozeß wird im weiteren Verlauf der Ausführungen oft benutzt.

Im dritten Kapitel werden die volladditiven Mengenfunktionen behandelt. Nach dem Beweis der ersten Sätze dieser Theorie wird zunächst ohne Beweis ein Satz angegeben, der die Zerlegung einer volladditiven Mengenfunktion in einen singulären und in einen absolut stetigen Summanden betrifft, und die mit dieser Zerlegung verknüpften grundlegenden Tatsachen werden erläutert. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen wird eingehend untersucht. Im allgemeinen Fall betrachten wir eine absolut stetige Mengenfunktion und geben eine Formel für die Variablensubstitution im n-dimensionalen Lebesgue-Stieltjesschen Integral an. Am Schluß des dritten Kapitels wird dann der Satz über die Zerlegung einer volladditiven Mengenfunktion in zwei Summanden bewiesen. Für den mehrdimensionalen Fall führen wir dann den Begriff des Hellingerschen Integrals ein und untersuchen seine Eigenschaften. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen dem Hellingerschen und dem Lebesgue-Stieltjesschen Integral erwähnt und auf den Fall des eindimensionalen Hellingerschen Integrals ausführlich eingegangen. Sämtliche am Schluß dieses Kapitels geführten Beweise stützen sich auf die vorhergehenden Untersuchungen der Eigenschaften volladditiver Mengenfunktionen [78, 79].

Das vierte Kapitel enthält die Grundzüge der Theorie der metrischen und der normierten Räume und außerdem eine ausführliche Darlegung der verallgemeinerten Ableitungen, der Einbettungssätze für verschiedene Funktionenräume und der Theorie der Funktionale im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen. Diese Fragen sind mit den bekannten Sobolewschen Untersuchungen verknüpft.[1] Die verallgemeinerten Ableitungen werden zweimal definiert, und zwar mit Hilfe der Formel für die partielle Integration und durch das Abschließen der Funktionen mit stetigen Ableitungen, wobei dann die Äquivalenz dieser beiden Definitionen nachgewiesen wird. Der Fall sternförmiger Gebiete wird gesondert behandelt. Ferner werden die vollständigen normierten Funktionenräume $W_p^{(l)}(D)$ und $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ eingeführt: der Raum $W_p^{(l)}(D)$ besteht aus denjenigen Funktionen $\varphi(x)$, die in einem Gebiet D definiert sind und verallgemeinerte l-te Ableitungen haben, wobei $\varphi(x)$ nebst allen Ableitungen zu $L_p(D)$ gehört; der Raum $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ enthält diejenigen Funktionen $\varphi(x)$, die alle verallgemeinerten Ableitungen bis einschließlich l-ter Ordnung besitzen. Dann wird gezeigt, daß die Räume $W_p^{(l)}(D)$ und $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ für eine umfangreiche Klasse von Gebieten D ein und dieselben Funktionen enthalten und daß die in ihnen eingeführten Normen äquivalent sind. Ferner lassen sich für den Raum $\tilde{W}_p(D)$ verhältnismäßig einfach Sätze beweisen, die Spezialfälle der Einbettungssätze für $W_p^{(l)}(D)$ sind. Nach der Formulierung der Einbettungssätze wird (in Kleindruck) ihr Beweis mit Hilfe der Sobolewschen Integraldarstellung angegeben. Der hier behandelte Stoff findet sich auch in der in der Fußnote zitierten Monographie.

Das fünfte und letzte Kapitel bringt die allgemeine Theorie des Hilbertschen Raumes (zunächst nur für beschränkte Operatoren). Hier werden die Fredholmschen Sätze für lineare Gleichungen mit vollstetigen Operatoren bewiesen; für normierte Räume sind diese Sätze ohne Beweis notiert. Ferner werden für selbstadjungierte Operatoren mit einem kontinuierlichen Spektrum die entsprechenden Integraldarstellungen durch Differentiallösungen mit Hilfe von Hellingerschen Integralen angegeben und Beispiele für die Anwendung der allgemeinen Theorie der beschränkten Operatoren aus l_2 und L_2 betrachtet. Der letzte Paragraph dieses Kapitels ist der Theorie der nicht beschränkten Operatoren im Hilbertschen Raum gewidmet. Nachdem die allgemeinen Sätze bewiesen sind, werden zahlreiche Beispiele für Differentialoperatoren mit einer und mit mehreren unabhängigen Veränderlichen angegeben. Nach der allgemeinen Theorie der Erweiterungen abgeschlossener symmetrischer Operatoren werden speziell halbbeschränkte Operatoren und insbesondere ihre Friedrichssche Erweiterung untersucht.

Bei der Zusammenstellung dieses Buches habe ich außer speziellen Arbeiten mehrere Bücher benutzt, in der Hauptsache: W. I. Glivenko, Das Stieltjessche Inte-

[1] Vgl. S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik. In dieser Monographie werden die hier erwähnten Fragen behandelt. (Bezüglich des Erscheinungsjahres und -ortes dieses Buches und weiterer im folgenden zitierter Werke vgl. das Literaturverzeichnis am Schluß des Bandes.)

gral, I. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen; S. Saks, Théorie de l'intégrale; Ch. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire; M. H. Stone, Linear transformation in Hilbert space and their applications to analysis; N. I. Achieser und I. M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum; A. I. Plessner, Spektraltheorie der linearen Operatoren I; N. I. Achieser, Unendliche Jacobische Matrizen und das Momentenproblem; S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik.

Abschließend möchte ich Herrn S. M. Losinski danken, der das ursprüngliche Manuskript gelesen und mir eine Reihe wertvoller Hinweise gegeben hat. Mehrere Darlegungen im zweiten Teil dieses Buches stammen von Frau O. A. Ladyshenskaja, die bei diesem Teil mitgearbeitet hat und mit der ich den Aufbau des Buches eingehend erörtert habe. Eine große Hilfe bei der Zusammenstellung des zweiten Teils erwies mir auch Herr M. S. Birman. Von ihm stammen die Ausführungen über die Einbettungssätze [114–118] und die Theorie der kleinen Störungen des Spektrums [198]. Wertvolle Ratschläge gab er mir für die Spektren symmetrischer Operatoren und deren Erweiterungen sowie für die Darlegung des Stoffes im vierten Kapitel. Meinen tiefen Dank möchte ich hiermit Frau Ladyshenskaja und Herrn Birman aussprechen; ohne ihre Hilfe hätte ich die Arbeit nicht durchführen können. Die ersten drei Kapitel sind auch von Herrn G. P. Akilow gelesen worden, von dem ich viele Hinweise erhielt und dem ich hiermit sehr dafür danke.

Leningrad, 20. Juli 1959 W. Smirnow

Hinweis

Die Rückverweise auf die Teile III/2, IV/1 und IV/2 beziehen sich auf neue überarbeitete russische Ausgaben in den siebziger und achtziger Jahren. Deutschsprachige Ausgaben der Teile IV/1 und IV/2 erschienen 1988 bzw. 1989, die des Teiles III/2 ist in Vorbereitung.

Inhalt

I. Das Stieltjessche Integral

II. Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral

III. Mengenfunktionen, Absolute Stetigkeit, Verallgemeinerung des Integralbegriffs

IV. Metrische und normierte Räume

V. Der Hilbertsche Raum

I. Das Stieltjessche Integral

1. Mengen und ihre Mächtigkeit. Bei der Anwendung der Analysis in der modernen Naturwissenschaft spielen mehrere Integralbegriffe eine große Rolle. In den ersten beiden Kapiteln dieses Bandes wird die Integrationstheorie unter einem allgemeineren Gesichtspunkt als früher behandelt. In diesem Abschnitt bringen wir zur Vorbereitung einige grundsätzliche Ausführungen aus der Mengenlehre. Sie bilden in gewisser Weise eine Ergänzung zu dem in [IV/1, 15] Gesagten.

Gegeben seien zwei aus irgendwelchen Objekten (Elementen) bestehende Mengen A_1 und A_2. Die Mengen heißen von *gleicher Mächtigkeit*, wenn sich die Elemente von A_1 und die Elemente von A_2 eineindeutig einander zuordnen lassen, d. h., wenn jedem Element von A_1 ein einziges Element von A_2 zugeordnet werden kann und umgekehrt jedem Element aus A_2 ein und nur ein Element aus A_1 entspricht. Eine unendliche Menge (d. h. eine Menge, die unendlich viele Elemente enthält) heißt *abzählbar*, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge aller natürlichen Zahlen, d. h., wenn die Elemente dieser Menge mit Hilfe der natürlichen Zahlen numeriert werden können: $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Zwei abzählbare Mengen haben die gleiche Mächtigkeit.

Wir leiten nun einige Eigenschaften abzählbarer Mengen her. Es sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Wir wählen aus einer abzählbaren Menge eine unendliche Teilmenge aus, die aus den Elementen $a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, \ldots$ besteht. Die Elemente dieser neuen Menge kann man ebenfalls numerieren. Nummer eines jeden Elementes ist die bei p stehende Indexzahl. Mit anderen Worten, die Elemente werden mit den wachsenden Indizes $p_1, p_2, \ldots$ numeriert. *Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge ist also wieder eine abzählbare Menge.* Wir betrachten jetzt zwei abzählbare Mengen: die aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bestehende Menge $A(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ und die aus den Elementen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ bestehende Menge $B(b_1, b_2, b_3, \ldots)$.

Wir bilden die Summe der beiden Mengen, d. h., wir vereinigen zu einer einzigen Menge C alle Elemente, die zu einer der beiden obigen Mengen gehören. Die so erhaltene neue Menge C nennt man gewöhnlich *Summe*[1] der Mengen A und B; sie ist ebenfalls abzählbar. Man braucht die Elemente von C beispielsweise nur in der Reihenfolge $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ anzuordnen, um sich von der Abzählbarkeit zu überzeugen. Wenn gleiche Elemente a_i, b_j auftreten, kann man eines von ihnen festhalten und die übrigen streichen. Analoges gilt auch für die Summe endlich vieler abzählbarer Mengen, d. h., *die Summe endlich vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.*

Wir nehmen nun an, es seien abzählbar viele abzählbare Mengen gegeben. Die Elemente aller dieser Mengen bezeichnet man mit einem Buchstaben mit zwei

---

[1] In der deutschen Literatur spricht man auch häufig von der Vereinigung der Mengen A und B (Anm. d. Red.).

ganzzahligen Indizes: $a_k^{(i)}$. Der obere Index gibt die Nummer der Menge an, zu der das Element gehört, der untere Index die Nummer des Elementes in dieser (abzählbaren) Menge, zu der es gehört. Es ist nicht schwer, alle Elemente $a_k^{(i)}$ zu numerieren. Als erstes Element nehmen wir dasjenige, bei dem beide Indizes gleich 1 sind: $a_1^{(1)}$. Dann nehmen wir die Elemente, bei denen die Summe der Indizes gleich 3 ist, und ordnen sie nach wachsendem oberem Index. Wir erhalten so das zweite Element $a_2^{(1)}$ und das dritte Element $a_1^{(2)}$. Wir wählen nun die Elemente, bei denen die Summe der Indizes gleich 4 ist, und ordnen sie nach wachsendem oberem Index: $a_3^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$. Dadurch erhalten wir das vierte, fünfte und sechste Element. Dieses Verfahren lehrt, daß *die Summe von abzählbar vielen abzählbaren Mengen wieder eine abzählbare Menge ist.* Diese Behauptung gilt offenbar auch, wenn einige der zu summierenden Mengen nicht abzählbare, sondern endliche Mengen sind.

Es sei jetzt eine unendliche Menge A gegeben. Wir wählen aus A ein beliebiges Element und ordnen ihm die Nummer 1 zu. Die übrigbleibende Menge ist auch wie vor unendlich. Wir wählen aus ihr ein weiteres Element aus und ordnen ihm die Nummer 2 zu. Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, sehen wir, daß *auf diese Weise von jeder unendlichen Menge eine abzählbare Menge abgespalten werden kann.* Die nach einer solchen Abspaltung übrigbleibende Menge kann entweder leer sein (d. h., sie braucht kein einziges Element zu enthalten), oder sie kann endlich bzw. unendlich sein. Wir zeigen: Ist die übrigbleibende Menge unendlich, so hat sie die gleiche Mächtigkeit wie die ursprüngliche Menge, d. h., es gilt die folgende Behauptung: *Wenn beim Abspalten einer abzählbaren Menge P von der unendlichen Menge A eine unendliche Menge B übrigbleibt, dann haben die Mengen A und B die gleiche Mächtigkeit.* Wir spalten von der unendlichen Menge B nochmals eine abzählbare Menge Q ab, und es sei C die übrigbleibende Menge. Die ursprüngliche Menge A wird also in drei Mengen zerlegt, $A = P + Q + C$, von denen die Menge C auch leer oder unendlich sein kann und die Mengen P und Q abzählbar sind. Vor der zweiten Abspaltung war $A = P + B$. Es ist nicht schwierig, die Elemente von A und B eineindeutig einander zuzuordnen. In der Tat gilt $A = P + Q + C$ und $B = Q + C$. Die Menge $P + Q$ ist als Summe abzählbarer Mengen wieder abzählbar, daher kann man die Elemente von $P + Q$ und Q eineindeutig einander zuordnen. Jedes Element der Menge C wird sich selbst zugeordnet. Auf diese Weise entsteht eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von A und B. Aus dem soeben Bewiesenen folgt unmittelbar: *Wenn man zu einer unendlichen Menge eine abzählbare Menge addiert, dann hat die so erhaltene Menge die gleiche Mächtigkeit wie die ursprüngliche Menge.* Diese beiden Behauptungen über die Subtraktion und Addition einer abzählbaren Menge gelten auch, wenn man die abzählbare Menge durch eine endliche Menge ersetzt. Das kann man genauso beweisen.

Wir haben früher gezeigt [IV/1,15], daß die Menge der in einem Intervall $[a, b]$ liegenden rationalen Zahlen sowie die Menge aller rationalen Zahlen abzählbar ist. Das läßt sich auf dieselbe Art beweisen wie die Behauptung, daß die Summe von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar ist. Den oberen Indizes entsprechen jetzt die Zähler, den unteren Indizes die Nenner der Brüche. Dabei betrachtet man zuerst nur die positiven Brüche. Wir bringen nun ein Beispiel für eine nicht abzählbare Menge. Wir betrachten alle reellen Zahlen im Intervall $(0, 1]$. Jede dieser Zahlen, mit Ausnahme der Null, läßt sich als unendlicher Dezimalbruch mit verschwindendem ganzem Anteil darstellen. Umgekehrt läßt sich jedem solchen Dezimalbruch eine gewisse reelle Zahl aus dem Intervall $(0, 1]$ zuordnen. Mit endlichen Dezimalbrüchen beschäftigen wir uns nicht, weil sie dieselben Zahlen darstellen wir unendliche Dezimalbrüche mit der Periode 9, etwa 0,37 = 0,36999... Wir beweisen nun indirekt, daß die Menge dieser reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Wir nehmen an, daß wir alle betrachteten Dezimalbrüche samt dem Dezimalbruch 0,00..., der dem linken Randpunkt des Intervalls entspricht, numerieren können. Wir bilden nun folgendermaßen einen neuen Dezimalbruch mit verschwindendem ganzen Anteil. Als erste Ziffer nach dem Komma wählen wir irgendeine Ziffer, die von der ersten nach dem Komma stehenden Ziffer des ersten der numerierten Dezimalbrüche verschieden ist, als zweite Ziffer wählen wir irgendeine Ziffer, die von der zweiten Ziffer des zweiten der numerierten Dezimalbrüche verschieden ist, usw. Die Zahl 9 wird dabei nicht verwendet. Es ergibt sich ein unendlicher Dezimalbruch, der von allen numerierten Dezimalbrüchen verschieden ist. Also ist die ihm entsprechende reelle Zahl noch nicht numeriert worden, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht, daß alle reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ numeriert worden seien. Wir haben also bewiesen, daß *die Menge aller reellen Zahlen im Intervall* $[0, 1]$ *nicht abzählbar ist*. Man sagt, diese Menge habe die *Mächtigkeit des Kontinuums*. Man sieht leicht, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebigen endlichen Intervall $[a, b]$ offenbar die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ hat, denn die Elemente der beiden Mengen können durch die Relation $y = \frac{x-a}{b-a}$ eineindeutig einander zugeordnet werden. Wenn die Veränderliche x das Intervall $[a, b]$ durchläuft, durchläuft die Veränderliche y das Intervall $[0, 1]$. Wenn wir die Relation $y = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ benutzen, so durchläuft bei der Variation von x innerhalb von $[0, 1]$ die Veränderliche y die Menge aller reellen Zahlen, d. h., *die Menge aller reellen Zahlen hat ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums*. Wenn die Randpunkte des Intervalls zur Menge gehören, ändert sich die Mächtigkeit der Menge nicht, denn die Mächtigkeit einer unendlichen Menge bleibt erhalten, wenn man eine endliche Menge addiert oder subtrahiert.

Im folgenden werden wir ein abgeschlossenes Intervall mit $[a, b]$, ein offenes Intervall, d. h. ein Intervall ohne Randpunkte, mit (a, b) bezeichnen. Wenn der linke Randpunkt nicht, der rechte dagegen wohl zum Intervall gehört, wird die Bezeichnung $(a, b]$ benutzt, entsprechend $[a, b)$. Die Zahlen a und b können auch unendliche Werte annehmen, $a = -\infty$ und $b = \infty$, d. h., die betrachteten Intervalle können sich unendlich weit nach links oder rechts erstrecken. Zum Beispiel schreibt man für das abgeschlossene Intervall, das beide unendlich fernen Elemente enthält, $[-\infty, \infty]$. Entsprechend kann auch eine Funktion $f(x)$ für $x = -\infty$ und für $x = \infty$ definiert werden. Man schreibt dann beispielsweise $f(-\infty)$. Die Stetigkeit für $x = -\infty$ ist gleichbedeutend mit der Bedingung $\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty)$. Dasselbe gilt für $x = \infty$. Man kann hierfür auch die üblichen Bezeichnungen $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty - 0)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty + 0)$ verwenden.

Es ist leicht zu zeigen [I, 43], daß eine im abgeschlossenen Intervall $[-\infty, \infty]$ endliche und stetige Funktion $f(x)$ in diesem Intervall auch gleichmäßig stetig ist.

2. Das Stieltjessche Integral und seine Haupteigenschaften. Wir erinnern an die Definition des Riemannschen Integrals, die wir in den Teilen I bis IV benutzt haben. Es sei $[a, b]$ ein endliches Intervall und $f(x)$ eine in diesem Intervall definierte beschränkte Funktion. Wir zerlegen das Intervall durch Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, wählen in jedem der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ einen gewissen Punkt

ξ_k und bilden den Ausdruck

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

Wenn bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung und bei beliebiger Wahl der Punkte ξ_k die Summe auf der rechten Seite von (1) einen endlichen Grenzwert A hat, dann sagt man, $f(x)$ sei in $[a, b]$ integrierbar, und nennt diesen Grenzwert das Integral von $f(x)$ längs $[a, b]$. Es sei δ die größte der Differenzen $x_k - x_{k-1}$. Die beliebige Verfeinerung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle ist gleichbedeutend mit $\delta \to 0$, und die Existenz eines endlichen Grenzwertes A für die Summe (1) ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Bei beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein solches positives η, daß

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

gilt für $\delta < \eta$.

Ganz analog kann man einen allgemeineren Integralbegriff aufstellen, der zum ersten Male von dem holländischen Mathematiker STIELTJES im Jahre 1894 bei der Untersuchung von Kettenbrüchen eingeführt, später weiterentwickelt und auf viele Fragen der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften angewendet wurde. In dem endlichen Intervall $[a, b]$ seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, die in jedem Punkt dieses Intervalls endliche Werte annehmen. An Stelle der Summe (1) bilden wir die Summe

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \tag{2}$$

Diese Summe nennt man *Riemann-Stieltjessche Summe*. Wenn bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung und bei beliebiger Wahl der Punkte ξ_k diese Summe gegen einen endlichen Grenzwert strebt, sagt man, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ bezüglich der Funktion $g(x)$ integrierbar ist, und schreibt

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

Beim Riemannschen Integral spielt x die Rolle von $g(x)$. Für das neue Integral gelten offenbar viele Eigenschaften, die analog den Eigenschaften des Riemannschen Integrals sind, und diese Eigenschaften kann man genauso wie die entsprechenden für das Riemannsche Integral beweisen. Wir geben diese Eigenschaften an und nehmen dabei an, daß alle in den Formeln auftretenden Integrale existieren:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f_k(x)\, dg(x),\\
&\int_a^b f(x)\, d\sum_{k=1}^{p} a_k g_k(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f(x)\, dg_k(x),\\
&\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(a_k ist eine Konstante).

Außerdem gilt offenbar

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a). \tag{4}$$

In der ersten und zweiten Formel von (3) folgt aus der Existenz der rechts stehenden Integrale die Existenz des links stehenden Integrals.

Wir gehen ausführlicher auf die partielle Integration ein. Wir setzen voraus, daß das Integral der Funktion $g(x)$ bezüglich der Funktion $f(x)$ existiert, und beweisen, daß dann auch das Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$ existiert. Dazu ordnen wir die Summe (2) nach den Werten der Funktion $g(x)$, wir sammeln also die Glieder mit gleichem $g(x_k)$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_k) - f(\xi_{k+1})] + g(b)\,f(\xi_n) - g(a)\,f(\xi_1)\,.$$

Addieren und subtrahieren wir die Differenz

$$[f(x)\,g(x)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,,$$

so erhalten wir

$$\sigma = [f(x)\,g(x)]_a^b - \left\{\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(a)\,[f(\xi_1) - f(a)] + g(b)\,[f(b) - f(\xi_n)]\right\}. \tag{5}$$

In der geschweiften Klammer steht die Riemann-Stieltjessche Summe (2) für das Integral von $g(x)$ bezüglich $f(x)$. Nach Voraussetzung existiert das Integral von $g(x)$ bezüglich $f(x)$, d. h., bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung strebt die geschweifte Klammer gegen dieses Integral. Nach (5) hat also die Summe σ einen Grenzwert, d. h., es existiert das Integral von $f(x)$ bezüglich $g(x)$, und wir können die Formel für die partielle Integration folgendermaßen schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x) \tag{6}$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b\,, \tag{7}$$

wobei aus der Existenz des einen Integrals in (7) die Existenz des anderen folgt.

Wir betrachten nun zwei Sonderfälle des Stieltjesschen Integrals. Wir nehmen an, daß das Intervall $[a, b]$ durch endlich viele Teilpunkte $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{p-1} < c_p = b$ zerlegt wird und daß die Funktion $g(x)$ im Innern jedes der entstehenden Teilintervalle (c_{q-1}, c_q) den konstanten Wert g_q annimmt. Also macht die Funktion $g(x)$ in jedem Punkt c_q im Innern des Intervalls $[a, b]$ einen Sprung von der Größe $s_q = g_{q+1} - g_q$. Auch in den Randpunkten des Intervalls können Sprünge auftreten: ein Sprung von der Größe $s_0 = g_1 - g(a)$ im linken Randpunkt und ein Sprung von der Größe $s_p = g(b) - g_p$ im rechten Randpunkt. Wir nehmen weiter an, daß die Funktion $f(x)$ in allen Sprungstellen c_q und in den Randpunkten des Intervalls stetig ist. Die Punkte c_q seien mit Ausnahme von c_0 und c_p keine Teilpunkte des Intervalls. In der Summe (2) sind alle Summanden, bei denen x_{k-1} und x_k im Innern des gleichen Intervalls (c_{q-1}, c_q) liegen, gleich 0, weil in diesem Fall $g(x_{k-1}) = g(x_k)$ ist. Wenn das Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ eine Sprungstelle c_q enthält, streben bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung $f(\xi_k)$ gegen $f(c_q)$ und $g(x_k) - g(x_{k-1})$ gegen s_q. Daher folgt unmittelbar, daß man als Grenzwert der Summe (2) die endliche Summe

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{q=0}^{p} f(c_q)\,s_q \tag{8}$$

erhält.

Ist ein Punkt x_0 ein Teilpunkt von $[a, b]$, so kann man die beiden angrenzenden Intervalle betrachten und zu dem gleichen Ergebnis kommen. Beim zweiten Sonderfall des Stieltjesschen Integrals nehmen wir an, daß $f(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$ stetig sind und daß $g(x)$ im Innern von $[a, b]$ eine Ableitung $g'(x)$ besitzt, die im Riemannschen Sinne integrierbar und folglich beschränkt ist. Wenn man auf die Differenz $g(x_k) - g(x_{k-1})$ die Lagrangesche Formel[1] anwendet, erhält man für die Summe (2)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, g'(\bar{\xi}_k)\,(x_k - x_{k-1}), \tag{9}$$

wobei $\bar{\xi}_k$ ein Wert im Innern von (x_{k-1}, x_k) ist. Setzt man $f(\xi_k) - f(\bar{\xi}_k) = \alpha_k$, so strebt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ in $[a, b]$ der größte der Werte $|\alpha_k|$ bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung gegen 0, d. h., bei beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein solches positives η, daß $|\alpha_k| < \varepsilon$ ist für $\delta < \eta$. Die Summe (9) kann man nun wie folgt schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\, g'(\bar{\xi}_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, g'(\bar{\xi}_k)\,(x_k - x_{k-1}). \tag{9'}$$

Das Produkt zweier im Riemannschen Sinne integrierbarer Funktionen ist wieder integrierbar [I, 117], und der erste Summand auf der rechten Seite der letzten Formel strebt bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung gegen das Riemannsche Integral des Produkts $f(x)\, g'(x)$. Wie man leicht sieht, strebt der zweite Summand auf der rechten Seite gegen 0. Die Funktion $g'(x)$ ist nach Voraussetzung beschränkt, d. h. $|g'(x)| \le M$, wobei M eine bestimmte positive Zahl ist. Wie wir erwähnt haben, existiert bei vorgegebenem positivem ε ein solches positives η, daß $|\alpha_k| < \varepsilon$ ist für $\delta < \eta$, und es gilt die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, g'(\bar{\xi}_k)\,(x_k - x_{k-1}) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon M\,(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon M\,(b - a).$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt daraus, daß der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung (9') gegen 0 strebt. Somit erhalten wir als Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx, \tag{10}$$

d. h., unter den obigen Voraussetzungen artet das Stieltjessche Integral in ein gewöhnliches Riemannsches Integral aus. Im vorhergehenden Fall artete es in eine endliche Summe aus. Wie man leicht sieht, gilt die Formel (10) auch, wenn $f(x)$ nicht als stetig, sondern nur als im Riemannschen Sinne integrierbar vorausgesetzt wird. Im folgenden werden wir die Existenz solcher oben definierter Stieltjesscher Integrale und gewisser allgemeinerer, noch zu definierender Integrale untersuchen. Eine wesentliche Voraussetzung bei allen diesen Integralen ist, daß die Funktion $g(x)$ in $[a, b]$ nicht abnimmt. Eine nicht abnehmende Funktion werden wir im weiteren oft monoton wachsend nennen[2]. Bei einer solchen Funktion stellen $g(b)$ den größten und $g(a)$ den kleinsten Wert dar.

Der folgende Abschnitt dient der Vorbereitung für die Untersuchung der Existenz des oben definierten Stieltjesschen Integrals und allgemeinerer Integrale, die wir im weiteren noch definieren werden.

[1] In der deutschen Literatur *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* genannt (Anm. d. Red.).

[2] Oft auch im *weiteren Sinne monoton wachsend* genannt (Anm. d. Red.).