EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Lösungsstrategien

Mathematik für Nachdenker

von

Natalia Grinberg

2. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55903

Autor:

Dr. Natalia Grinberg arbeitet als Mathematik- und Physiklehrerin am Kant-Gymnasium Karlsruhe und lehrt als Privatdozentin am KIT (ehemals Universität Karlsruhe).

2. Auflage 2011

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5590-3
ISBN 978-3-8085-5819-5 (E-Book)

Fachlektorat: Wolfgang J. Weber
Druck: fgb · freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In Mathe war ich immer schlecht ...
Gerhard Schröder, dt. Bundeskanzler 1998–2005

In diesem Buch geht es um die Lösung mathematischer Aufgaben, wobei es sich nicht um zum Schulstoff gehörende Routineaufgaben handelt, sondern um herausfordernde Denkaufgaben, die gerade nicht mit den gewöhnlichen schulmathematischen Methoden angegangen werden können. Solche Aufgaben erfordern intensives Nachdenken und setzen eine gewisse mathematische Kultur voraus. Die *Lösungsstrategien* sind daher nicht für die Vorbereitung auf eine Abiturprüfung gedacht, sondern wenden sich vielmehr an den interessierten Schüler, der die ersten eigenen Schritte in der Mathematik geht und sich über den Schulstoff hinaus umschauen will. Eine Vielzahl mathematischer Leckerbissen wird ihn auf den Geschmack bringen, sich auch weiterhin mit anspruchsvollen mathematischen Problemem auseinanderzusetzen.

In Deutschland gibt es kein flächendeckendes Angebot an mathematischer Talentförderung – andere Länder haben da weit bessere Traditionen und jahrzehntelange Erfahrungen. Selbst die größten deutschen Universitäten mit Didaktik-Abteilungen bieten in der Regel nicht einmal einen Mathematik-Schülerzirkel. Es gibt zwar mehrere Seminare und Mathematikwettbewerbe, bei denen sich junge Mathematikfreaks unter Gleichgesinnten versammeln können, doch diese Angebote sind sehr eng an nur wenige engagierte Lehrer oder Universitätsdozenten gebunden. Somit haben die meisten talentierten Schüler keinen engagierten und gut informierten Ansprechpartner vor Ort, Angebote zur Begabtenförderung sind allein vom Zufall oder Glück abhängig. Wenn darüber hinaus Kontakte zu Gleichgesinnten fehlen, verlieren die Jugendlichen, ohne jede Unterstützung, allmählich ihr anfangs so starkes und unbefangenes Interesse an der Mathematik. Die Schule lässt junge Talente einfach verkommen. Solche Schüler werden auch in Wettbewerben oft daran scheitern, dass sie nicht geübt sind, ihre Ideen mathematisch korrekt auszudrücken. Sie bekommen ihre korrigierten Lösungen mit knappen und manchmal sogar verletzenden Kommentaren zurück, die nicht viel erklären, sondern nur frustrieren. Ein wichtiges Ziel dieses Buches ist es, solchen Schülern elementare mathematische Fertigkeiten zu vermitteln und sie im wahrsten Sinne des Wortes wettbewerbsfähig zu machen.

Zu den Methoden mathematischen Problemlösens gibt es nur wenig deutschsprachige Literatur, und die ist zudem oft entweder zu elementar oder zu kompliziert. Sowohl im Schulunterricht als auch in Vorlesungen kommen die entsprechenden Methoden meist zu kurz und nur am Rande der Veranstaltung vor. Äußerst selten werden eigenständige Vorlesungen zum Thema Aufgabenlösen angeboten. Dieser Mangel war für mich die Motivation, an der Mathematischen Fakultät der Universität Karlsruhe Vorlesungen über mathematische Problemlöseverfahren für Lehramtsstudenten sowie einem Schnupperkurs für Oberstufenschüler anzubieten. Die vielen positiven Rückmeldungen in den Veranstaltungen – und auf die Onlineversion des Vorlesungsskripts, das ein Semester lang im Netz stand – haben mich bewogen, das Skript zu bearbeiten und als Buch zu veröffentlichen.

Konzept und Aufbau

Das Buch führt vom Einfacheren zum Schwierigeren und ist für das selbständige Durcharbeiten gut geeignet. Ziel ist, den Leser in die Lage zu versetzen, unbekannte neue Probleme der einen oder anderen Methode zuordnen und somit lösen zu können.

Jedes der 11 Kapitel ist einer bestimmten Methode oder Methodengruppe zur Lösung mathematischer Aufgaben gewidmet – dieses Konzept schließt sich dem klassischen Buch [6] an. Die Kapitel beginnen jeweils mit einer leicht verständlichen Erklärung der entsprechenden Methode, ihrer Anwendungsgebiete sowie möglicher Stolpersteine bei der Anwendung. Dann werden die Methoden zunächst an einigen repräsentativen Beispielen demonstriert, gefolgt von einer Reihe relativ einfacher Aufgaben, die den Leser mit der jeweiligen Methode vertraut machen. Oberstufenschüler und Studenten können diese Probleme nach einer kurzen Einarbeitung selbständig lösen. Anschließend finden Sie eine kleine Sammlung anspruchsvollerer Probleme, die entweder schwierigere Ideen einbeziehen oder auch zusätzliche mathematische Vorkenntnisse erfordern. Die aus meiner Sicht schwierigeren Aufgaben sind mit einem Stern * markiert oder in eine separate Rubrik ausgegliedert. Solche Aufgaben sind in der Regel für Studenten oder für Teilnehmer von Mathematikwettbewerben interessant. Aufgaben, die zum mathematischen Lehrplan der gymnasialen Oberstufe gehören, markiere ich mit einem Dreieck ▲.

Man kann zwar lange darüber diskutieren, welche Themen und Methoden in ein Buch über Aufgabenlösen gehören, Eins steht aber fest: Alles kann ein einziges Buch nicht fassen. So enthalten die *Lösungsstrategien* z. B. kein eigenständiges Kapitel über die Anwendung der Graphentheorie zum Lösen von Aufgaben, aber Anwendungsbeispiele dafür sind mehrfach im Text verstreut. Die Themen der Kapitel 1 bis 4, 8 und 9 sind für den Erwerb einer elementaren Aufgabenkultur unabdingbar. Die anderen, etwa das Linearitätsprinzip, Konvexität und Anwendung geometrischer Abbildungen, entsprechen besonders meinem persönlichen Geschmack.

Aufgaben

Die meisten Aufgaben stammen aus verschiedenen Wettbewerben wie dem Bundeswettbewerb Mathematik, dem Landeswettbewerb Baden-Württemberg/Bayern, dem Wettbewerb Baltic Way und Moskauer Teamwettbewerben (Moskauer Matboj).

Viele klassische Aufgaben habe ich aus der Literatur [6], [12], [16], [21] übernommen. Weitere Beispiele, deren Urquelle jetzt nicht mehr eindeutig zu bestimmen ist, stammen aus meinem eigenen Aufgabenvorrat. Die letzte Gruppe bilden einige klassische Grundergebnisse aus der Zahlentheorie, Geometrie, Algebra oder Analysis, die ich in Aufgabenform verpackt habe. Studenten und Lehrer sollen beim Anblick solcher Aufgaben ein angenehmes déjà-vu-Gefühl bekommen. Alle Aufgaben sind mit ausführlichen Lösungen versehen.

Zielgruppen

Die *Lösungsstrategien* wenden sich an ein breites Leserspektrum.

Oberstufenschüler, soweit sie mathematisch talentiert sind, erhalten Hilfe bei der Wettbewerbsvorbereitung.
Lehrer können jedes Kapitel als eine fertige Vorlage für Mathematikzirkel oder Begabten-AGs nutzen. Viele der Aufgaben lassen sich aber auch in den normalen Mathematikunterricht integrieren.
Studierende, insbesondere Lehramtsstudenten, verbessern durch die Beschäftigung mit den *Lösungsstrategien* ihre Problemlösekultur – und bereiten sich ganz nebenbei auf eine positive und gedeihliche Konfrontation mit begabten Schülern vor.
Hochschullehrer verwenden einzelne Kapitel als Material für Vorlesungen und Übungen – oder als Basis eines Schnupperkurses für Schüler.
Amateure[1] finden in dem Buch anregende Herausforderungen.

Danksagung

Besonderer Dank geht an meinen Sohn Darij für seine Mitarbeit an Teilen des Textes. Ferner möchte ich mich bei meinen Kollegen Alexander und Michail Lewintan für gute Ratschläge bei der Gestaltung der Arbeit bedanken. Mein Dank geht auch an Herrn Klaus Horn vom Verlag Harri Deutsch und Herrn Wolfgang J. Weber für ihre gründliche sprachliche und fachliche Textkorrektur. Schließlich danke ich Prof. Dr. Arthur Engel für die freundliche Genehmigung, eine Reihe von Beispielen aus seinem klassischen Buch [6] zu übernehmen.

[1] franz. für Liebhaber

Konventionen

Allgemeine mathematische Symbole

$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$: die Menge M, die aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$ besteht

$|M|$: die Mächtigkeit der Menge M, die Anzahl ihrer Elemente

$a \in M$: a ist Element der Menge M

$\{a \in M :$ Nebenbedingung $N\}$: die Menge aller Elemente a aus M, die die Nebenbedingung N erfüllen; Beispiel: $\{a_n \in M : n \text{ gerade}\} = \{a_2, a_4, \ldots\}$

$X \subset Y$: die Menge X ist eine Teilmenge von Y, wobei $X = Y$ erlaubt ist

$X \backslash Y$: die Differenzmenge von X und Y, also die Menge, die aus allen Elementen von X besteht, die nicht zu Y gehören

$\bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j = X_1 \cup \cdots \cup X_n$: die Vereinigung aller Mengen X_j, $j = 1, \ldots, n$

$\bigcap\limits_{j=1}^{n} X_j = X_1 \cap \cdots \cap X_n$: der Schnitt aller Mengen X_j, $j = 1, \ldots, n$

$A \Longrightarrow B$: aus der Behauptung A folgt die Behauptung B

$A \Longleftarrow B$: aus der Behauptung B folgt die Behauptung A

$A \Longleftrightarrow B$: die Behauptungen A und B sind äquivalent, es gilt sowohl $A \Longrightarrow B$ als auch $A \Longleftarrow B$

$\overline{A}$: die Negation der Behauptung A

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n$: die Summe aller Elemente von a_1 bis a_n

$\prod\limits_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$: das Produkt aller Elemente von a_1 bis a_n

o. B. d. A. : ohne Beschränkung der Allgemeinheit
I. V. : Induktionsvoraussetzung

Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: die natürlichen Zahlen ohne die 0

$\mathbb{Z}$: die ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: die nichtnegativen ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$: die reellen Zahlen

$\mathbb{C}$: die komplexen Zahlen

$n \mid a$: n ist ein Teiler von a, a ist durch n teilbar

$n \nmid a$: n ist kein Teiler von a, a ist nicht durch n teilbar

Parität einer ganzen Zahl n: der Rest, den n bei Division durch 2 lässt, also 0, wenn n gerade ist, und 1, wenn n ungerade ist

$[a]$ für $a \in \mathbb{R}$: der Ganzteil von a, also die größte ganze Zahl n mit $n \leq a$

$\{a\} = a - [a]$ für $a \in \mathbb{R}$: der gebrochene Teil von a

$\overline{a_1 \dots a_l}$: Dezimaldarstellung der Zahl $a_l + 10a_{l-1} + \cdots + 10^{l-1}a_1$

1 zählt nicht als Primzahl

$n!$: n-Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$

$\min\{a_1, \dots, a_n\}$: das kleinste Element der Zahlenmenge $M = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$

$\max\{a_1, \dots, a_n\}$: das größte Element der Zahlenmenge $M = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ bedeutet
(a, b) : das offene Intervall $a < x < b$
$[a, b]$: das abgeschlossene Intervall $a \leq x \leq b$

Geometrie und Graphen

$\mathbb{R}^n$: n-dimensionaler Euklidischer Raum, insbesondere ist $\mathbb{R}^2$ die Ebene

Für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ ist
$\overrightarrow{AB}$: der Vektor von A nach B
$\left|\overrightarrow{AB}\right|$: die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$

(AB) : die Gerade durch die Punkte A und B

$[AB]$: die abgeschlossene Strecke zwischen A und B

$|AB|$: die Länge der Strecke $[AB]$, es ist $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$p \cdot q$: das Skalarprodukt der zwei Vektoren p und q

$g_1 \| g_2$: die Geraden g_1 und g_2 sind parallel

$A_1A_2 \dots A_n$: das n-Eck der angegebenen Punkte

$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \dots,\ A_nA_1$: die Seiten des n-Ecks

$|A_1A_2 \dots A_n|$: der Flächeninhalt des n-Ecks

$T_2 \circ T_1$: Verkettung geometrischer Abbildungen; erst wird T_1 ausgeführt, dann T_2

Ein Graph besteht aus den Ecken $A_1, A_2, \dots, A_n$ und den Kanten $\overline{A_iA_j}$ für bestimmte Paare (i, j)
Bei einem gerichteten Graphen ist $\overrightarrow{A_iA_j}$ die Kante von A_i nach A_j

1 Elementare Beweismethoden

Eine Behauptung X gilt in der Mathematik als bewiesen, wenn eine endliche Kette von logisch korrekten *Implikationen*

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \Longrightarrow B_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow B_m \Longrightarrow X \tag{1.1}$$

beginnend mit einer Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ von Axiomen zu der Behauptung X führt. Bei jedem Schritt dürfen auch weitere Axiome verwendet werden.

Als eine Variante von (1.1) wird oft eine Kette

$$X \Longleftrightarrow C_1 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow C_m \Longleftrightarrow \{A_1, \ldots, A_n\} \tag{1.2}$$

von logisch *äquivalenten* Behauptungen konstruiert, die mit der Behauptung X anfängt und mit einer Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ von Axiomen aufhört. Für einen Beweis von X ist die Kette (1.2) zwar hinreichend, aber nicht notwendig, da eigentlich nur die Implikationen in der Richtung *Axiome* $\Longrightarrow$ *Behauptung* gebraucht werden.

Achtung Ist auch nur ein Teil im Schema (1.2) keine Äquivalenz, so ist die Behauptung nicht bewiesen und womöglich falsch.

Beispiel 1.1 Eine angebliche »Beweiskette« für $2 = -2$ ist

$$\underbrace{2 = -2}_{X} \Longrightarrow \underbrace{2^2 = (-2)^2}_{C} \Longleftrightarrow \underbrace{4 = 4}_{A}.$$

Die letzte Behauptung $4 = 4$ ist ein Axiom und daher richtig. Die Kette liefert aber keinen Beweis dafür, dass $2 = -2$ ist, da die erste Implikation keine Äquivalenz ist, denn aus $a = b$ folgt zwar $a^2 = b^2$, aber aus $a^2 = b^2$ folgt nicht $a = b$.

1.1 Direkter Beweis

Man spricht von einem direkten Beweis, falls die Implikationenkette kurz und transparent ist und keine speziellen Techniken verwendet werden.

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie, dass $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist.

Lösung Es gilt das Distributivgesetz $A_1 : (a+b)\,x = ax + bx$ und $y\,(a+b) = ya + yb$ sowie das Kommutativgesetz $A_2 : xy = yx$. Man hat also

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\underbrace{(a+b)}_{x} = \underbrace{a}_{y_1}(a+b) + \underbrace{b}_{y_2}(a+b)\\ &= a^2 + \underbrace{ab + ba}_{\text{Axiom } A_2} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

■

▲ **Aufgabe 1.2** Beweisen Sie für positive x *und* y die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

Überlegen Sie sich, wann Gleichheit gilt.

Das ist die *AM-GM-HM-Ungleichung* für zwei Zahlen. Der erste Term ist das *arithmetische Mittel* AM, der mittlere das *geometrische Mittel* GM und der letzte das *harmonische Mittel HM* der Zahlen x und y.

Lösung Für jede reelle Zahl z ist $z^2 \geq 0$, was aus dem Axiom $(-u)^2 = u^2$ folgt. Insbesondere gilt für $z = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ Folgendes:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0, \qquad \text{also} \qquad x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0.$$

Daraus folgt

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \tag{1.3}$$

und somit die *AM-GM-Ungleichung* $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$; .

Aus (1.3) folgt ferner

$$\sqrt{xy} = \frac{2xy}{2\sqrt{xy}} \geq \frac{2xy}{x+y} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},$$

die *GM-HM-Ungleichung*.

Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn die beiden Zahlen x und y gleich sind. ■

Aufgabe 1.3 Die *AM-GM-Ungleichung* für n Zahlen besagt, dass das *arithmetische Mittel* von n nichtnegativen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nicht kleiner ist als ihr *geometrisches Mittel* ist:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Beweisen Sie diese Ungleichung für den Fall $n = 4$. Überprüfen Sie insbesondere, wann Gleichheit eintritt?

Verweis Der Beweis für beliebige Zweierpotenzen $n = 2^m$ folgt in Aufgabe 1.12, den allgemeinen Fall betrachten wir in Aufgabe 9.6.

Lösung Seien $a_1 = \min\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ die kleinste und $a_2 = \max\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ die größte unter den vier Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4. Es gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_3 + a_4)\right].$$

Jetzt wenden wir die AM-GM-Ungleichung (Aufgabe 1.2) auf die positiven Zahlen $b_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ und $b_2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4)$ an, und erhalten:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_3 + a_4)\right] \geq \sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot \frac{1}{2}(a_3 + a_4)}$$

Nochmalige Anwendung der AM-GM-Ungleichung, diesmal für die Paare (a_1, a_2) und (a_3, a_4), ergibt:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot \frac{1}{2}(a_3 + a_4)} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Aus den letzten zwei Ungleichungen ergibt sich die AM-GM-Ungleichung für a_1, a_2, a_3, a_4.

Gleichheit ist nur dann möglich, wenn in obigem Beweis beide $\geq$ zu $=$ werden. Dies bedeutet aber nach Aufgabe 1.2 $a_1 = a_2$ und $a_3 = a_4$. Aus der Bedingung

$$a_1 = \min\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \ a_2 = \max\{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

folgt, dass dann alle vier Zahlen $a_1, \ldots, a_4$, gleich sind. ■

Aufgabe 1.4 Beweisen Sie, dass es beliebig lange Abschnitte auf der Zahlengeraden gibt, in denen keine Primzahlen vorkommen.

Mit anderen Worten: Beweisen Sie, dass für jedes natürliche n sich n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen finden lassen, von denen keine eine Primzahl ist.

Lösung Ein Beispiel für n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine prim ist, sind die Zahlen

$$(n+1)! + 2, \quad (n+1)! + 3, \quad \ldots, \quad (n+1)! + n, \quad (n+1)! + (n+1).$$

Dass diese Zahlen alle zusammengesetzt, also nicht prim sind, sieht man wie folgt ein: Für jedes natürliche k mit $2 \leq k \leq n+1$ ist die Zahl $(n+1)! + k$ durch k teilbar, denn die Zahl $(n+1)!$ ist als Produkt der ersten $n+1$ natürlichen Zahlen durch k teilbar. Weil ferner $(n+1)! + k > k$ ist, ist die Zahl k auch ein echter Teiler der Zahl $(n+1)! + k$, weshalb die Zahl $(n+1)! + k$ nicht prim sein kann. ■

1.2 Widerspruchsbeweis – indirekter Beweis

Ein indirekter Beweis einer Behauptung X, auch Widerspruchsbeweis genannt, ist eine endliche Kette von logisch korrekten Implikationen

$$\overline{X} \Longrightarrow B_1 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow B_m \Longrightarrow W = \overline{A}, \tag{1.4}$$

an deren Anfang die Negation der Behauptung X steht, und am Ende ein Widerspruch, also die Negation $\overline{A}$ eines Axioms. Die logische Basis dieser Beweismethode ist das *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten*. Dieses Prinzip besagt, dass genau eine von den beiden Aussagen X und $\overline{X}$ richtig ist. Ist nach (1.4) die Aussage $\overline{X}$ falsch, so ist notwendigerweise X richtig.

Bei der Formulierung der Negation $\overline{X}$ zu X muss man stets die Formel $\overline{X} =$ »X ist falsch« benutzen. Die Aussage $\overline{X}$ muss die vollständige Negation der Aussage X, nicht irgendeine Teilnegation sein. So ist zu $X =$ »Alle Schafe sind schwarz« die richtige Negation $\overline{X} =$ »Nicht alle Schafe sind schwarz«, und nicht etwa »Alle Schafe sind nicht schwarz« oder gar »Alle Schafe sind weiß«. Weitere Beispiele sind:

Behauptung X	**richtige Negation**	**falsche Negation**
Jede Zahl ist gerade	Nicht jede Zahl ist gerade	Jede Zahl ist ungerade
i^i ist rational	i^i ist nicht rational	i^i ist irrational
$A > B$	$A \leq B$	$A < B$
Anna ist blond	Anna ist nicht blond	Anna ist rothaarig
Für alle x und y gilt: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$	Es gibt x, y mit $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$	Für alle x und y gilt: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
A. hat einen Sohn	A. hat keinen Sohn	A. hat eine Tochter
$4 \mid 15$[1]	$4 \nmid 15$	$3 \mid 15$

▲ **Aufgabe 1.5** Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung Die Behauptung X lautet hier »Es gibt unendlich viele Primzahlen«. Die Negation dazu ist also $\overline{X} =$ »Es gibt endlich viele Primzahlen«.

Wir führen einen *Widerspruchsbeweis*: Angenommen, $\overline{X}$ ist richtig und J sei die endliche Anzahl aller Primzahlen. Wir listen alle Primzahlen $p_1 = 2$, $p_2 = 3, p_3 = 5$, $p_4 = 7, \ldots, p_J$, aufsteigend auf und bilden deren Produkt:

$$N = \prod_{k=1}^{J} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{J-1} \cdot p_J.$$

Offensichtlich ist dieses Produkt N durch jede Primzahl teilbar. Dann ist die Zahl $N+1$ durch keine Primzahl teilbar und daher selber eine Primzahl. Diese Primzahl ist in der obigen Liste nicht aufgelistet, da $N+1 > N \geq p_J$ ist. Das ergibt einen Widerspruch, da wir angenommen haben, dass unsere Liste *alle* Primzahlen enthält. Also ist $\overline{X}$ falsch und daher X richtig. ■

[1] Das bedeutet: 15 ist durch 4 teilbar

Aufgabe 1.6 Gegeben seien drei irrationale Zahlen. Zeigen Sie, dass es unter diesen drei Zahlen zwei gibt, deren Summe ebenfalls irrational ist.
Beispiel: Unter den drei irrationalen Zahlen $2+\pi$, $\sqrt{2}$ und $3-\sqrt{2}$ haben die Zahlen $2+\pi$ und $\sqrt{2}$ eine irrationale Summe. Unter den drei irrationalen Zahlen π^2, $\sqrt{2}$ und $7\sqrt{3}$ haben je zwei eine irrationale Summe.

Lösung Wir führen einen *Widerspruchsbeweis*: Wir nehmen also an, dass es unter unseren drei irrationalen Zahlen keine zwei gibt, deren Summe irrational ist; das heißt, je zwei von unseren drei Zahlen haben eine rationale Summe. Bezeichnen wir unsere drei irrationalen Zahlen mit x, y und z, dann sind also die Summen $a = y + z$, $b = z + x$ und $c = x + y$ alle rational. Nun ist

$$x = \frac{(z+x)+(x+y)-(y+z)}{2} = \frac{b+c-a}{2}.$$

Da die Zahlen a, b und c rational sind, muss also auch die Zahl x rational sein: Das steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass die Zahlen x, y und z alle irrational sind. Dieser Wiederspruch impliziert, dass die ursprüngliche Behauptung richtig ist. ■

Aufgabe 1.7 Wir betrachten in der Ebene ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem. Ein Punkt heißt *Gitterpunkt*, wenn seine beiden Koordinaten in diesem Koordinatensystem ganzzahlig sind.
Zeigen Sie, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen drei Ecken Gitterpunkte sind.

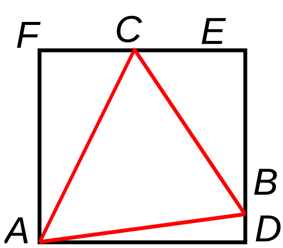

Bild 1.1 Gleichseitiges Dreieck mit Schnittpunkten achsenparalleler Geraden

Lösung Wir führen einen *Widerspruchsbeweis*: Wir nehmen an, dass A, B und C Gitterpunkte sind und das Dreieck ABC gleichseitig ist. Die Punkte seien o. B. d. A. so angeordnet wie in der Abbildung 1.1. In anderen Fällen verlaufen die Überlegungen analog.

Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt A schneide die Parallele zur y-Achse durch den Punkt B in D. Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt B schneide die Parallele zur x-Achse durch den Punkt C in E. Schließlich schneide die Parallele zur x-Achse durch den Punkt C die Parallele zur y-Achse durch den Punkt A in F. Da A, B und C Gitterpunkte sind, sind diese Parallelen Gitterlinien und daher sind auch ihre Schnittpunkte D, E und F Gitterpunkte. Ferner ist das Viereck $ADEF$ ein Rechteck.

Weil A, B, C, D, E und F Gitterpunkte sind, sind alle Längen $|AD| = |FE|$, $|AF| = |DE|$, $|FC|$, $|CE|$, $|DB|$ und $|EB|$ ganzzahlig, also auch *rational*. Wir bezeichnen die Länge der Seite $|AB|$ des gleichseitigen Dreiecks ABC mit a. Es gilt:

$$a^2 = |AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 \in \mathbb{Q}.$$

Die Fläche $|ABC|$ des Dreiecks ABC wird durch

$$|ABC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

gegeben und ist damit *irrational*. Jetzt aber haben wir:

$$\begin{aligned} |ABC| &= |ADEF| - |ADB| - |BEC| - |ACF| \\ &= |AD| \cdot |EF| - \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DB| - \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |EC| - \frac{1}{2} |AF| \cdot |FC| . \end{aligned}$$

Das ist eine *rationale* Zahl. Das ergibt einen Widerspruch. ■

1.3 Vollständige Induktion

Benutzte Literatur:

1. I. Sominskij, L. Golovina, I. Jaglom, *Die vollständige Induktion* [17]
2. A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Chapter 8 [6]
3. Spektrum der Wissenschaft. Spezial: *Das Unendliche* [20]

Viele Behauptungen X_n, die einen abzählbaren Parameter $n \geq n_0$ enthalten, etwa X_n = »die Zahl $n^3 - 1$ ist durch $n - 1$ teilbar«, lassen sich mit der Methode der vollständigen Induktion beweisen:

- Es wird bewiesen, dass X für n_0 richtig ist. Das ist der *Induktionsanfang.*
- Es wird angenommen, dass für $k \geq n_0$ die Behauptung X_k richtig sei. Das ist die *Induktionsvoraussetzung*, abgekürzt *I. V.*, auch *Induktionsannahme* genannt.
- Es wird bewiesen, dass die Implikation $X_k \implies X_{k+1}$ richtig ist. Das ist der *Induktionsschritt.*

Das *Induktionsprinzip*, auch *Induktionsaxiom* genannt, besagt, dass dann X_n für jedes $n \geq n_0$ richtig ist.

Bemerkung Als eine Variante des *Induktionsschrittes* kann man die Implikation $\{X_{n_0}, X_{n_0+1}, \ldots, X_k\} \implies X_{k+1}$ nehmen.

Bevor wir zu den vielen Anwendungen der vollständigen Induktion kommen, betrachten wir zunächst drei Beispiele, in denen sich das Prinzip – aus unterschiedlichen Gründen – nicht anwenden lässt.

Beispiel 1.2 Das *Eulersche Polynom* $n^2 + n + 41$ liefert bei $n = 1, 2, \ldots, 39$ nur Primzahlen und man könnte annehmen, dass es stets Primzahlen liefert. Für den Induktionsanfang hat man mehr Möglichkeiten als nötig.

Bei $n = 40$ erhält man aber $n^2 + n + 41 = 41^2$, also keine Primzahl. Hier klappt also der *Induktionsschritt* nicht.

Beispiel 1.3 Die Behauptung $S_n < 1/2 - 1/n$ für

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

ist falsch.

Zwar funktioniert der *Induktionsschritt* von $n = k$ auf $n = k + 1$ sehr wohl, aber der *Induktionsanfang* $S_1 = 1/(1 \cdot 2) < 1/2 - 1/1$ ist offensichtlich falsch.

Beispiel 1.4 Die Ungleichung $x^2 + 1 \geq 2x$ für alle reellen $x \geq 0$ ist zwar richtig, kann aber mittels vollständiger Induktion nicht bewiesen werden.

Hier fehlt nämlich ein *abzählbarer Parameter*, nach dem man die Induktion führen könnte.

▲ Aufgabe 1.8 Sei G ein ebenes konvexes n-Eck. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

a) Jede *Triangulierung* von G hat genau $n - 2$ Dreiecke.

b) Die Summe der inneren Winkel von G beträgt $(n - 2)\,\pi$.

Bemerkung Unter einer Triangulierung eines Vielecks verstehen wir eine Zerlegung des Vielecks in Dreiecke, die sich nicht überlappen, zusammen lückenlos das Vieleck abdecken, und deren Ecken gleichzeitig Ecken des Vielecks sind.

Lösung

Induktionsanfang Für $n = 3$ sind beide Behauptungen offensichtlich richtig.

Induktionsanfang Angenommen, die Behauptungen gelten für alle $n \leq k$, also angenommen, a) für jedes $n \leq k$ liefert die Triangulierung $n - 2$ Dreiecke und b) die Winkelsumme von G ist $(n - 2)\,\pi$.

Wir zeigen nun, dass die entsprechende Behauptung dann auch für $n = k + 1$ gilt.

Induktionsschritt

a) Wir betrachten eine Diagonale, die zur Triangulierung gehört. Diese Diagonale teilt G in ein n_1-Eck und ein n_2-Eck. Dabei gilt $k + 1 = n = n_1 + n_2 - 2$ und $n_1 \leq k$ und $n_2 \leq k$. Laut Induktionsvoraussetzung hat das triangulierte n_1-Eck $n_1 - 2$ Dreiecke und das triangulierte n_2-Eck $n_2 - 2$ Dreiecke. Somit hat die Triangulierung des gesamten n-Ecks

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n_1 + n_2 - 4 = (n_1 + n_2 - 2) - 2 = n - 2$$

Dreiecke.

b) Im Wesentlichen verläuft der Induktionsschritt wie oben. Mit einer Diagonale teilen wir das n-Eck G in ein n_1-Eck und ein n_2-Eck. Dabei gilt $n = n_1 + n_2 - 2$. Laut

Induktionsvoraussetzung ist die Summe der Winkel des n_1-Ecks gleich $(n_1-2)\,\pi$, und die des n_2-Ecks gleich $(n_2-2)\,\pi$. Die Summe der Winkel des n-Ecks G erhält man nun, indem man diese beide Summen addiert. Sie ist somit

$$(n_1-2)\,\pi+(n_2-2)\,\pi=(n_1+n_2-4)\,\pi=(n-2)\,\pi.$$

■

Bemerkung Ein anderer Beweis von b) ergibt sich leicht aus einer Triangulierung mit Hilfe von a).

▲ Aufgabe 1.9 Berechnen Sie die Summe S_n der ersten n ungeraden Zahlen.

Lösung

Es ist $S_1=1, S_2=4, S_3=9$. Wir beweisen, dass $S_n=n^2$ für jedes natürliche n ist.

Induktionsanfang $S_1=1$ ist richtig.

Induktionsschritt Es sei $S_k=k^2$. Dann ist

$$S_{k+1}=S_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2\,.$$

Die Formel S_n ist somit für $n=k+1$ bewiesen. ■

Aufgabe 1.10 Beweisen Sie, dass die Summe S_n der dritten Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ist.

Lösung

Induktionsanfang $S_1=1=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ ist richtig.

Induktionsschritt Es sei $S_k=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+(k+1)^3=\left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\&=(k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Die Formel S_n ist damit für $n=k+1$ bewiesen. ■

Verweis Eine Verallgemeinerung ist in Aufgabe 10.23 zu finden.

▲ Aufgabe 1.11 Sei n eine natürliche Zahl und

$$A_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\cdot(j+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes natürliche n gilt: $A_n<1$.

b) Finden Sie eine geschlossene Formel für A_n, also einen Ausdruck ohne Auslassungspunkte $\cdots$ und Summenzeichen $\sum$.

Lösung Beginnen wir mit dem Aufgabenteil b) und beweisen die Formel

$$A_n = 1 - \frac{1}{n+1}. \tag{1.5}$$

An dieser geschlossenen Formel können wir nämlich – im Unterschied zur ursprünglichen Summenformel – ganz einfach ablesen, dass die Ungleichung in Aufgabenteil a) erfüllt ist.

Erster Beweis: Wir beweisen (1.5) induktiv.

Induktionsanfang Für $n = 1$ ist (1.5) gültig, denn

$$A_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsschritt Angenommen, die Formel (1.5) gelte für ein bestimmtes $n = k - 1$. Wir haben also

$$A_{k-1} = 1 - \frac{1}{k}$$

und müssen zeigen, dass (1.5) auch für $n = k$ gilt, also dass

$$A_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = A_{k-1} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k \cdot (k+1)}\right) \\ &= 1 - \frac{(k+1) - 1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen, und die Formel (1.5) bewiesen.

Zweiter Beweis: Es gilt

$$\frac{1}{r \cdot (r+1)} = \frac{(r+1) - r}{r \cdot (r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}.$$

Wenden wir diese Zerlegung in Partialbrüche auf die Terme der Form $\frac{1}{r \cdot (r+1)}$ in der Summe A_n an, erhalten wir

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

In dieser Summe kommt fast jeder Bruch doppelt vor, und zwar einmal mit dem negativen Vorzeichen und dann sogleich wieder mit dem positiven Vorzeichen. Diese Terme heben sich gegenseitig auf, ihre Summe ist 0. Einzig die Terme $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{n+1}$ kommen in der Summe nur einmal vor, der erste mit dem Vorzeichen + und der zweite mit dem Vorzeichen −. Somit erhalten wir

$$A_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

und damit ist die Formel (1.5) bewiesen.

Bemerkung In der Tat steckt in diesem Beweis ebenfalls die vollständige Induktion, und zwar dort, wo wir in der Summe A_n das Symbol »$\cdots$« für »und so weiter« verwenden.

Mit der Formel (1.5) haben wir zwei Fliegen mit einer Klappe geschlagen, weil sie einerseits einen geschlossenen Ausdruck für den Wert von A_n angibt, womit Aufgabe b) gelöst ist, andererseits auf

$$A_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

führt, womit auch die Aufgabe a) gelöst ist. ■

Aufgabe 1.12 Seien $a_1, \ldots, a_n$ nichtnegative Zahlen. Beweisen Sie die allgemeine AM-GM-Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

für $n = 2^m$, wobei m eine beliebige natürliche Zahl ist. Wann tritt Gleichheit ein?

Lösung
Wir führen die vollständige Induktion nach m.

Induktionsanfang Für $m = 1$ ist $n = 2^1 = 2$ und wir müssen die AM-GM-Ungleichung für den Fall $n = 2$ zeigen, was wir aber bereits bei Lösung der Aufgabe 1.2 erledigt haben.

Induktionsschritt Dieser Schritt ist im Wesentlichen eine Wiederholung des Gedankenganges in der Lösung zur Aufgabe 1.3. Angenommen, die AM-GM-Ungleichung gilt für $n = 2^m$ mit einem $m = k$. Das heißt: Für beliebige 2^k nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$ gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}},$$

und Gleichheit tritt nur ein, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^k}$ ist.

Wir müssen zeigen, dass unter dieser Vorausetzung die AM-GM-Ungleichung auch für $n = 2^m$ mit $m = k+1$ gilt, also dass für beliebige 2^{k+1} nichtnegative Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}}$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}$$

gilt und Gleichheit nur eintritt, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^{k+1}}$ ist.

Da $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ ist, können wir die 2^{k+1} Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}}$ in zwei Gruppen mit je 2^k Zahlen aufteilen: $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$ und $a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, \ldots, a_{2^{k+1}}$. Auf jede dieser beiden Gruppen wenden wir nach Induktionsvoraussetzung die AM-GM-Ungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}; \\ \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}) + (a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Jetzt wenden wir wieder die AM-GM-Ungleichung für den Fall $n = 2$ an, diesmal auf die Zahlen $\sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}$ und $\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}$, und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.6) und (1.7) ergeben zusammen

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} \\ &= \sqrt{\sqrt[2^k]{(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}) \cdot (a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}})}} \\ &= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Gleichheit kann nur eintreten, wenn sowohl in (1.6) als auch in (1.7) Gleichheit gegeben ist. Das impliziert nach der Induktionsvoraussetzung

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^k} \quad \text{sowie} \quad a_{2^k+1} = a_{2^k+2} = \cdots = a_{2^{k+1}}.$$