

Inhaltsverzeichnis

I	Lineare Algebra	1
1	Determinanten	1
1.1	Einführendes Beispiel	1
1.2	Determinanten zweiter Ordnung	2
1.2.1	Definition	2
1.2.2	Eigenschaften	2
1.3	Determinanten dritter Ordnung	4
1.3.1	Definition und Wertberechnung	4
1.4	Determinanten n -ter Ordnung	5
1.4.1	Definition und Entwicklungssatz	5
1.4.2	Vorteilhafte Berechnung des Wertes einer Determinante	6
1.4.3	Weitere Anwendungen	8
2	Matrizen	11
2.1	Einführendes Beispiel	11
2.2	Grundbegriffe	12
2.2.1	Definition und Gleichheit von Matrizen	12
2.2.2	Spezielle Matrizen	12
2.2.3	Rang einer Matrix	15
2.3	Rechenoperationen für Matrizen	17
2.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	17
2.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	17
2.3.3	Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix	18
2.3.4	Umkehroperation zur Matrizenmultiplikation	21
2.4	Eigenwertaufgabe	23
3	Lineare Gleichungssysteme	25
3.1	Definitionen und Lösungsmethode	26
3.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	28

ii *INHALTSVERZEICHNIS*

3.2.1	Spezialfälle	28
3.2.2	Allgemeiner Fall	29
3.2.3	Fallunterscheidungen für lösbare lineare Gleichungssysteme	30
4	Aufgaben zum Teil I	39
II	Grundlagen der Graphentheorie und Netzplanmodelle	46
5	Graphen	46
5.1	Grundlagen	46
5.1.1	Gegenstand	46
5.1.2	Einführendes Beispiel	47
5.1.3	Spezielle Graphen und Begriffe	47
5.1.4	Gerichtete und ungerichtete Graphen	49
5.1.5	Spezielle Strukturen von Graphen	49
5.1.6	Kanten und Bögen	50
5.1.7	Arten des Zusammenhanges von Graphen	54
5.1.8	Bäume und Gerüste	55
5.1.9	Ströme und Spannungen	57
5.2	Darstellung von Graphen	60
5.2.1	Darstellung durch eine Adjazenzmatrix	60
5.2.2	Darstellung durch eine Inzidenzmatrix	65
6	Netzplanmodelle	66
6.1	Aufstellen von Netzplänen	66
6.1.1	Grundbegriffe	66
6.1.2	Ereignis- und Aktivitätennetzpläne	67
6.1.3	Phasen der Netzplantechnik	70
6.2	Methode CPM	71
6.2.1	Zeitplanung	72
6.2.2	Beispiel zur Berechnung des kritischen Weges	77
6.3	Methode PERT	79
6.3.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen	79
6.3.2	Zeitplanung	82

6.3.3	Interpretation der Ergebnisse	85
6.3.4	Berechnung eines Netzplanes	86
7	Aufgaben zum Teil II	91
 III Einführung in die Linearoptimierung		 94
8	Grundlagen	94
8.1	Grundbegriffe und Aufgabenstellung	94
8.2	Mathematische Modellformulierung	95
9	Graphische Lösung linearer Optimierungsaufgaben	99
9.1	Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme	99
9.1.1	Ungleichungen mit zwei Variablen	99
9.1.2	Spezielle Ungleichungen und ihre Lösungsmengen	100
9.1.3	Beispiele	100
9.1.4	Schlußfolgerungen und Ausblick	104
9.2	Graphische Lösung von Maximierungsaufgaben	105
9.2.1	Optimale Lösung für Standardbeispiel	105
9.2.2	Mehrere optimale Lösungen	107
9.2.3	Zusammenfassung	108
10	Analytische Lösung linearer Optimierungsaufgaben	110
10.1	Theoretische Grundlagen	110
10.1.1	Normalform eines linearen Optimierungsproblems	110
10.1.2	Einführung grundlegender Begriffe	111
10.1.3	Standardbeispiel	112
10.1.4	Simplextheorem und Simplexkriterium	116
10.2	Simplexmethode für den Normalfall der Maximierung	117
10.2.1	Grundlegende Aspekte	117
10.2.2	Numerische Lösung des Standardbeispiels	118
10.2.3	Simplexalgorithmus	122
10.2.4	Rechteckschema zum Standardbeispiel	126
11	Transportoptimierung	129

11.1	Grundlagen	129
11.1.1	Einführendes Beispiel	129
11.1.2	Formulierung des klassischen Transportproblems	131
11.1.3	Sätze zur Lösung von Aufgaben der Transportoptimierung	132
11.2	Gewinnung einer Anfangslösung	132
11.2.1	Aufsteigende Indexmethode	133
11.2.2	Beispiel	134
11.3	Gewinnung einer optimalen Lösung	136
11.3.1	Optimierungskriterium für das Transportproblem	136
11.3.2	Verbesserung einer nichtoptimalen zulässigen Basislösung	138
12	Aufgaben zum Teil III: Einführung in die Linearoptimierung	141
IV	Wahrscheinlichkeitsrechnung	143
13	Zufällige Ereignisse	143
13.1	Grundlagen	143
13.1.1	Begriffserklärungen	143
13.1.2	Ereignisrelationen und Ereignisoperationen	144
13.1.3	Strukturdarstellung von Ereignissen	148
13.1.4	Ereignisfeld	149
14	Wahrscheinlichkeit von Ereignissen	151
14.1	Definition und Eigenschaften	151
14.1.1	Relative Häufigkeit eines Ereignisses	151
14.1.2	Axiomatische Definition	152
14.2	Berechnungsmethoden	152
14.2.1	Klassische Methode	153
14.2.2	Geometrische Methode	153
14.2.3	Statistische Methode	154
14.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	155
14.4	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	157
14.4.1	Wahrscheinlichkeit eines Produktes von Ereignissen	157
14.4.2	Wahrscheinlichkeit einer Summe von Ereignissen	158
14.4.3	Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Formel von Bayes	159

15	Zufallsgrößen und ihre Verteilungen	162
15.1	Begriffsbildungen	162
15.1.1	Zufallsgrößen	162
15.1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	162
15.2	Diskrete Zufallsgrößen	163
15.2.1	Einzelwahrscheinlichkeiten und Verteilungsfunktion	163
15.2.2	Kennwerte	168
15.3	Spezielle Verteilungen diskreter Zufallsgrößen	170
15.3.1	Zweipunktverteilung	171
15.3.2	Gleichmäßige diskrete Verteilung	172
15.3.3	Binomialverteilung	173
15.3.4	Poisson-Verteilung	179
15.4	Stetige Zufallsgrößen	184
15.4.1	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion	184
15.4.2	Kennwerte	187
15.5	Spezielle Verteilungen stetiger Zufallsgrößen	189
15.5.1	Gleichmäßige stetige Verteilung	189
15.5.2	Exponentialverteilung	191
15.5.3	Normalverteilung	192
15.5.4	Standardisierte Normalverteilung	195
15.5.5	Weibull-Verteilung	203
15.6	Funktionen von Zufallsgrößen	206
16	Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze	208
16.1	Einführung	208
16.2	Gesetze der großen Zahlen	209
16.3	Grenzwertsätze	211
16.3.1	Einführung	211
16.3.2	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	211
16.3.3	Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy	214
16.3.4	Grenzwertsatz von Ljapunov	216
17	Zweidimensionale Zufallsgrößen	217
17.1	Verteilung einer zweidimensionalen Zufallsgröße	217
17.2	Zweidimensionale diskrete und stetige Zufallsgrößen	220

17.2.1	Verteilung diskreter Zufallsgrößen	220
17.2.2	Verteilung stetiger Zufallsgrößen	222
17.2.3	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen	226
17.2.4	Kennwerte von Zufallsgrößen	227
17.3	Zweidimensionale Normalverteilung	231
17.3.1	Definition	231
17.3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels standardisierter Normalverteilung	232
17.3.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels Streuungsnetz	234
18	Aufgaben zum Teil IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung	236
V	Grundlagen der mathematischen Statistik	245
19	Grundbegriffe	245
19.1	Merkmale und Merkmalsausprägungen	245
19.2	Daten und ihre Klassifikation	247
19.3	Grundgesamtheit und Stichprobe	248
19.4	Anforderungen an eine Stichprobe	248
19.5	Arbeitsstufen einer statistischen Untersuchung	249
20	Beschreibende Statistik bei einem Merkmal	251
20.1	Häufigkeitsverteilung	251
20.2	Klassenbildung	253
20.3	Summenverteilung	255
20.4	Statistische Maßzahlen	257
20.4.1	Mittelwerte	257
20.4.2	Streuungsmaße	262
21	Beschreibende Statistik bei zwei Merkmalen	266
21.1	Häufigkeitsverteilung	266
21.2	Empirische Randverteilung	267
21.3	Stochastischer Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen	270
21.3.1	Begriffsbildung	270
21.3.2	Arten des stochastischen Zusammenhangs	272

21.3.3	Empirische Kovarianz	272
22	Regression und Korrelation	275
22.1	Gegenstand der Regressions- und Korrelationsanalyse	275
22.2	Empirische Regressionsfunktion	275
22.2.1	Allgemeines	275
22.2.2	Lineare Regressionsfunktion	277
22.2.3	Nichtlineare Regressionsfunktionen	282
22.3	Empirisches Bestimmtheitsmaß	289
22.3.1	Empirisches Bestimmtheitsmaß	289
22.3.2	Empirischer Korrelationskoeffizient	292
23	Zeitreihen	294
23.1	Begriffsbildung	294
23.2	Absoluter und relativer Verlauf einer Zeitreihe	295
23.3	Trend einer Zeitreihe	296
23.4	Berechnung der Trendfunktion	297
24	Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen	302
24.1	Mathematische Stichprobe und Stichprobenfunktionen	302
24.1.1	Stichproben	302
24.1.2	Stichprobenfunktion	302
24.2	Quantile stetiger Zufallsgrößen	303
24.3	Verteilungen von Stichprobenfunktionen	305
24.3.1	χ^2 -Verteilung	305
24.3.2	t -Verteilung	308
24.3.3	F -Verteilung	311
25	Statistische Schätzmethoden	318
25.1	Punktschätzung	318
25.1.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe	318
25.1.2	Gütekriterien für die Schätzfunktion	319
25.2	Konfidenzschätzung	322
25.2.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe	322
25.2.2	Konfidenzintervall für m eines normalverteilten Merkmals	323

25.2.3	Konfidenzintervall für σ^2 eines normalverteilten Merkmals	327
25.2.4	Konfidenzintervall für den Parameter p eines 0-1-verteilten Merkmals	329
25.2.5	Konfidenzintervall für ρ_{xy} bei normalverteiltem Merkmalspaar	330
26	Statistische Prüfverfahren	333
26.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe	333
26.2	Prüfen von Erwartungswerten	335
26.2.1	Prüfen des Erwartungswertes eines normalverteilten Merkmals	335
26.2.2	Gleichheit der Erwartungswerte zweier normalverteilter Merkmale	339
26.3	Prüfen von Dispersionen	340
26.3.1	Prüfen der Dispersion eines normalverteilten Merkmals	340
26.3.2	Prüfen der Gleichheit der Dispersion zweier normalverteilter Merkmale	341
26.4	Prüfen von Wahrscheinlichkeiten	343
26.4.1	Prüfen der Wahrscheinlichkeit eines 0-1-verteilten Merkmals	343
26.4.2	Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten zweier 0-1-verteilter Merkmale	344
26.5	Prüfen von Verteilungen	345
26.5.1	Prüfen der Verteilung eines Merkmals	345
26.5.2	Prüfen der Unabhängigkeit zweier Merkmale	349
26.5.3	Prüfen der Gleichheit der Verteilungen mehrerer Merkmale	351
26.6	Prüfen des Korrelationskoeffizienten	353
26.6.1	Prüfen des Korrelationskoeffizienten gegen Null	353
26.6.2	Prüfen des Korrelationskoeffizienten gegen $\rho_0 \neq 0$	353
27	Aufgaben zum Teil V: Grundlagen der mathematischen Statistik	356
VI	Lösungen zu den Aufgaben	360
28	Lösungen zum Teil I	360
29	Lösungen zum Teil II	364
30	Lösungen zum Teil III	368
31	Lösungen zum Teil IV	371
32	Lösungen zum Teil V	377

Teil I

Lineare Algebra

Gegenstand der linearen Algebra sind Gesamtheiten von Elementen, in denen algebraische Operationen definiert sind. Dazu gehören Determinanten und Matrizen sowie lineare Gleichungssysteme, die Gegenstand unserer Betrachtungen sind. Sie bilden die Grundlage für die Linearoptimierung, deren Elemente ebenfalls behandelt werden.

1 Determinanten

1.1 Einführendes Beispiel

Für ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

kann mit dem Additionsverfahren eine Lösung ermittelt werden. Im einzelnen erhält man

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -b_2a_{12} \end{array} \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot (-a_{12}) \end{array} \right. +$$

Mit $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ folgt

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

und in entsprechender Weise

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Für den gemeinsamen Nenner von x_1 und x_2 kann man die symbolische Schreibweise

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

verwenden, wenn man für D den Wert $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ versteht.

Analog können der Zähler von x_1 und x_2 durch

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

2 1.2. DETERMINANTEN ZWEITER ORDNUNG

ausgedrückt werden.

Damit erhält man

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad D \neq 0.$$

- ▷ Dieses Verfahren, **Cramersche Regel** genannt, kann auch für n Gleichungen mit n Unbekannten angewandt werden. Der damit verbundene Rechenaufwand wächst für $n \geq 4$ mit zunehmendem n stark an.

1.2 Determinanten zweiter Ordnung

1.2.1 Definition

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante zweiter Ordnung** oder zweireihige Determinante und besitzt den Wert

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Anmerkungen:

1. Die Elemente a_{ik} der Determinante sind zwischen zwei senkrechten Strichen angeordnet.
2. Die Determinante besteht aus zwei **Zeilen** und aus zwei **Spalten**; Zeilen und Spalten nennt man **Reihen**.
3. Die Diagonale von links oben nach rechts unten heißt **Hauptdiagonale**, die Diagonale von links unten nach rechts oben heißt **Nebendiagonale**.
4. Für ein Element a_{ik} gibt der erste Index die Zeile, der zweite Index die Spalte an, in der sich das Element befindet.

Der **Wert einer zweireihigen Determinante** ist somit das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonale.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 2 \cdot (-1) = 38.$$

1.2.2 Eigenschaften

Unter Verwendung der Eigenschaften von Determinanten können diese umgeformt und ihr Wert berechnet werden.

- ▷ Die folgenden Eigenschaften für zweireihige Determinanten sind auch für drei- und mehrreihige Determinanten gültig.

Erste Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht, d. h. ihre Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen anordnet (sie „stürzt“).

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zweite Eigenschaft

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn

- alle Elemente einer Reihe Null sind oder
- alle Elemente einer Reihe den entsprechenden Elementen einer parallelen Reihe proportional sind.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} & ca_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Dritte Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei parallele Reihen vertauscht.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Vierte Eigenschaft

Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

$$\boxed{\text{B}} \quad c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix}.$$

- ▷ Häufig wird die Umkehrung dieser Eigenschaft benutzt, indem man einen Faktor, den alle Elemente einer Reihe enthalten, vor die Determinante zieht.

Fünfte Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} \\ = a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) \\ = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

4 1.3. DETERMINANTEN DRITTER ORDNUNG

Sechste Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, wenn das (die) Element(e) unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale Null ist (sind); eine solche Form der Determinante nennt man **Dreiecksform**.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1.3 Determinanten dritter Ordnung

1.3.1 Definition und Wertberechnung

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante dritter Ordnung** oder dreireihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von D kann nach der Regel von Sarrus erfolgen. Dazu werden zunächst die Elemente der ersten und zweiten Spalte nach den Elementen der dritten Spalte angeordnet. Es entsteht das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overline{-} & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & & \\ & & & \underbrace{+} & & & \end{array}$$

Regel von Sarrus

Der Wert D einer Determinante dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist gleich der Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links oben nach rechts unten angeordneten Elemente, vermindert um die Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links unten nach rechts oben angeordneten Elemente:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

$\boxed{\text{B}}$ Es ist der Wert D von

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

zu ermitteln.
Mit dem Schema

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 3 \\ &= -8. \end{aligned}$$

1.4 Determinanten n -ter Ordnung

1.4.1 Definition und Entwicklungssatz

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = |a_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

heißt **Determinante n -ter Ordnung** oder n -reihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von D kann nach dem Entwicklungssatz von Laplace erfolgen. Dazu benötigt man die Begriffe Unterdeterminante und Adjunkte.

Die **Unterdeterminante** D_{ik} zum Element a_{ik} einer Determinante D ist die Determinante, die entsteht, indem man in D die Elemente der i -ten Zeile und der k -ten Spalte streicht.

▷ Von einer Determinante n -ter Ordnung können n^2 Unterdeterminanten je $(n-1)$ -ter Ordnung gebildet werden.

Die **Adjunkte** A_{ik} ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante D_{ik} :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}.$$

[B] Für D_{12} und A_{12} von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

▷ Es ist $D_{ik} = A_{ik}$ für geradzahliges $i+k$ und $D_{ik} = -A_{ik}$ für ungeradzahliges $i+k$.

Entwicklungssatz von Laplace

Der Wert von D kann durch Entwicklung der Determinante nach den Elementen einer beliebigen Reihe erfolgen, wobei als Entwicklungsvorschrift

$$D = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

für die Entwicklung von D nach den Elementen der i -ten Zeile und

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

für die Entwicklung von D nach den Elementen der k -ten Spalte gilt.

▷ Der Rechenaufwand beim Berechnen des Wertes einer Determinante wird verringert, indem man die Determinante nach den Elementen derjenigen Reihe entwickelt, die die meisten Nullen enthält.

▢ Durch Entwicklung nach den Elementen der zweiten Spalte erhält man

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(3-2) - 3(-2-4) = 17. \end{aligned}$$

1.4.2 Vorteilhafte Berechnung des Wertes einer Determinante

Neben der Berechnung des Wertes einer Determinante unter Verwendung des Entwicklungssatzes können Determinanten vorteilhaft berechnet werden, indem man

- möglichst viele Nullen in einer Reihe durch Ausnutzung bestimmter Eigenschaften erzeugt und danach den Entwicklungssatz anwendet,
- sie in eine Dreiecksform überführt.

▢ Der Wert der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}$$

ist zu berechnen

1. durch Erzeugen möglichst vieler Nullen in einer Reihe,
2. durch Überführen in eine Dreiecksform.

Lösung:

1. Unter Verwendung von $a_{23} = 1$ (Pivotelement: Element, auf das wir uns bei der Nullengewinnung stützen) werden die übrigen Elemente der dritten Spalte in Null überführt. Das geschieht durch Anwendung der Eigenschaften für Determinanten. (Die Faktoren und Operationen sind außerhalb der Determinante vermerkt.)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & \boxed{1} & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow + \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 2$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & -1 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach Anwendung des Entwicklungssatzes und entsprechenden Umformungen der Determinante dritter Ordnung erhält man

$$D = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -13 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} +13 & +1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^+ \cdot(-4) \end{array}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-9) \cdot (-15 + 16) = -9.$$

2. Nach Vertauschen von zweiter mit erster Zeile sowie dritter mit erster Spalte und anschließender Nullenermittlung erhält man

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 13 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & -27 & -24 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \stackrel{\downarrow +}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt das Ergebnis

$$D = 1 \cdot (-1) \cdot (-15) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -9.$$

1.4.3 Weitere Anwendungen

B Tetraedervolumen:

Vier nicht in einer Ebene liegende Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, bilden ein Tetraeder. Die Maßzahl V seines Volumens ist

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

der Betrag der angeführten Determinante vierter Ordnung.

B Ebenengleichung:

Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$, bilden eine Ebene. Die Ebenengleichung lautet

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Normalform der Ebenengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

B Dreiecksfläche:

Die Maßzahl A der Fläche eines durch die Eckpunkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$, gegebenen Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

der Betrag der angeführten Determinante dritter Ordnung.

[B] Geradengleichung:

Eine Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ ist gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Zweipunkteform der Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 - x_1 \neq 0.$$

[B] Funktionaldeterminante:

Für eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

bezeichnet man den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

als Funktionaldeterminante.

▷ Die Umkehrung einer Koordinatentransformation, d.h., die Ermittlung von

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

aus einer Beziehung

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

ist nur dann möglich, wenn für mindestens einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gilt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

B **Wronski-Determinante:**
Determinante der Form

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

- ▷ Der Wert der Wronski-Determinante gibt Auskunft über die lineare Unabhängigkeit von Funktionen: Sind insbesondere $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung und ist für eine Stelle x_0 ihres gemeinsamen Definitionsbereiches $W(x_0) \neq 0$, so sind die Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linear unabhängig.

2 Matrizen

2.1 Einführendes Beispiel

Die Montage von drei verschiedenen Endprodukten E_1, E_2, E_3 erfolgt durch das Zusammensetzen von vier vorgefertigten Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 . Alle $Z_i, i = 1, 2, 3, 4$, werden aus drei Grundprodukten G_1, G_2, G_3 hergestellt.

Die benötigten Mengeneinheiten zur Herstellung einer Mengeneinheit der End- und Zwischenprodukte sind in folgenden Übersichten zusammengestellt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
E_1	2	1	3	0
E_2	3	2	1	1
E_3	0	3	1	2

	G_1	G_2	G_3
Z_1	3	1	5
Z_2	4	1	2
Z_3	0	1	3
Z_4	2	1	4

Es ist die Anzahl der Mengeneinheiten der Grundprodukte zu ermitteln, die zur Herstellung einer Mengeneinheit der Endprodukte erforderlich sind.

Lösung:

Zwischen End- und Zwischenprodukten besteht der Zusammenhang

$$E_1 = 2Z_1 + Z_2 + 3Z_3$$

$$E_2 = 3Z_1 + 2Z_2 + Z_3 + Z_4$$

$$E_3 = 3Z_2 + Z_3 + 2Z_4.$$

Setzt man in diese Gleichungen die entsprechenden Zusammenhänge von Zwischen- und Grundprodukten ein, so erhält man

$$E_1 = 10G_1 + 6G_2 + 21G_3$$

$$E_2 = 19G_1 + 7G_2 + 26G_3$$

$$E_3 = 16G_1 + 6G_2 + 17G_3.$$

Dieses Ergebnis kann in der folgenden übersichtlichen Form dargestellt werden.

	G_1	G_2	G_3
E_1	10	6	21
E_2	19	7	26
E_3	16	6	17

Das hier auftretende Zahlenschema mit drei Zeilen und drei Spalten nennt man (3,3)-Matrix. Auf der Menge aller Objekte dieser Art können Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation definiert und Operationen durchgeführt werden, die bei der Lösung vieler mathematischer und technischer Probleme von großem Nutzen sind.

- ▷ Mit Hilfe der Matrizenrechnung können z.B. bei höherstufigen Verflechtungen und größerem Zahlenmaterial die Ergebnisse mit relativ wenig Aufwand übersichtlich gestaltet werden.

2.2 Grundbegriffe

2.2.1 Definition und Gleichheit von Matrizen

Ein rechteckiges System von $m \cdot n$ Elementen a_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, heißt Matrix vom Typ m, n oder (m, n) -Matrix, und man schreibt

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{m,n} \quad (2.1)$$

$i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$.

- ▷ Im Unterschied zu Determinanten besitzen Matrizen keinen Wert; sie stellen Anordnungen von Elementen dar. Die Elemente können Zahlen, Vektoren, Polynome oder andere mathematische Objekte sein.

Anmerkung: Die Elemente a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ bilden die Hauptdiagonale von $\mathbf{A}_{m,n}$.

- [B] Der Verbrauch von Grundprodukten für Zwischenprodukte aus dem einführenden Beispiel kann durch die Matrix

$$A_{4,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ 4 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. (Die Hauptdiagonalelemente sind fett dargestellt.)

Gleichheit:

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind, d. h. die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten besitzen und $a_{ik} = b_{ik}$ für alle i und k gilt.

- ▷ Im Vergleich dazu sind Determinanten gleich, wenn sie denselben Wert haben, unabhängig von ihrer Ordnung und der Größe ihrer Elemente.

2.2.2 Spezielle Matrizen

Spaltenmatrix:

Matrix $\mathbf{A}_{m,1}$, die aus einer Spalte und m Zeilen besteht:

$$\mathbf{A}_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

$\mathbf{A}_{m,1}$ wird m -dimensionaler **Spaltenvektor** genannt.