Inhaltsverzeichnis

Teil I
Lineare Algebra

Gegenstand der linearen Algebra sind Gesamtheiten von Elementen, in denen algebraische Operationen definiert sind. Dazu gehören Determinanten und Matrizen sowie lineare Gleichungssysteme, die Gegenstand unserer Betrachtungen sind. Sie bilden die Grundlage für die Linearoptimierung, deren Elemente ebenfalls behandelt werden.

1 Determinanten

1.1 Einführendes Beispiel

Für ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

kann mit dem Additionsverfahren eine Lösung ermittelt werden. Im einzelnen erhält man

$$\begin{array}{rcrcr|l} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 & \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 & \cdot (-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & b_1a_{22} & \\ -a_{21}a_{12}x_1 & - & a_{22}a_{12}x_2 & = & -b_2a_{12} & + \\ \hline \multicolumn{5}{c}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2} & \end{array}$$

Mit $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ folgt

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

und in entsprechender Weise

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} .$$

Für den gemeinsamen Nenner von x_1 und x_2 kann man die symbolische Schreibweise

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

verwenden, wenn man für D den Wert $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ versteht.
Analog können der Zähler von x_1 und x_2 durch

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt werden.
Damit erhält man

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad D \neq 0.$$

▷ Dieses Verfahren, **Cramersche Regel** genannt, kann auch für n Gleichungen mit n Unbekannten angewandt werden. Der damit verbundene Rechenaufwand wächst für $n \geq 4$ mit zunehmendem n stark an.

1.2 Determinanten zweiter Ordnung

1.2.1 Definition

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante zweiter Ordnung** oder zweireihige Determinante und besitzt den Wert

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Anmerkungen:

1. Die Elemente a_{ik} der Determinante sind zwischen zwei senkrechten Strichen angeordnet.

2. Die Determinante besteht aus zwei **Zeilen** und aus zwei **Spalten**; Zeilen und Spalten nennt man **Reihen**.

3. Die Diagonale von links oben nach rechts unten heißt **Hauptdiagonale**, die Diagonale von links unten nach rechts oben heißt **Nebendiagonale**.

4. Für ein Element a_{ik} gibt der erste Index die Zeile, der zweite Index die Spalte an, in der sich das Element befindet.

Der **Wert einer zweireihigen Determinante** ist somit das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonale.

$\boxed{\text{B}}$ $$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 2 \cdot (-1) = 38\,.$$

1.2.2 Eigenschaften

Unter Verwendung der Eigenschaften von Determinanten können diese umgeformt und ihr Wert berechnet werden.

▷ Die folgenden Eigenschaften für zweireihige Determinanten sind auch für drei- und mehrreihige Determinanten gültig.

Erste Eigenschaft
Der Wert eine Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht, d. h. ihre Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen anordnet (sie „stürzt“).

B $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zweite Eigenschaft
Eine Determinante hat den Wert Null, wenn

- alle Elemente einer Reihe Null sind oder
- alle Elemente einer Reihe den entsprechenden Elementen einer parallelen Reihe proportional sind.

B $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} & ca_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Dritte Eigenschaft
Der Wert einer Determinante ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei parallele Reihen vertauscht.

B $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Vierte Eigenschaft
Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

B $$c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix}.$$

▷ Häufig wird die Umkehrung dieser Eigenschaft benutzt, indem man einen Faktor, den alle Elemente einer Reihe enthalten, vor die Determinante zieht.

Fünfte Eigenschaft
Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert.

B $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Sechste Eigenschaft
Der Wert einer Determinante ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, wenn das (die) Element(e) unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale Null ist (sind); eine solche Form der Determinante nennt man **Dreiecksform**.

B $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

1.3 Determinanten dritter Ordnung

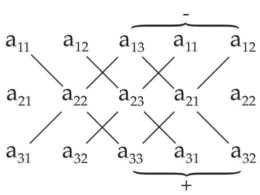
1.3.1 Definition und Wertberechnung

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante dritter Ordnung** oder dreireihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von D kann nach der Regel von Sarrus erfolgen.
Dazu werden zunächst die Elemente der ersten und zweiten Spalte nach den Elementen der dritten Spalte angeordnet. Es entsteht das Schema



Regel von Sarrus
Der Wert D einer Determinante dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist gleich der Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links oben nach rechts unten angeordneten Elemente, vermindert um die Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links unten nach rechts oben angeodneten Elemente:

$$\begin{aligned} D = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

B Es ist der Wert D von

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

zu ermitteln.
Mit dem Schema

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} D &= 2\cdot 1\cdot 2+3\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 0\cdot 2-4\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot 0\cdot 3 \\ &= -8. \end{aligned}$$

1.4 Determinanten n-ter Ordnung

1.4.1 Definition und Entwicklungssatz

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|, \quad i,k = 1,2,\dots,n$$

heißt **Determinante n-ter Ordnung** oder n-reihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von D kann nach dem Entwicklungssatz von Laplace erfolgen. Dazu benötigt man die Begriffe Unterdeterminante und Adjunkte.

Die **Unterdeterminante** D_{ik} zum Element a_{ik} einer Determinante D ist die Determinante, die entsteht, indem man in D die Elemente der i-ten Zeile und der k-ten Spalte streicht.

▷ Von einer Determinante n-ter Ordnung können n^2 Unterdeterminanten je $(n-1)$-ter Ordnung gebildet werden.

Die **Adjunkte** A_{ik} ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante D_{ik}:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}.$$

$\boxed{\text{B}}$ Für D_{12} und A_{12} von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

▷ Es ist $D_{ik} = A_{ik}$ für geradzahliges $i+k$ und $D_{ik} = -A_{ik}$ für ungeradzahliges $i+k$.

Entwicklungssatz von Laplace
Der Wert von D kann durch Entwicklung der Determinante nach den Elementen einer beliebigen Reihe erfolgen, wobei als Entwicklungsvorschrift

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

für die Entwicklung von D nach den Elementen der i-ten Zeile und

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

für die Entwicklung von D nach den Elementen der k-ten Spalte gilt.

▷ Der Rechenaufwand beim Berechnen des Wertes einer Determinante wird verringert, indem man die Determinante nach den Elementen derjenigen Reihe entwickelt, die die meisten Nullen enthält.

B Durch Entwicklung nach den Elementen der zweiten Spalte erhält man

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)(3-2) - 3(-2-4) = 17.$$

1.4.2 Vorteilhafte Berechnung des Wertes einer Determinante

Neben der Berechnung des Wertes einer Determinante unter Verwendung des Entwicklungssatzes können Determinanten vorteilhaft berechnet werden, indem man

- möglichst viele Nullen in einer Reihe durch Ausnutzung bestimmter Eigenschaften erzeugt und danach den Entwicklungssatz anwendet,
- sie in eine Dreiecksform überführt.

B Der Wert der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}$$

ist zu berechnen

1. durch Erzeugen möglichst vieler Nullen in einer Reihe,
2. durch Überführen in eine Dreiecksform.

Lösung:

1. Unter Verwendung von $a_{23} = 1$ (Pivotelement: Element, auf das wir uns bei der Nullengewinnung stützen) werden die übrigen Elemente der dritten Spalte in Null überführt. Das geschieht durch Anwendung der Eigenschaften für Determinanten. (Die Faktoren und Operationen sind außerhalb der Determinante vermerkt.)

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & \boxed{1} & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}
\begin{array}{lll} \uparrow + & & \\ \cdot(-3) & \cdot(-1) & \cdot 2 \\ & \downarrow + & \\ & & \downarrow + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} -13 & -1 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nach Anwendung des Entwicklungssatzes und entsprechenden Umformungen der Determinante dritter Ordnung erhält man

$$
\begin{aligned}
D &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} -13 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 3 \cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} +13 & +1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix} \\ \xleftarrow{+} \cdot(-4) \end{array} \\
&= 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\
&= (-9) \cdot (-15 + 16) = -9.
\end{aligned}
$$

2. Nach Vertauschen von zweiter mit erster Zeile sowie dritter mit erster Spalte und anschließender Nullenermittlung erhält man

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 13 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -14 \end{vmatrix}
\begin{array}{lll} \cdot(-3) & \cdot(-1) & \cdot 2 \\ \downarrow + & & \\ & \downarrow + & \\ & & \downarrow + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{vmatrix}
\begin{array}{ll} & \\ \cdot 1 & \cdot 3 \\ \downarrow + & \\ & \downarrow + \end{array}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & -27 & -24 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-\frac{9}{5}) \\ \downarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt das Ergebnis

$$D = 1 \cdot (-1) \cdot (-15) \cdot (-\frac{3}{5}) = -9.$$

1.4.3 Weitere Anwendungen

B **Tetraedervolumen**:
Vier nicht in einer Ebene liegende Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, bilden ein Tetraeder. Die Maßzahl V seines Volumens ist

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

der Betrag der angeführten Determinante vierter Ordnung.

B **Ebenengleichung**:
Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$, bilden eine Ebene. Die Ebenengleichung lautet

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Normalform der Ebenengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

B **Dreiecksfläche**:
Die Maßzahl A der Fläche eines durch die Eckpunkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2$, gegebenen Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

der Betrag der angeführten Determinante dritter Ordnung.

B **Geradengleichung**:
Eine Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1, y_2)$ und $P_2(x_2, y_2)$ ist gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Zweipunkteform der Geraden

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad x_2 - x_1 \neq 0.$$

B **Funktionaldeterminante**:
Für eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$$

bezeichnet man den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

als Funktionaldeterminante.

▷ Die Umkehrung einer Koordinatentransformation, d.h., die Ermittlung von

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}$$

aus einer Beziehung

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$$

ist nur dann möglich, wenn für mindestens einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gilt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

B **Wronski-Determinante**:
Determinante der Form

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

▷ Der Wert der Wronski–Determinante gibt Auskunft über die lineare Unabhängigkeit von Funktionen: Sind insbesondere $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung und ist für eine Stelle x_0 ihres gemeinsamen Definitionsbereiches $W(x_0) \neq 0$, so sind die Funktionen
$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linear unabhängig.

2 Matrizen

2.1 Einführendes Beispiel

Die Montage von drei verschiedenen Endprodukten E_1, E_2, E_3 erfolgt durch das Zusammensetzen von vier vorgefertigten Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3. Alle Z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, werden aus drei Grundprodukten G_1, G_2, G_3 hergestellt.
Die benötigten Mengeneinheiten zur Herstellung einer Mengeneinheit der End- und Zwischenprodukte sind in folgenden Übersichten zusammengestellt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
E_1	2	1	3	0
E_2	3	2	1	1
E_3	0	3	1	2

	G_1	G_2	G_3
Z_1	3	1	5
Z_2	4	1	2
Z_3	0	1	3
Z_4	2	1	4 .

Es ist die Anzahl der Mengeneinheiten der Grundprodukte zu ermitteln, die zur Herstellung einer Mengeneinheit der Endprodukte erforderlich sind.

Lösung:
Zwischen End- und Zwischenprodukten besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} E_1 &= 2Z_1 + Z_2 + 3Z_3 \\ E_2 &= 3Z_1 + 2Z_2 + Z_3 + Z_4 \\ E_3 &= 3Z_2 + Z_3 + 2Z_4 \,. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen die entsprechenden Zusammenhänge von Zwischen- und Grundprodukten ein, so erhält man

$$\begin{aligned} E_1 &= 10G_1 + 6G_2 + 21G_3 \\ E_2 &= 19G_1 + 7G_2 + 26G_3 \\ E_3 &= 16G_1 + 6G_2 + 17G_3 \,. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann in der folgenden übersichtlichen Form dargestellt werden.

	G_1	G_2	G_3
E_1	10	6	21
E_2	19	7	26
E_3	16	6	17 .

Das hier auftretende Zahlenschema mit drei Zeilen und drei Spalten nennt man (3,3)-Matrix. Auf der Menge aller Objekte dieser Art können Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation definiert und Operationen durchgeführt werden, die bei der Lösung vieler mathematischer und technischer Probleme von großem Nutzen sind.

▷ Mit Hilfe der Matrizenrechnung können z.B. bei höherstufigen Verflechtungen und größerem Zahlenmaterial die Ergebnisse mit relativ wenig Aufwand übersichtlich gestaltet werden.

2.2 Grundbegriffe

2.2.1 Definition und Gleichheit von Matrizen

Ein rechteckiges System von $m \cdot n$ Elementen a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, heißt Matrix vom Typ m, n oder (m, n)-Matrix, und man schreibt

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{m,n} \tag{2.1}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

▷ Im Unterschied zu Determinanten besitzen Matrizen keinen Wert; sie stellen Anordnungen von Elementen dar. Die Elemente können Zahlen, Vektoren, Polynome oder andere mathematische Objekte sein.

Anmerkung: Die Elemente a_{ii}, $\quad i = 1, 2, \ldots, \min(m, n)$ bilden die Hauptdiagonale von $\mathbf{A}_{m,n}$.

$\boxed{\text{B}}$ Der Verbrauch von Grundprodukten für Zwischenprodukte aus dem einführenden Beispiel kann durch die Matrix

$$A_{4,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 5 \\ 4 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. (Die Hauptdiagonalelemente sind fett dargestellt.)

Gleichheit:
Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind, d. h. die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten besitzen und $a_{ik} = b_{ik}$ für alle i und k gilt.

▷ Im Vergleich dazu sind Determinanten gleich, wenn sie denselben Wert haben, unabhängig von ihrer Ordnung und der Größe ihrer Elemente.

2.2.2 Spezielle Matrizen

Spaltenmatrix:
Matrix $\mathbf{A}_{m,1}$, die aus einer Spalte und m Zeilen besteht:

$$\mathbf{A}_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

$\mathbf{A}_{m,1}$ wird m-dimensionaler **Spaltenvektor** genannt.