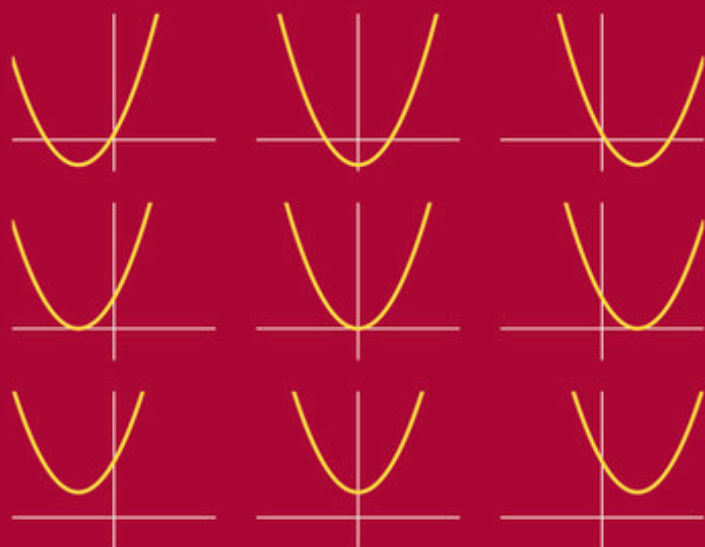


C. Gellrich  
R. Gellrich



# MATHEMATIK –

Band 1

## EIN LEHR- UND ÜBUNGSBUCH

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Edition  
Harri   
Deutsch



**Mathematik**  
**Ein Lehr- und Übungsbuch**  
**Band 1**





Edition  
Harri   
Deutsch

# Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

von

Regina Gellrich  
Carsten Gellrich

**5., korrigierte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 55989**

## **Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch**

Band 1: Gellrich/Gellrich;  
Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;  
Lineare Algebra, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;  
Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis  
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Band 4: Schark/Overhagen;  
Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen

5., korrigierte Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5599-6

ISBN 978-3-8085-5809-6 (E-Book)

Unter Verwendung vorzugsweise der Aufgaben des Werkes  
*Schalk, Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten*  
mit Genehmigung des RENIETS VERLAG GmbH, Wien.

Für die diesem Werk entnommenen Teile:

© 1986–1989 by RENIETS VERLAG GmbH, Wien

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

# Vorwort

Mit diesem Buch halten Sie bereits die fünfte Auflage des Bandes 1 der Reihe „MATHEMATIK – ein Lehr- und Übungsbuch“ in der Hand. Diese Reihe wendet sich an den Adressatenkreis der Studenten von Fachhochschulen, Fachoberschulen, Technikerschulen und ähnlichen Bildungseinrichtungen, ist aber auch für das Selbststudium geeignet. Sie berücksichtigt neben der notwendigen breiten Darstellung der klassischen Mathematik in hohem Maße moderne Entwicklungen und die Einbeziehung der Rechentechnik zum Lösen der Aufgaben.

Bei der methodischen Aufbereitung des Lehrstoffes wird in dieser Reihe davon ausgegangen, dass der Nutzer die Mathematik nicht als Wissenschaft betreiben will, sondern als Instrument zur Lösung der in seinem Fachgebiet anstehenden Aufgaben und Probleme. Daher werden diejenigen Stoffgebiete, mathematischen Methoden und Verfahren besonders berücksichtigt, die für den Anwender von Bedeutung sind. Die Theorie wird in leicht verständlicher Form dargestellt. Auf aufwendige Beweise und theoretische Untersuchungen wird bewusst verzichtet. Das Grundanliegen der Reihe besteht hingegen darin, dem Leser durch zahlreiche gut kommentierte Beispiele Hinweise dafür zu geben, wie man an das Lösen von Aufgaben herangehen muss. Eine Vielzahl von Aufgaben mit Lösungen geben jedem die Möglichkeit, seine Fähigkeiten zu erweitern und sein Wissen und Können zu kontrollieren. Die Herausgabe der fünften Auflage des vorliegenden Bandes 1 dokumentiert den Erfolg des Konzeptes dieser Reihe.

Der Band 1 ist als Vorbereitungsband aufzufassen, der (mit Ausnahme der Kapitel 5 und 7) diejenigen Stoffgebiete umfasst, die als Basis für ein erfolgreiches Studium der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften unbedingt notwendig sind. Insbesondere werden auch Ungleichungen und Ungleichungssysteme behandelt, um die Basis für weitere Themen der höheren Mathematik, wie der linearen Optimierung, zu verbreitern. Deshalb ist dieses Buch zur Wiederholung und Einstimmung auf das Studium sehr zu empfehlen. Die Erfahrungen von Lehrenden an Hochschulen zeigen immer wieder, dass viele Studenten im Fach Mathematik nicht daran scheitern, dass sie schwierige Aufgaben der Mathematik nicht lösen können, sondern daran, dass Mängel in der Handhabung elementarer Zusammenhänge auftreten.

Inzwischen haben bereits viele Jahrgänge von mathematisch interessierten Lesern mit diesem Buch gearbeitet und die große Anzahl positiver Rückmeldungen zeigt, dass es ihnen bei ihren Studien hilfreich war. Zum anderen haben gerade die Leser mit ihren Hinweisen und Korrekturvorschlägen einen großen Anteil daran, dass die Qualität des Buches stetig zunahm. Die Autoren und der Verlag möchten sich auf diesem Wege herzlich dafür bedanken.

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass der überwiegende Teil der Aufgaben und Lösungen sowie einige Beispiele aus dem Lehrwerk MATHEMATIK von SCHALK aus dem RENIETS-Verlag Wien übernommen wurde. Darunter sind sehr viele anwendungsorientierte Aufgaben aus den unterschiedlichsten Wissensgebieten, so dass dem Leser das große Spektrum mathematischer Fragestellungen bewusst wird und jeder hinreichend Aufgaben sei-

nes Fachgebietes findet. Wir danken dem RENIETS-Verlag Wien und seinen Autoren für die großzügige Bereitschaft, uns diesen Fundus an Aufgaben zur Verfügung zu stellen.

Wir Autoren bedanken uns sehr herzlich bei Dr. Marianne Kreul und Prof. Dr. Hans Kreul (†) für die Vielzahl von Anregungen und Hinweisen, die sie uns aus ihrem reichen Erfahrungsschatz beim Verfassen von Lehrbüchern sowie aus ihrer Lehrtätigkeit an Hochschulen gaben, für die fruchtbaren Diskussionen, die uns wertvolle Anregungen für die Gestaltung des Manuskripts lieferten, sowie nicht zuletzt für die Unterstützung bei der Bearbeitung des Buches.

Wie stets sind wir an der Meinung der Nutzer dieses Buches interessiert und bitten darum, uns bisher noch nicht erkannte Fehler mitzuteilen. Die Adressen für Zuschriften und E-Mails sind

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel  
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Str. 23  
42781 Haan-Gruiten  
lektorat@europa-lehrmittel.de  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Wir wünschen allen mathematisch Interessierten, die mithilfe dieses Buches ihr mathematisches Wissen vertiefen und ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten auf diesem Gebiet verbessern wollen, viel Erfolg und Freude beim Lernen und beim Lösen der Aufgaben.

Regina und Carsten Gellrich

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Was man beherrschen sollte</b>	<b>11</b>
1.1	Elemente der Mengenlehre	11
1.1.1	Begriffsbestimmung	11
1.1.2	Darstellung von Mengen	11
1.1.3	Beziehungen zwischen Mengen	13
1.2	Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen	16
1.2.1	Einführung	16
1.2.2	Das Rechnen mit Klammerausdrücken	16
1.2.3	Bruchrechnung	20
1.2.4	Partialdivision	24
1.3	Das Lösen von Gleichungen	34
1.3.1	Begriffsbestimmungen	34
1.3.2	Zum Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen	35
1.3.3	Der VIETASche Wurzelsatz	47
1.4	Einfache Gleichungen höheren Grades	49
1.4.1	Begriffsbestimmungen	49
1.4.2	Der VIETASche Wurzelsatz	50
1.4.3	Das Lösen von speziellen Gleichungen höheren Grades	52
1.4.3.1	Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen	52
1.4.3.2	Gleichungen höheren Grades, von denen mindestens eine Lösung bekannt ist	54
1.4.4	Das HORNER-Schema	56
1.5	Lineare und quadratische Funktion	62
1.5.1	Die lineare Funktion	62
1.5.2	Die quadratische Funktion	69
1.5.3	Funktion und Bestimmungsgleichung	74
1.6	Proportionen	77
1.6.1	Begriffsbestimmungen	77
1.6.2	Proportionalität	80
1.6.2.1	Direkte Proportionalität	80
1.6.2.2	Indirekte Proportionalität	81
1.6.3	Proportionen und Bestimmungsgleichungen	84
1.6.4	Prozent- und Zinsrechnung	89
<b>2</b>	<b>Potenzen, Wurzeln und Logarithmen</b>	<b>97</b>
2.1	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	97
2.1.1	Begriffserklärungen	97



---

2.1.2	Potenzgesetze . . . . .	99
2.1.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen . . . . .	99
2.1.2.2	Multiplikation und Division von Potenzen . . . . .	100
2.2	Potenzen mit gebrochenen Exponenten . . . . .	106
2.2.1	Die Umkehrungen der Potenzrechnung . . . . .	106
2.2.2	Grundbegriffe der Wurzelrechnung . . . . .	107
2.2.3	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten . . . . .	109
2.2.4	Das Rechnen mit Wurzeln . . . . .	111
2.2.5	Potenzen mit reellen Exponenten . . . . .	113
2.2.6	Zur Berechnung von Potenzen mit beliebigen Exponenten mit dem Taschenrechner . . . . .	114
2.3	Logarithmen . . . . .	119
2.3.1	Begriffserklärungen . . . . .	119
2.3.2	Das Rechnen mit Logarithmen . . . . .	121
2.3.3	Logarithmensysteme . . . . .	123
2.3.3.1	Häufig auftretende Logarithmensysteme . . . . .	123
2.3.3.2	Zur Ermittlung von Logarithmen mit dem Taschenrechner . . . . .	124
2.3.3.3	Beziehungen zwischen Logarithmensystemen mit unterschiedlichen Basen . . . . .	126
2.4	Gleichungen mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen . . . . .	129
2.4.1	Wurzelgleichungen . . . . .	129
2.4.2	Exponentialgleichungen . . . . .	134
2.4.3	Logarithmische Gleichungen . . . . .	138
2.4.4	Vermischte Aufgaben . . . . .	141
<b>3</b>	<b>Trigonometrie</b> . . . . .	<b>146</b>
3.1	Winkelmessung . . . . .	146
3.2	Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck . . . . .	149
3.2.1	Begriffe . . . . .	149
3.2.2	Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck . . . . .	150
3.2.3	Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für spitze Winkel . . . . .	151
3.2.4	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck . . . . .	155
3.3	Die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel . . . . .	165
3.3.1	Erweiterung des Begriffes der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkel . . . . .	165
3.3.2	Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel . . . . .	168
3.3.3	Vereinfachte Umrechnung von Winkeln aus Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt . . . . .	172
3.4	Berechnungen am allgemeinen Dreieck . . . . .	175
3.4.1	Der Sinussatz . . . . .	175
3.4.2	Der Kosinussatz . . . . .	180
3.5	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen . . . . .	191
3.5.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen ein und desselben Winkels . . . . .	191

3.5.2	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen unterschiedlicher Winkel . . . . .	193
3.6	Goniometrische Gleichungen . . . . .	201
3.6.1	Begriffsbestimmung . . . . .	201
3.6.2	Das Lösen goniometrischer Gleichungen . . . . .	201
3.7	Vermischte Aufgaben . . . . .	209
<b>4</b>	<b>Funktionen</b> . . . . .	<b>214</b>
4.1	Abbildungen und Funktionen . . . . .	214
4.1.1	Der Begriff der Abbildung . . . . .	214
4.1.2	Der Begriff der Funktion . . . . .	216
4.2	Wichtige Eigenschaften von Funktionen . . . . .	222
4.2.1	Beschränktheit . . . . .	222
4.2.2	Monotonie . . . . .	224
4.2.3	Symmetrie . . . . .	227
4.2.4	Stetigkeit . . . . .	229
4.3	Die Umkehrfunktion . . . . .	236
4.3.1	Die Umkehrung einer Abbildung . . . . .	236
4.3.2	Der Begriff der Umkehrfunktion . . . . .	239
4.4	Grundfunktionen . . . . .	243
4.4.1	Potenzfunktionen . . . . .	243
	4.4.1.1 Potenzfunktionen mit ganzen positiven Exponenten . . . . .	243
	4.4.1.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten . . . . .	246
	4.4.1.3 Die Potenzfunktion $y = x^0$ . . . . .	247
	4.4.1.4 Potenzfunktionen mit reellen Exponenten . . . . .	247
	4.4.1.5 Zusammenhang zwischen der Potenzfunktion $y = x^n$ und der Wurzelfunktion . . . . .	249
4.4.2	Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	252
4.4.3	Die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen . . . . .	254
4.4.4	Die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen . . . . .	264
4.5	Grafisch Darstellung von Funktionen durch Synthese . . . . .	274
4.6	Überlagerung von Schwingungen . . . . .	287
<b>5</b>	<b>Komplexe Zahlen</b> . . . . .	<b>295</b>
5.1	Grundbegriffe . . . . .	295
5.1.1	Einführung der komplexen Zahlen . . . . .	295
5.1.2	Grafisch Veranschaulichung komplexer Zahlen . . . . .	297
5.2	Die trigonometrische und die Exponentialform komplexer Zahlen . . . . .	301
5.2.1	Die trigonometrische Darstellungsform . . . . .	301
	5.2.1.1 Umrechnung von der arithmetischen in die trigonometrische Form . . . . .	303
	5.2.1.2 Umrechnung von der trigonometrischen in die arithmetische Form . . . . .	305
5.2.2	Die Exponentialform . . . . .	305
5.3	Die vier Grundrechenarten im Bereich der komplexen Zahlen . . . . .	307
5.4	Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren . . . . .	314

---

5.5	Lösen algebraischer Gleichungen im Komplexen . . . . .	320
5.6	Anwendungen in der Elektrotechnik . . . . .	325
<b>6</b>	<b>Ungleichungen</b> . . . . .	<b>330</b>
6.1	Begriffsbestimmung . . . . .	330
6.2	Rechenregeln für Ungleichungen . . . . .	331
6.3	Das Lösen von Ungleichungen . . . . .	333
6.3.1	Zusammenhänge zwischen Ungleichung, Gleichung und Funktion . . . . .	333
6.3.2	Grafisch Verfahren zur Lösung von Ungleichungen . . . . .	336
6.3.3	Rechnergestützte Lösung von Ungleichungen . . . . .	340
6.4	Systeme von Ungleichungen . . . . .	342
<b>7</b>	<b>Einige mathematische Grundlagen der Informatik</b> . . . . .	<b>351</b>
7.1	Zahlendarstellung . . . . .	351
7.1.1	Darstellung von Zahlen in Positionssystemen . . . . .	351
	7.1.1.1 Umrechnung von Zahlen eines beliebigen Positionssystems in Dezimalzahlen . . . . .	353
	7.1.1.2 Umrechnung von Dezimalzahlen in ein anderes Positionssystem . . . . .	355
	7.1.1.3 Besonderheiten beim Umwandeln von Dualzahlen in Oktal- oder Hexadezimalzahlen und umgekehrt . . . . .	359
7.1.2	Fest- und Gleitkommadarstellung von Zahlen . . . . .	361
	7.1.2.1 Darstellung ganzer Zahlen . . . . .	362
	7.1.2.2 Darstellung reeller Zahlen . . . . .	363
7.1.3	Numerische Effekte beim Rechnen mit dem Computer . . . . .	367
7.2	Elemente der BOOLEschen Algebra . . . . .	370
7.2.1	Grundlagen der Aussagenlogik . . . . .	370
	7.2.1.1 Verknüpfungen von Aussagen . . . . .	371
7.2.2	Einführung in die Schaltalgebra . . . . .	374
	7.2.2.1 Grundsaltungen . . . . .	374
	7.2.2.2 Analyse und Synthese digitaler Schaltungen mittels Schaltzustandstabelle . . . . .	379
	7.2.2.3 Rechengesetze der Schaltalgebra . . . . .	381
<b>8</b>	<b>Lösungen der Aufgaben</b> . . . . .	<b>390</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>475</b>

# 1 Was man beherrschen sollte

## 1.1 Elemente der Mengenlehre

### 1.1.1 Begriffsbestimmung

**Definitio :**

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte zu einer Gesamtheit.

Mengen werden in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet. Die einzelnen durch eine Menge zusammengefassten Objekte werden **Elemente** der Menge genannt. Man bezeichnet sie mit Kleinbuchstaben.

Durch das Symbol  $\in$  wird ausgedrückt, dass ein Element einer Menge angehört. So besagt

$$x \in M,$$

dass das Element  $x$  ein Element der Menge  $M$  ist. Dagegen bedeutet

$$y \notin M,$$

dass  $y$  der Menge  $M$  nicht angehört.

### 1.1.2 Darstellung von Mengen

Es gibt unterschiedliche Arten, Mengen darzustellen.

a) *Durch Angabe ihrer Elemente.*

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} 1.1 \quad A &= \{1, 4, 9, 16\} \\ B &= \{1, 4, 9, 16, \dots, 625\} \\ C &= \{1, 4, 9, 16, \dots\}. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, dass es Mengen mit endlich vielen Elementen, aber auch Mengen mit unendlich vielen Elementen (endliche und unendliche Mengen) gibt.

Für häufig auftretende Mengen werden feste Abkürzungen gewählt. So bezeichnet

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  die Menge der *natürlichen Zahlen*,

$\mathbf{G} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  die Menge der *ganzen Zahlen*,

$\mathbf{R}$  die Menge der *reellen Zahlen*,

$\emptyset$  die so genannte *leere Menge*.

Eine leere Menge enthält *kein Element*. Man beschreibt die leere Menge auch in der Form  $\emptyset = \{\}$ . Sie ist von der Menge  $\{0\}$  zu unterscheiden. Während die leere Menge *kein Element* besitzt, enthält die Menge  $\{0\}$  *ein Element*, nämlich 0.

b) *Durch Beschreibung ihrer Elemente.*

**Beispiel:**

$$1.2 \quad D = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}$$

Diese Schreibweise wird gelesen:  $D$  ist die Menge aller  $x$  mit der Eigenschaft, dass  $x$  enthalten ist in der Menge der natürlichen Zahlen *und* dass  $x < 10$  ist. Damit enthält  $D$  die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, so dass  $D$  auch in der Form

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

angegeben werden kann.

$$E = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$$

ist diejenige Menge, die alle Lösungen der Gleichung  $x^2 - x - 6 = 0$  enthält. Die Lösungen dieser Gleichung lauten  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 3$ , so dass die obige Mengenschreibweise für  $E$  gleichbedeutend ist mit  $E = \{-2, 3\}$ .

$$F = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq 4\}$$

enthält alle reellen Zahlen zwischen  $x = 0$  und  $x = 4$  einschließlich der Werte  $x = 0$  und  $x = 4$ .

$$H = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$$

enthält alle reellen Zahlen zwischen  $x = a$  und  $x = b$ , wobei jedoch im Unterschied zur Menge  $F$  hier die beiden Werte  $x = a$  und  $x = b$  *nicht* mit zur Menge  $H$  gehören.

Mengen wie  $F$  und  $H$  treten in der Mathematik häufig auf, so z. B. als Definitionsbereich und Wertebereich von Funktionen. Deshalb gibt es auch für derartige Mengen eine abkürzende Schreibweise. Sie werden *Intervalle* genannt, und man schreibt z. B. für  $F$  und  $H$ :

$$F = [0; 4] \quad \text{und} \quad H = (a; b).$$

Bei  $F$  spricht man von einem beiderseits *abgeschlossenen Intervall*, weil die beiden Endpunkte  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 4$  mit zur Menge  $F$  dazugehören. Bei  $H$  hingegen handelt es sich um ein beiderseits *offenes Intervall*, denn die beiden Endpunkte  $x_1 = a$  und  $x_2 = b$  gehören *nicht* zur Menge  $H$ . *Abgeschlossene Intervalle* werden durch *eckige Klammern*, *offene Intervalle* durch *runde Klammern* gekennzeichnet.

Es gibt auch *einseitig geschlossene* (bzw. *einseitig offene*) *Intervalle*. Bei ihnen gehört nur einer der beiden Eckpunkte der Menge an, der andere jedoch nicht.

**Beispiel:**

1.3  $L_1 = (0; 10]$ , (die Menge aller reellen Zahlen, die größer sind als 0 bis einschließlich 10) – ein *linksseitig offenes* und

$L_2 = [0; \infty)$ , (die Menge aller positiven reellen Zahlen) – ein *rechtsseitig offenes* Intervall.

c) *Durch grafische Interpretation.*

- Alle Elemente einer Menge werden als Punkte einer Fläche dargestellt. Diese Darstellungsweise wird vor allem dazu verwendet, Verknüpfungen zwischen Mengen zu verdeutlichen. (Vgl. Abschnitt 1.1.3)
- Zahlenmengen werden als Punkte oder als Strecken einer Zahlengeraden dargestellt.

Auf diese Weise lassen sich die Mengen  $A, D, F, L_1$  und  $L_2$  der Beispiele 1.1., 1.2. und 1.3. wie folgt veranschaulichen:

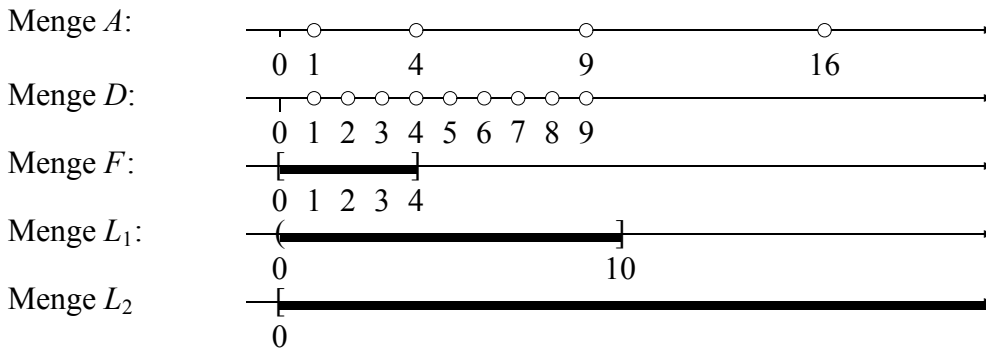


Bild 1.1

### 1.1.3 Beziehungen zwischen Mengen

- Eine Menge  $M_2$  wird **Teilmenge** von  $M_1$  genannt, wenn *jedes* Element von  $M_2$  auch Element von  $M_1$  ist (vgl. Bild 1.2).  
Schreibweise:  $M_2 \subseteq M_1$ .  
Gibt es dabei in  $M_1$  noch Elemente, die  $M_2$  *nicht* angehören, dann heißt  $M_2$  eine *echte Teilmenge* von  $M_1$ . Schreibweise:  $M_2 \subset M_1$ .
- Zwei Mengen  $M_1$  und  $M_2$  sind **einander gleich**, wenn sie beide genau die gleichen Elemente besitzen.  
Schreibweise:  $M_1 = M_2$ .  
Ist beispielsweise  $M_1$  die Menge aller geraden Zahlen und  $M_2$  die Menge aller Zahlen, die durch 2 teilbar sind, dann gilt  $M_1 = M_2$ .
- Die **Vereinigung** zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthält alle diejenigen Elemente, die  $M_1$  *oder*  $M_2$  (oder beiden Mengen) angehören (vgl. Bild 1.3).  
Schreibweise:  $M_1 \cup M_2$ .

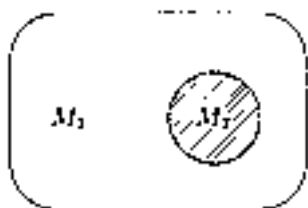


Bild 1.2

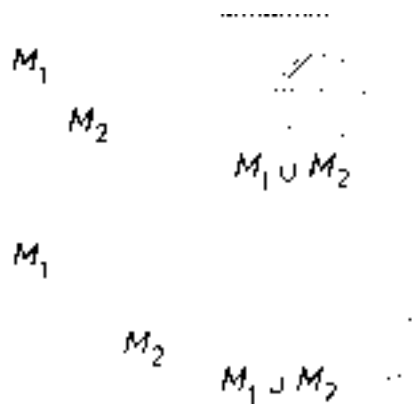


Bild 1.3

**Beispiele:**

1.4 Wenn  $M_1 \cup M_2 = M_1$  ist, dann folgt daraus  $M_2 \subseteq M_1$ . Veranschaulichen Sie sich diese Eigenschaft anhand einer Skizze, in der die beiden Mengen als Flächen dargestellt sind.

1.5 Wenn  $M_1 = (0; 5]$  und  $M_2 = [3; 8)$ , dann ist  $M_1 \cup M_2 = (0; 8)$  (vgl. Bild 1.4).

- Der **Durchschnitt** zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthält alle diejenigen Elemente, die *sowohl*  $M_1$  *als auch*  $M_2$  angehören.  
Schreibweise:  $M_1 \cap M_2$ .

**Beispiele:**

1.6 Der Durchschnitt zweier sich teilweise überlappender Mengen  $M_1$  und  $M_2$  ist im Bild 1.5 veranschaulicht. Überzeugen Sie sich durch eine ähnliche Skizze, dass der folgende Satz gilt:

Wenn  $M_1 \cap M_2 = M_1$ , dann folgt daraus  
 $M_1 \subseteq M_2$

1.7 Zwei Mengen, die *keine gemeinsamen Elemente* besitzen, heißen *disjunkt* zueinander. Für zwei *disjunkte* Mengen  $M_1$  und  $M_2$  gilt

$M_1 \cap M_2 = \emptyset = \{ \}$ .  
 (Vgl. dazu Bild 1.6)

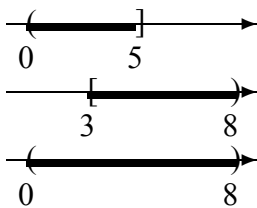


Bild 1.4

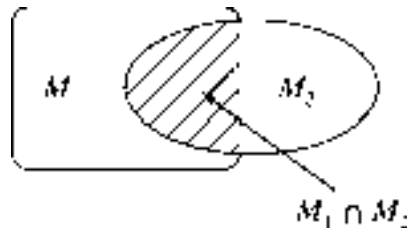


Bild 1.5

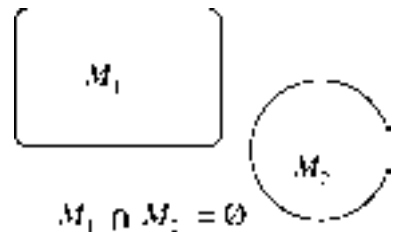


Bild 1.6

**Beispiel:**

1.8 Für die Intervalle  $M_1 = (0; 5]$  und  $M_2 = [3; 8)$  (vgl. Beispiel 1.5.), wird  
 $M_1 \cap M_2 = [3; 5]$ .

Prüfen Sie dies bitte anhand einer Skizze nach! Vergewissern Sie sich dabei insbesondere, dass die beiden Endpunkte  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 5$  Elemente der Durchschnittsmenge  $M_1 \cap M_2$  sind.

- Die **Differenz** zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthält alle diejenigen Elemente von  $M_1$ , die *nicht* Elemente von  $M_2$  sind.  
Schreibweise:  $M_1 \setminus M_2$ .

**Beispiele:**

1.9 Die beiden Differenzmengen  $M_1 \setminus M_2$  und  $M_2 \setminus M_1$  zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , die gemeinsame Elemente besitzen, sind in Bild 1.7 dargestellt.

1.10 Für zwei disjunkte Mengen  $M_1$  und  $M_2$  gilt  
 $M_1 \setminus M_2 = M_1$  und  $M_2 \setminus M_1 = M_2$   
 (vgl. dazu Bild 1.8).

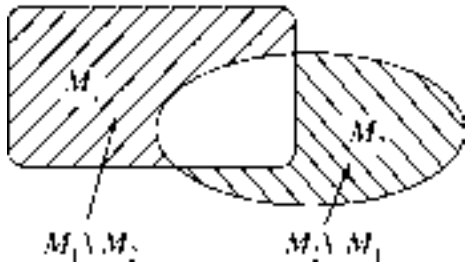


Bild 1.7

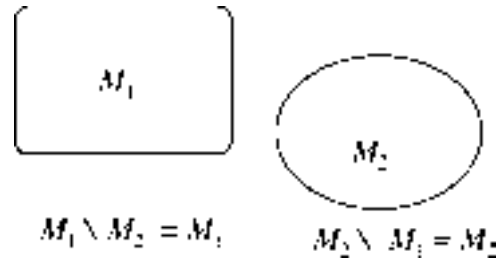


Bild 1.8

- 1.11** Für die beiden Intervalle  $M_1 = (0; 5]$  und  $M_2 = [3; 8)$  (vgl. Beispiele 1.5. und 1.8.) gilt  $M_1 \setminus M_2 = (0; 3)$  und  $M_2 \setminus M_1 = (5; 8)$ .

Prüfen Sie dies wiederum anhand einer Skizze nach, und überzeugen Sie sich davon, dass die beiden Eckpunkte  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 5$  *keiner* der beiden Differenzmengen angehören.

### Aufgaben:

- 1.1** Die Leerstellen sind durch Verwendung der Symbole  $\subseteq$  bzw.  $\not\subseteq$  zu vervollständigen!  
 $M_1 = \{3, 4, 5\}$ ,  $M_2 = \{5, 3\}$ ,  $M_3 = \{5, 6, 7\}$ ,  $M_4 = \{ \}$   
**a)**  $M_1 \dots M_2$    **b)**  $M_2 \dots M_1$    **c)**  $M_2 \dots M_3$    **d)**  $M_3 \dots M_4$
- 1.2** Von der Menge  $M = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 10 > x > 2\}$  sind folgende Teilmengen zu bestimmen:  
**a)**  $A$ , Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen von  $M$   
**b)**  $B$ , Menge aller geraden Zahlen von  $M$   
**c)**  $C$ , Menge aller ungeraden Zahlen von  $M$
- 1.3**  
**a)** Können zwei endliche Mengen, die eine verschiedene Anzahl von Elementen haben, jemals gleich sein?  
**b)** Sind zwei endliche Mengen, die eine gleiche Anzahl von Elementen haben, immer gleich?  
**c)** Haben zwei gleiche Mengen immer die gleiche Anzahl von Elementen?
- 1.4** Es sind die Mengen  $M_1 = \{3, 4, 5\}$ ,  $M_2 = \{1, 3, 4\}$ ,  $M_3 = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ ,  $M_4 = \{ \}$  gegeben. Man ermittle:  
**a)**  $M_1 \cap M_2$    **b)**  $M_2 \cap M_3$    **c)**  $M_1 \cap M_1$    **d)**  $M_1 \cap M_4$    **e)**  $M_1 \cap M_3$    **f)**  $M_4 \cap M_3$
- 1.5** Es sind die Mengen  $M_1 = \{2; 4; 9\}$ ,  $M_2 = \{1; 2; 3\}$ ,  $M_3 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}$ ,  $M_4 = \{ \}$  gegeben. Man ermittle:  
**a)**  $M_1 \cup M_2$    **b)**  $M_2 \cup M_3$    **c)**  $M_4 \cup M_4$    **d)**  $M_2 \cup M_4$    **e)**  $M_4 \cup M_1$    **f)**  $M_1 \cup M_3$
- 1.6** Es sind die Mengen  $M_1 = \{1; 2; 3\}$ ,  $M_2 = \{3; 7\}$ ,  $M_3 = \{4; 7\}$  gegeben. Man ermittle:  
**a)**  $M_1 \setminus M_2$    **b)**  $M_2 \setminus M_1$    **c)**  $M_1 \setminus M_3$    **d)**  $M_3 \setminus M_1$    **e)**  $M_2 \setminus M_3$    **f)**  $M_3 \setminus M_2$
- 1.7** Gegeben sind die folgenden Intervalle:  $I_1 = (-2; 3)$ ,  $I_2 = [0; 5]$  und  $I_3 = [-1; 5)$ .  
**a)** Stellen Sie diese Intervalle grafisch dar.  
**b)** Geben Sie, sofern dies möglich ist, als Intervalle an:  
 $I_1 \cup I_2$     $I_2 \cap I_3$     $I_1 \setminus I_2$     $I_3 \setminus I_1$   
 $(I_1 \cap I_2) \cup I_3$     $(I_3 \cup I_2) \setminus I_1$     $I_2 \cap \mathbf{N}$
- 1.8** Gegeben sind zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt  $M$  und den Radien  $R$  und  $r$ . Die Punktmenge  $A$  des Kreises mit dem Radius  $R$  sei als Menge der Punkte im Inneren dieses Kreises (unter Ausschluss des Randes) gegeben; entsprechendes gilt für die Punktmenge  $B$ , vgl. Bild 1.9. Welche Punkt Mengen werden durch nachfolgende Mengenverknüpfungen dargestellt:



- a)  $A \cap B$  für (1)  $R > r$  (2)  $R = r$   
 b)  $A \cup B$  für (1)  $R > r$  (2)  $R = r$   
 c)  $A \setminus B$  für (1)  $R > r$  (2)  $R = r$   
 d)  $B \setminus A$  für (1)  $R > r$  (2)  $R = r$

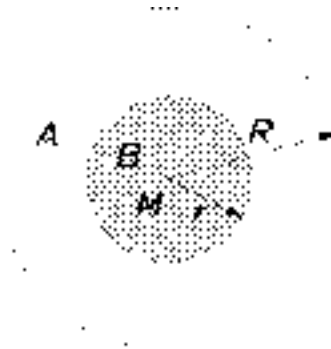


Bild 1.9

## 1.2 Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen

### 1.2.1 Einführung

Die *Beherrschung* der Regeln und Gesetze für die vier Grundrechenoperationen

**Addition und Subtraktion** (Rechenoperationen der *ersten Stufe*) und  
**Multiplikation und Division** (Rechenoperationen der *zweiten Stufe*)

und ihre sichere Anwendung beim Lösen von Aufgaben ist eine entscheidende Voraussetzung für das Eindringen in neue mathematische Stoffgebiete. Die Erfahrung zeigt immer wieder, dass viele Lernende z. B. an Hochschulen nicht daran scheitern, dass sie die „höhere Mathematik“ nicht begreifen, sondern daran, dass elementare Rechenfehler die Ursache für falsche Ergebnisse in Aufgaben mit durchaus richtig angegangenem Lösungsweg sind.

Aus diesem Grunde soll an dieser Stelle ein Überblick über die wichtigsten mathematischen Operationen mit Variablen und Termen gegeben werden. Dem Leser wird dazu eine Fülle von Übungsaufgaben angeboten. Sie soll ihn in die Lage versetzen, seine Kenntnisse und Fertigkeiten zu überprüfen und gegebenenfalls vorhandene Lücken aufzufüllen.

### 1.2.2 Das Rechnen mit Klammerausdrücken

Beim Rechnen mit Klammern kommen zwei einander entgegengesetzte Aufgabenstellungen vor: Vorhandene Klammern sollen „aufgelöst“ werden, bzw. umfangreichere Ausdrücke sollen „in Klammern eingeschlossen“ werden.

Für die **Addition und Subtraktion** von Klammerausdrücken gilt die Regel:

Steht vor einem Klammerausdruck ein Pluszeichen, so darf das zugehörige Klammerpaar einfach weggelassen werden. Steht jedoch ein Minuszeichen vor dem Klammerausdruck, dann müssen beim Weglassen der Klammern alle innerhalb der Klammer auftretenden Vorzeichen und Rechenzeichen der ersten Stufe umgekehrt werden.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
1.12 \quad x - \{y + 3z - [-2x + (3x - 4y) + y]\} + 4y &= \text{Auflösen der runden Klammern} \\
= x - \{y + 3z - [-2x + 3x - 4y + y]\} + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= x - \{y + 3z - [x - 3y]\} + 4y &= \text{Auflösen der eckigen Klammern} \\
= x - \{y + 3z - x + 3y\} + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= x - \{4y - x + 3z\} + 4y &= \text{Auflösen der geschweiften Klammern} \\
= x - 4y + x - 3z + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= 2x - 3z &
\end{aligned}$$

Die vorhandenen drei Klammerpaare wurden hier schrittweise „von innen nach außen“ aufgelöst. Es wäre genau so gut möglich gewesen, die Klammern von „außen nach innen“ zu beseitigen. Führen Sie diesen Lösungsweg zur Kontrolle selbstständig durch! Durch ständiges Üben kann man es erreichen, dass nicht mehr alle Zwischenschritte aufgeschrieben werden müssen.

Bei der **Multiplikation von Klammerausdrücken** ist jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer zu multiplizieren.

**Beispiele:**

$$\begin{aligned}
1.13 \quad (3u - 2v)(4u + 5v) &= \\
= 12u^2 + 15uv - 8uv - 10v^2 &= \text{Gleichartige Glieder zusammenfassen!} \\
= 12u^2 + 7uv - 10v^2 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.14 \quad (2a + 3b - 1)(2a - 3b + 2) &= 4a^2 - 6ab + 4a + 6ab - 9b^2 + 6b - 2a + 3b - 2 \\
&= 4a^2 - 9b^2 + 2a + 9b - 2
\end{aligned}$$

Auf diese Weise können auch Quadrate und höhere Potenzen von *Binomen* berechnet werden. So ist

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad (1.1)$$

Entsprechend ergeben sich die Formeln

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad (1.2)$$

und

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \quad (1.3)$$

Für  $(a + b)^3$  und  $(a - b)^3$  erhält man

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad (1.4)$$

und

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad (1.5)$$

Bildet man weitere Potenzen von  $a + b$ , und schreibt man alle in der folgenden Weise untereinander, so führt dies zu den **binomischen Formeln**:

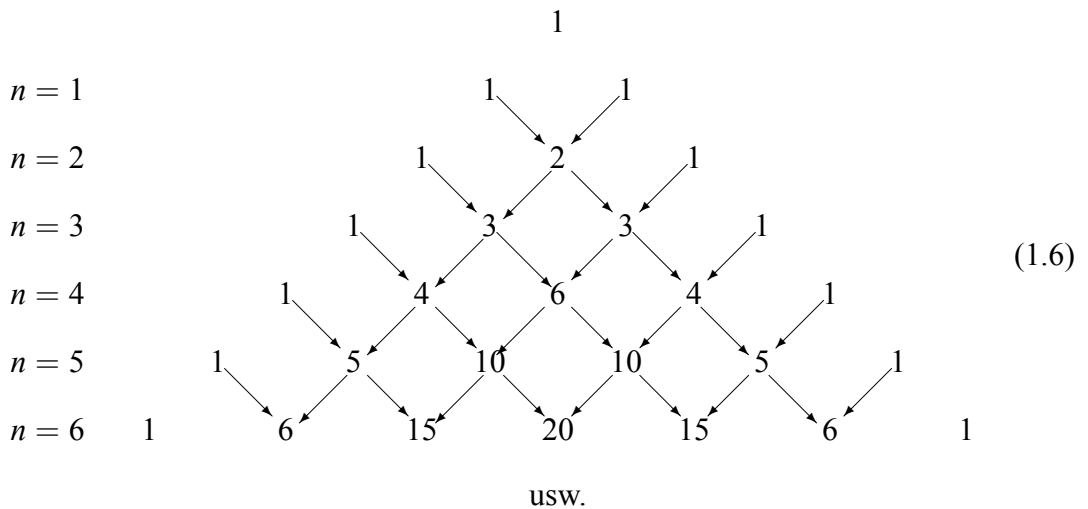
$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= &&&&&&&&& \mathbf{1} \\ (a + b)^1 &= &&&& \mathbf{1a} & + & \mathbf{1b} &&& \\ (a + b)^2 &= && \mathbf{1a^2} & + & \mathbf{2ab} & + & \mathbf{1b^2} && \\ (a + b)^3 &= & \mathbf{1a^3} & + & \mathbf{3a^2b} & + & \mathbf{3ab^2} & + & \mathbf{1b^3} \\ (a + b)^4 &= & \mathbf{1a^4} & + & \mathbf{4a^3b} & + & \mathbf{6a^2b^2} & + & \mathbf{4ab^3} & + & \mathbf{1b^4} \\ (a + b)^5 &= & \mathbf{1a^5} & + & \mathbf{5a^4b} & + & \mathbf{10a^3b^2} & + & \mathbf{10a^2b^3} & + & \mathbf{5ab^4} & + & \mathbf{1b^5} \\ (a + b)^6 &= & \mathbf{1a^6} & + & \mathbf{6a^5b} & + & \mathbf{15a^4b^2} & + & \mathbf{20a^3b^3} & + & \mathbf{15a^2b^4} & + & \mathbf{6ab^5} & + & \mathbf{1b^6} \\ & \vdots & & & & & & & & & \vdots & & & & \end{aligned}$$

Die Formeln für  $(a - b)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  sind völlig analog aufgebaut. Sie unterscheiden sich von den Formeln für  $(a + b)^n$  nur darin, dass alle Glieder mit *ungeraden Exponenten* bei  $b$  mit einem *Minuszeichen* versehen sind.

Bei den Formeln für  $(a \pm b)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten erkennen:

- Die Formel für  $(a \pm b)^n$  enthält  $n + 1$  Glieder. Jedes Glied ist ein Produkt aus einer Potenz von  $a$  und einer Potenz von  $b$ .
- Diese Glieder beginnen mit der Potenz  $a^n b^0$ . Bei den folgenden Gliedern nimmt der Exponent von  $a$  jeweils um 1 ab. Dafür wird der Exponent von  $b$  jeweils um 1 größer, bis  $a^0 b^n$  erreicht ist. Die Summe der Exponenten von  $a$  und  $b$  ist bei jedem Glied stets gleich  $n$ .
- Jedes Glied ist mit einem Koeffizienten dem *Binomialkoeffiziente*, versehen. Diese Binomialkoeffiziente sind bei nach fallenden Potenzen von  $a$  angeordneten Gliedern symmetrisch angeordnet.
- Die Binomialkoeffiziente lassen sich mithilfe des nach dem französischen Mathematiker Blaise PASCAL (1623–1662) benannten PASCALSchen Dreiecks berechnen.

**PASCALSches Dreieck:**



**Beispiele:**

**1.15** a)  $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$   
 b)  $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$   
 c)  $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

**1.16** Die „dritte binomische Formel“  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  gestattet es, manche Zahlenrechnungen sehr schnell auszuführen, ohne dass man den Taschenrechner zur Hilfe nehmen muss. So ist

$$\begin{array}{lcl} 64 \cdot 76 = (70 - 6)(70 + 6) & & 0,87 \cdot 1,13 = (1 - 0,13)(1 + 0,13) \\ = 4900 - 36 & \text{oder} & = 1,0000 - 0,0169 \\ = 4864 & & = 0,9831 \end{array}$$

**1.17**  $(4x^2 - 3)^3 = (4x^2)^3 - 3(4x^2)^2 \cdot 3 + 3(4x^2) \cdot 3^2 - 3^3$   
 $= 64x^6 - 3 \cdot 16x^4 \cdot 3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 9 - 27$   
 $= 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27$

**1.18**  $(1 - k^2)^5 = 1^5 - 5 \cdot 1^4 k^2 + 10 \cdot 1^3 k^4 - 10 \cdot 1^2 k^6 + 5 \cdot 1^1 k^8 - k^{10}$

Beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken werden Produkte in Summen umgewandelt. Dies ist dann vorteilhaft, wenn sich dadurch gleichartige Glieder zusammenfassen lassen. In der Bruchrechnung tritt jedoch das entgegengesetzte Problem auf: Brüche lassen sich „kürzen“, wenn im Zähler und Nenner *gemeinsame Faktoren* auftreten. Treten also im Zähler und im Nenner eines Bruches Summen auf, so wird es günstig sein, wenn man diese Summen durch „*Ausklammern gemeinsamer Faktoren*“ in Produkte zerlegen kann.

**Beispiele:**

**1.19** Die Ausdrücke

a)  $10x - 15y$    b)  $7 + 21a$    c)  $4u^4 - 4u^2$    d)  $36x^2y^3 + 48x^3y^2$   
 sollen in Faktoren zerlegt werden.

*Lösungen:*

a)  $10x - 15y = 5 \cdot 2x - 5 \cdot 3y = 5(2x - 3y)$

b)  $7 + 21a = 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3a = 7(1 + 3a)$

c)  $4u^4 - 4u^2 = 4u^2(u^2 - 1) = 4u^2(u + 1)(u - 1)$

3. binomische Formel beachten!

d)  $36x^2y^3 + 48x^3y^2 = 12x^2y^2 \cdot 3y + 12x^2y^2 \cdot 4x$   
 $= 12x^2y^2(3y + 4x)$

**1.20** Die Ausdrücke

a)  $p^2 + 2pq + q^2$    b)  $4x^2 + 12xy + 9y^2$

c)  $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$    d)  $225u^4 - 121v^2$

e)  $x^3 - 4x^2 + x - 4$

sollen in Produkte umgeformt werden.

*Lösungen:*

a)  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$  (Binomische Formel!)

b) Auch in  $4x^2 + 12xy + 9y^2$  ist eine binomische Formel enthalten:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$$