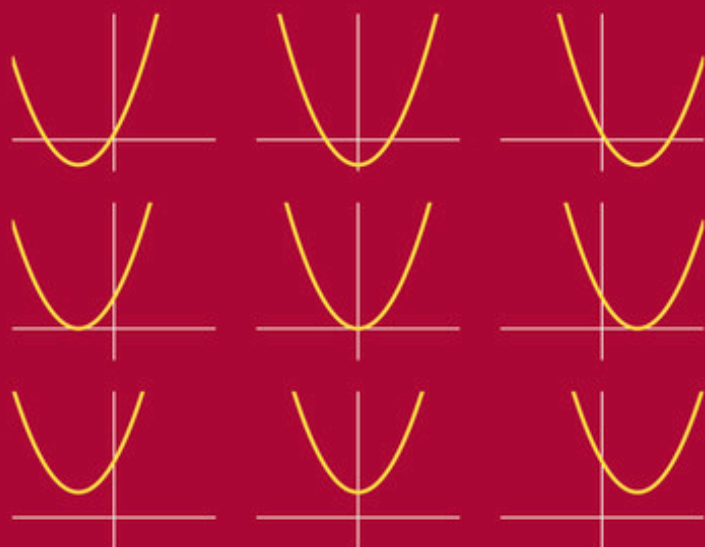


C. Gellrich
R. Gellrich



MATHEMATIK –

Band 1

EIN LEHR- UND ÜBUNGSBUCH

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Edition
Harri 
Deutsch



Mathematik
Ein Lehr- und Übungsbuch
Band 1



Edition
Harri 
Deutsch 

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

von

Regina Gellrich
Carsten Gellrich

5., korrigierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55989

Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch

Band 1: Gellrich/Gellrich;
Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;
Lineare Algebra, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;
Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Band 4: Schark/Overhagen;
Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen

5., korrigierte Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5599-6

ISBN 978-3-8085-5809-6 (E-Book)

Unter Verwendung vorzugsweise der Aufgaben des Werkes
Schalk, Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten
mit Genehmigung des RENIETS VERLAG GmbH, Wien.

Für die diesem Werk entnommenen Teile:

© 1986–1989 by RENIETS VERLAG GmbH, Wien

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Mit diesem Buch halten Sie bereits die fünfte Auflage des Bandes 1 der Reihe „MATHEMATIK – ein Lehr- und Übungsbuch“ in der Hand. Diese Reihe wendet sich an den Adressatenkreis der Studenten von Fachhochschulen, Fachoberschulen, Technikerschulen und ähnlichen Bildungseinrichtungen, ist aber auch für das Selbststudium geeignet. Sie berücksichtigt neben der notwendigen breiten Darstellung der klassischen Mathematik in hohem Maße moderne Entwicklungen und die Einbeziehung der Rechentechnik zum Lösen der Aufgaben.

Bei der methodischen Aufbereitung des Lehrstoffes wird in dieser Reihe davon ausgegangen, dass der Nutzer die Mathematik nicht als Wissenschaft betreiben will, sondern als Instrument zur Lösung der in seinem Fachgebiet anstehenden Aufgaben und Probleme. Daher werden diejenigen Stoffgebiete, mathematischen Methoden und Verfahren besonders berücksichtigt, die für den Anwender von Bedeutung sind. Die Theorie wird in leicht verständlicher Form dargestellt. Auf aufwendige Beweise und theoretische Untersuchungen wird bewusst verzichtet. Das Grundanliegen der Reihe besteht hingegen darin, dem Leser durch zahlreiche gut kommentierte Beispiele Hinweise dafür zu geben, wie man an das Lösen von Aufgaben herangehen muss. Eine Vielzahl von Aufgaben mit Lösungen geben jedem die Möglichkeit, seine Fähigkeiten zu erweitern und sein Wissen und Können zu kontrollieren. Die Herausgabe der fünften Auflage des vorliegenden Bandes 1 dokumentiert den Erfolg des Konzeptes dieser Reihe.

Der Band 1 ist als Vorbereitungsband aufzufassen, der (mit Ausnahme der Kapitel 5 und 7) diejenigen Stoffgebiete umfasst, die als Basis für ein erfolgreiches Studium der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften unbedingt notwendig sind. Insbesondere werden auch Ungleichungen und Ungleichungssysteme behandelt, um die Basis für weitere Themen der höheren Mathematik, wie der linearen Optimierung, zu verbreitern. Deshalb ist dieses Buch zur Wiederholung und Einstimmung auf das Studium sehr zu empfehlen. Die Erfahrungen von Lehrenden an Hochschulen zeigen immer wieder, dass viele Studenten im Fach Mathematik nicht daran scheitern, dass sie schwierige Aufgaben der Mathematik nicht lösen können, sondern daran, dass Mängel in der Handhabung elementarer Zusammenhänge auftreten.

Inzwischen haben bereits viele Jahrgänge von mathematisch interessierten Lesern mit diesem Buch gearbeitet und die große Anzahl positiver Rückmeldungen zeigt, dass es ihnen bei ihren Studien hilfreich war. Zum anderen haben gerade die Leser mit ihren Hinweisen und Korrekturvorschlägen einen großen Anteil daran, dass die Qualität des Buches stetig zunahm. Die Autoren und der Verlag möchten sich auf diesem Wege herzlich dafür bedanken.

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass der überwiegende Teil der Aufgaben und Lösungen sowie einige Beispiele aus dem Lehrwerk MATHEMATIK von SCHALK aus dem RENIETS-Verlag Wien übernommen wurde. Darunter sind sehr viele anwendungsorientierte Aufgaben aus den unterschiedlichsten Wissensgebieten, so dass dem Leser das große Spektrum mathematischer Fragestellungen bewusst wird und jeder hinreichend Aufgaben sei-

nes Fachgebietes findet. Wir danken dem RENIETS-Verlag Wien und seinen Autoren für die großzügige Bereitschaft, uns diesen Fundus an Aufgaben zur Verfügung zu stellen.

Wir Autoren bedanken uns sehr herzlich bei Dr. Marianne Kreul und Prof. Dr. Hans Kreul (†) für die Vielzahl von Anregungen und Hinweisen, die sie uns aus ihrem reichen Erfahrungsschatz beim Verfassen von Lehrbüchern sowie aus ihrer Lehrtätigkeit an Hochschulen gaben, für die fruchtbaren Diskussionen, die uns wertvolle Anregungen für die Gestaltung des Manuskripts lieferten, sowie nicht zuletzt für die Unterstützung bei der Bearbeitung des Buches.

Wie stets sind wir an der Meinung der Nutzer dieses Buches interessiert und bitten darum, uns bisher noch nicht erkannte Fehler mitzuteilen. Die Adressen für Zuschriften und E-Mails sind

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselderger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Wir wünschen allen mathematisch Interessierten, die mithilfe dieses Buches ihr mathematisches Wissen vertiefen und ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten auf diesem Gebiet verbessern wollen, viel Erfolg und Freude beim Lernen und beim Lösen der Aufgaben.

Regina und Carsten Gellrich

Inhaltsverzeichnis

1	Was man beherrschen sollte	11
1.1	Elemente der Mengenlehre	11
1.1.1	Begriffsbestimmung	11
1.1.2	Darstellung von Mengen	11
1.1.3	Beziehungen zwischen Mengen	13
1.2	Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen	16
1.2.1	Einführung	16
1.2.2	Das Rechnen mit Klammerausdrücken	16
1.2.3	Bruchrechnung	20
1.2.4	Partialdivision	24
1.3	Das Lösen von Gleichungen	34
1.3.1	Begriffsbestimmungen	34
1.3.2	Zum Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen	35
1.3.3	Der VIETASche Wurzelsatz	47
1.4	Einfache Gleichungen höheren Grades	49
1.4.1	Begriffsbestimmungen	49
1.4.2	Der VIETASche Wurzelsatz	50
1.4.3	Das Lösen von speziellen Gleichungen höheren Grades	52
1.4.3.1	Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen	52
1.4.3.2	Gleichungen höheren Grades, von denen mindestens eine Lösung bekannt ist	54
1.4.4	Das HORNER-Schema	56
1.5	Lineare und quadratische Funktion	62
1.5.1	Die lineare Funktion	62
1.5.2	Die quadratische Funktion	69
1.5.3	Funktion und Bestimmungsgleichung	74
1.6	Proportionen	77
1.6.1	Begriffsbestimmungen	77
1.6.2	Proportionalität	80
1.6.2.1	Direkte Proportionalität	80
1.6.2.2	Indirekte Proportionalität	81
1.6.3	Proportionen und Bestimmungsgleichungen	84
1.6.4	Prozent- und Zinsrechnung	89
2	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	97
2.1	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	97
2.1.1	Begriffserklärungen	97

2.1.2	Potenzgesetze	99
2.1.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	99
2.1.2.2	Multiplikation und Division von Potenzen	100
2.2	Potenzen mit gebrochenen Exponenten	106
2.2.1	Die Umkehrungen der Potenzrechnung	106
2.2.2	Grundbegriffe der Wurzelrechnung	107
2.2.3	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten	109
2.2.4	Das Rechnen mit Wurzeln	111
2.2.5	Potenzen mit reellen Exponenten	113
2.2.6	Zur Berechnung von Potenzen mit beliebigen Exponenten mit dem Taschenrechner	114
2.3	Logarithmen	119
2.3.1	Begriffserklärungen	119
2.3.2	Das Rechnen mit Logarithmen	121
2.3.3	Logarithmensysteme	123
2.3.3.1	Häufig auftretende Logarithmensysteme	123
2.3.3.2	Zur Ermittlung von Logarithmen mit dem Taschenrechner	124
2.3.3.3	Beziehungen zwischen Logarithmensystemen mit unterschiedlichen Basen	126
2.4	Gleichungen mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen	129
2.4.1	Wurzelgleichungen	129
2.4.2	Exponentialgleichungen	134
2.4.3	Logarithmische Gleichungen	138
2.4.4	Vermischte Aufgaben	141
3	Trigonometrie	146
3.1	Winkelmessung	146
3.2	Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck	149
3.2.1	Begriffe	149
3.2.2	Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck	150
3.2.3	Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für spitze Winkel	151
3.2.4	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	155
3.3	Die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel	165
3.3.1	Erweiterung des Begriffes der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkel	165
3.3.2	Ermittlung der Werte der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel	168
3.3.3	Vereinfachte Umrechnung von Winkeln aus Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt	172
3.4	Berechnungen am allgemeinen Dreieck	175
3.4.1	Der Sinussatz	175
3.4.2	Der Kosinussatz	180
3.5	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	191
3.5.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen ein und desselben Winkels	191

3.5.2	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen unterschiedlicher Winkel	193
3.6	Goniometrische Gleichungen	201
3.6.1	Begriffsbestimmung	201
3.6.2	Das Lösen goniometrischer Gleichungen	201
3.7	Vermischte Aufgaben	209
4	Funktionen	214
4.1	Abbildungen und Funktionen	214
4.1.1	Der Begriff der Abbildung	214
4.1.2	Der Begriff der Funktion	216
4.2	Wichtige Eigenschaften von Funktionen	222
4.2.1	Beschränktheit	222
4.2.2	Monotonie	224
4.2.3	Symmetrie	227
4.2.4	Stetigkeit	229
4.3	Die Umkehrfunktion	236
4.3.1	Die Umkehrung einer Abbildung	236
4.3.2	Der Begriff der Umkehrfunktion	239
4.4	Grundfunktionen	243
4.4.1	Potenzfunktionen	243
	4.4.1.1 Potenzfunktionen mit ganzen positiven Exponenten	243
	4.4.1.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten	246
	4.4.1.3 Die Potenzfunktion $y = x^0$	247
	4.4.1.4 Potenzfunktionen mit reellen Exponenten	247
	4.4.1.5 Zusammenhang zwischen der Potenzfunktion $y = x^n$ und der Wurzelfunktion	249
4.4.2	Exponential- und Logarithmusfunktion	252
4.4.3	Die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen	254
4.4.4	Die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen	264
4.5	Grafische Darstellung von Funktionen durch Synthese	274
4.6	Überlagerung von Schwingungen	287
5	Komplexe Zahlen	295
5.1	Grundbegriffe	295
5.1.1	Einführung der komplexen Zahlen	295
5.1.2	Grafische Veranschaulichung komplexer Zahlen	297
5.2	Die trigonometrische und die Exponentialform komplexer Zahlen	301
5.2.1	Die trigonometrische Darstellungsform	301
	5.2.1.1 Umrechnung von der arithmetischen in die trigonometrische Form . .	303
	5.2.1.2 Umrechnung von der trigonometrischen in die arithmetische Form . .	305
5.2.2	Die Exponentialform	305
5.3	Die vier Grundrechenarten im Bereich der komplexen Zahlen	307
5.4	Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren	314

5.5	Lösen algebraischer Gleichungen im Komplexen	320
5.6	Anwendungen in der Elektrotechnik	325
6	Ungleichungen	330
6.1	Begriffsbestimmung	330
6.2	Rechenregeln für Ungleichungen	331
6.3	Das Lösen von Ungleichungen	333
6.3.1	Zusammenhänge zwischen Ungleichung, Gleichung und Funktion	333
6.3.2	Grafische Verfahren zur Lösung von Ungleichungen	336
6.3.3	Rechnergestützte Lösung von Ungleichungen	340
6.4	Systeme von Ungleichungen	342
7	Einige mathematische Grundlagen der Informatik	351
7.1	Zahlendarstellung	351
7.1.1	Darstellung von Zahlen in Positionssystemen	351
	7.1.1.1 Umrechnung von Zahlen eines beliebigen Positionssystems in Dezimalzahlen	353
	7.1.1.2 Umrechnung von Dezimalzahlen in ein anderes Positionssystem	355
	7.1.1.3 Besonderheiten beim Umwandeln von Dualzahlen in Oktal- oder Hexadezimalzahlen und umgekehrt	359
7.1.2	Fest- und Gleitkommadarstellung von Zahlen	361
	7.1.2.1 Darstellung ganzer Zahlen	362
	7.1.2.2 Darstellung reeller Zahlen	363
7.1.3	Numerische Effekte beim Rechnen mit dem Computer	367
7.2	Elemente der BOOLEschen Algebra	370
7.2.1	Grundlagen der Aussagenlogik	370
	7.2.1.1 Verknüpfungen von Aussagen	371
7.2.2	Einführung in die Schaltalgebra	374
	7.2.2.1 Grundsaltungen	374
	7.2.2.2 Analyse und Synthese digitaler Schaltungen mittels Schaltzustandstabelle	379
	7.2.2.3 Rechengesetze der Schaltalgebra	381
8	Lösungen der Aufgaben	390
	Sachwortverzeichnis	475

1 Was man beherrschen sollte

1.1 Elemente der Mengenlehre

1.1.1 Begriffsbestimmung

Definition:

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte zu einer Gesamtheit.

Mengen werden in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet. Die einzelnen durch eine Menge zusammengefassten Objekte werden **Elemente** der Menge genannt. Man bezeichnet sie mit Kleinbuchstaben.

Durch das Symbol \in wird ausgedrückt, dass ein Element einer Menge angehört. So besagt

$$x \in M,$$

dass das Element x ein Element der Menge M ist. Dagegen bedeutet

$$y \notin M,$$

dass y der Menge M nicht angehört.

1.1.2 Darstellung von Mengen

Es gibt unterschiedliche Arten, Mengen darzustellen.

a) *Durch Angabe ihrer Elemente.*

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1.1 \quad A &= \{1, 4, 9, 16\} \\ B &= \{1, 4, 9, 16, \dots, 625\} \\ C &= \{1, 4, 9, 16, \dots\}. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, dass es Mengen mit endlich vielen Elementen, aber auch Mengen mit unendlich vielen Elementen (endliche und unendliche Mengen) gibt.

Für häufig auftretende Mengen werden feste Abkürzungen gewählt. So bezeichnet

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen*,

$\mathbf{G} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der *ganzen Zahlen*,

\mathbf{R} die Menge der *reellen Zahlen*,

\emptyset die so genannte *leere Menge*.

Eine leere Menge enthält *kein Element*. Man beschreibt die leere Menge auch in der Form $\emptyset = \{\}$. Sie ist von der Menge $\{0\}$ zu unterscheiden. Während die leere Menge *kein Element* besitzt, enthält die Menge $\{0\}$ *ein Element*, nämlich 0.

b) *Durch Beschreibung ihrer Elemente.*

Beispiel:

$$1.2 \quad D = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}$$

Diese Schreibweise wird gelesen: D ist die Menge aller x mit der Eigenschaft, dass x enthalten ist in der Menge der natürlichen Zahlen *und* dass $x < 10$ ist. Damit enthält D die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, so dass D auch in der Form

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

angegeben werden kann.

$$E = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$$

ist diejenige Menge, die alle Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ enthält. Die Lösungen dieser Gleichung lauten $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, so dass die obige Mengenschreibweise für E gleichbedeutend ist mit $E = \{-2, 3\}$.

$$F = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq 4\}$$

enthält alle reellen Zahlen zwischen $x = 0$ und $x = 4$ einschließlich der Werte $x = 0$ und $x = 4$.

$$H = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$$

enthält alle reellen Zahlen zwischen $x = a$ und $x = b$, wobei jedoch im Unterschied zur Menge F hier die beiden Werte $x = a$ und $x = b$ *nicht* mit zur Menge H gehören.

Mengen wie F und H treten in der Mathematik häufig auf, so z. B. als Definitions- und Wertebereich von Funktionen. Deshalb gibt es auch für derartige Mengen eine abkürzende Schreibweise. Sie werden *Intervalle* genannt, und man schreibt z. B. für F und H :

$$F = [0; 4] \quad \text{und} \quad H = (a; b).$$

Bei F spricht man von einem beiderseits *abgeschlossenen Intervall*, weil die beiden Endpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ mit zur Menge F dazugehören. Bei H hingegen handelt es sich um ein beiderseits *offenes Intervall*, denn die beiden Endpunkte $x_1 = a$ und $x_2 = b$ gehören *nicht* zur Menge H . *Abgeschlossene Intervalle* werden durch *eckige Klammern*, *offene Intervalle* durch *runde Klammern* gekennzeichnet.

Es gibt auch *einseitig geschlossene* (bzw. *einseitig offene*) *Intervalle*. Bei ihnen gehört nur einer der beiden Eckpunkte der Menge an, der andere jedoch nicht.

Beispiel:

1.3 $L_1 = (0; 10]$, (die Menge aller reellen Zahlen, die größer sind als 0 bis einschließlich 10) – ein *linksseitig offenes* und

$L_2 = [0; \infty)$, (die Menge aller positiven reellen Zahlen) – ein *rechtsseitig offenes* Intervall.

c) *Durch grafische Interpretation.*

- Alle Elemente einer Menge werden als Punkte einer Fläche dargestellt. Diese Darstellungsweise wird vor allem dazu verwendet, Verknüpfungen zwischen Mengen zu verdeutlichen. (Vgl. Abschnitt 1.1.3)
- Zahlenmengen werden als Punkte oder als Strecken einer Zahlengeraden dargestellt.

Auf diese Weise lassen sich die Mengen A, D, F, L_1 und L_2 der Beispiele 1.1., 1.2. und 1.3. wie folgt veranschaulichen:

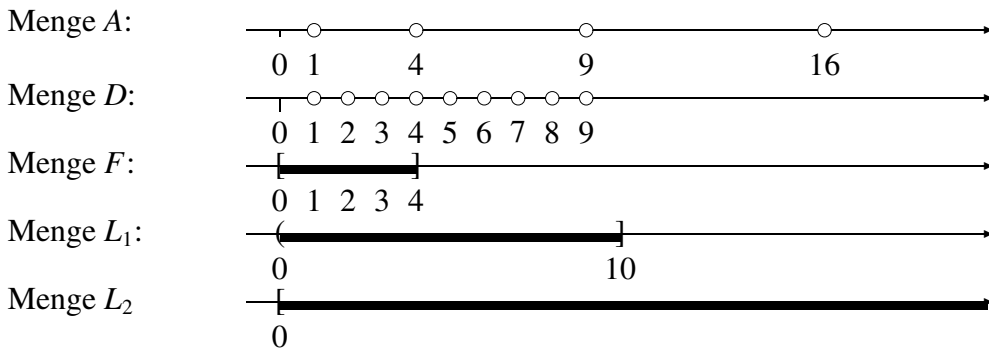


Bild 1.1

1.1.3 Beziehungen zwischen Mengen

- Eine Menge M_2 wird **Teilmenge** von M_1 genannt, wenn *jedes* Element von M_2 auch Element von M_1 ist (vgl. Bild 1.2).
Schreibweise: $M_2 \subseteq M_1$.
Gibt es dabei in M_1 noch Elemente, die M_2 *nicht* angehören, dann heißt M_2 eine *echte Teilmenge* von M_1 . Schreibweise: $M_2 \subset M_1$.
- Zwei Mengen M_1 und M_2 sind **einander gleich**, wenn sie beide genau die gleichen Elemente besitzen.
Schreibweise: $M_1 = M_2$.
Ist beispielsweise M_1 die Menge aller geraden Zahlen und M_2 die Menge aller Zahlen, die durch 2 teilbar sind, dann gilt $M_1 = M_2$.
- Die **Vereinigung** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente, die M_1 *oder* M_2 (oder beiden Mengen) angehören (vgl. Bild 1.3).
Schreibweise: $M_1 \cup M_2$.

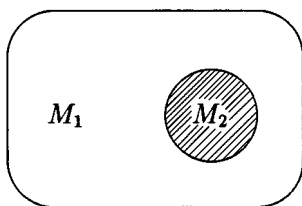


Bild 1.2

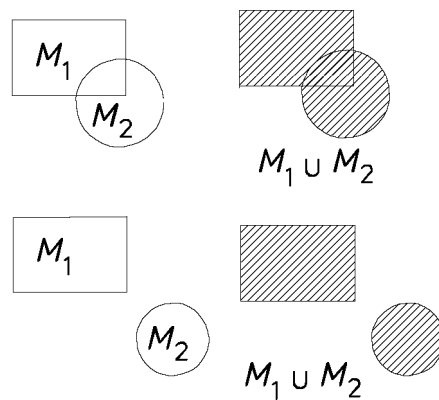


Bild 1.3

Beispiele:

1.4 Wenn $M_1 \cup M_2 = M_1$ ist, dann folgt daraus $M_2 \subseteq M_1$. Veranschaulichen Sie sich diese Eigenschaft anhand einer Skizze, in der die beiden Mengen als Flächen dargestellt sind.

1.5 Wenn $M_1 = (0; 5]$ und $M_2 = [3; 8)$, dann ist $M_1 \cup M_2 = (0; 8)$ (vgl. Bild 1.4).

- Der **Durchschnitt** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente, die *sowohl* M_1 *als auch* M_2 angehören.
Schreibweise: $M_1 \cap M_2$.

Beispiele:

1.6 Der Durchschnitt zweier sich teilweise überlappender Mengen M_1 und M_2 ist im Bild 1.5 veranschaulicht. Überzeugen Sie sich durch eine ähnliche Skizze, dass der folgende Satz gilt:

Wenn $M_1 \cap M_2 = M_1$, dann folgt daraus
 $M_1 \subseteq M_2$

1.7 Zwei Mengen, die *keine gemeinsamen Elemente* besitzen, heißen *disjunkt* zueinander. Für zwei *disjunkte* Mengen M_1 und M_2 gilt

$M_1 \cap M_2 = \emptyset = \{ \}$.
 (Vgl. dazu Bild 1.6)

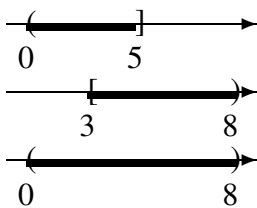


Bild 1.4

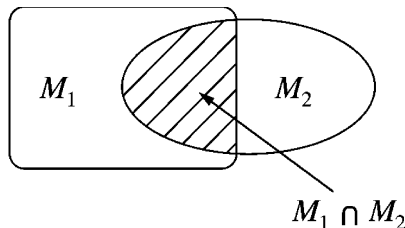


Bild 1.5

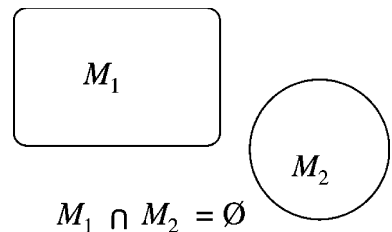


Bild 1.6

Beispiel:

1.8 Für die Intervalle $M_1 = (0; 5]$ und $M_2 = [3; 8)$ (vgl. Beispiel 1.5.), wird
 $M_1 \cap M_2 = [3; 5]$.

Prüfen Sie dies bitte anhand einer Skizze nach! Vergewissern Sie sich dabei insbesondere, dass die beiden Endpunkte $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ Elemente der Durchschnittsmenge $M_1 \cap M_2$ sind.

- Die **Differenz** zweier Mengen M_1 und M_2 enthält alle diejenigen Elemente von M_1 , die *nicht* Elemente von M_2 sind.
Schreibweise: $M_1 \setminus M_2$.

Beispiele:

1.9 Die beiden Differenzmengen $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ zweier Mengen M_1 und M_2 , die gemeinsame Elemente besitzen, sind in Bild 1.7 dargestellt.

1.10 Für zwei disjunkte Mengen M_1 und M_2 gilt
 $M_1 \setminus M_2 = M_1$ und $M_2 \setminus M_1 = M_2$
 (vgl. dazu Bild 1.8).

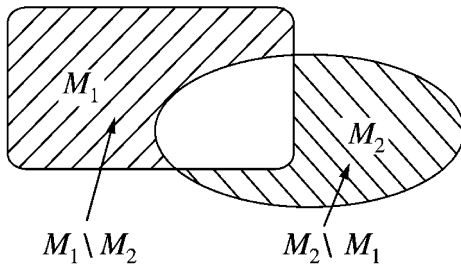
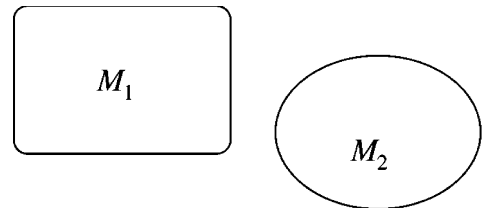


Bild 1.7



$$M_1 \setminus M_2 = M_1$$

$$M_2 \setminus M_1 = M_2$$

Bild 1.8

- 1.11** Für die beiden Intervalle $M_1 = (0; 5]$ und $M_2 = [3; 8)$ (vgl. Beispiele 1.5. und 1.8.) gilt $M_1 \setminus M_2 = (0; 3)$ und $M_2 \setminus M_1 = (5; 8)$.

Prüfen Sie dies wiederum anhand einer Skizze nach, und überzeugen Sie sich davon, dass die beiden Eckpunkte $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ *keiner* der beiden Differenzmengen angehören.

Aufgaben:

- 1.1** Die Leerstellen sind durch Verwendung der Symbole \subseteq bzw. $\not\subseteq$ zu vervollständigen!
 $M_1 = \{3, 4, 5\}$, $M_2 = \{5, 3\}$, $M_3 = \{5, 6, 7\}$, $M_4 = \{\}$
 a) $M_1 \dots M_2$ b) $M_2 \dots M_1$ c) $M_2 \dots M_3$ d) $M_3 \dots M_4$
- 1.2** Von der Menge $M = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 10 > x > 2\}$ sind folgende Teilmengen zu bestimmen:
 a) A, Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen von M
 b) B, Menge aller geraden Zahlen von M
 c) C, Menge aller ungeraden Zahlen von M
- 1.3** a) Können zwei endliche Mengen, die eine verschiedene Anzahl von Elementen haben, jemals gleich sein?
 b) Sind zwei endliche Mengen, die eine gleiche Anzahl von Elementen haben, immer gleich?
 c) Haben zwei gleiche Mengen immer die gleiche Anzahl von Elementen?
- 1.4** Es sind die Mengen $M_1 = \{3, 4, 5\}$, $M_2 = \{1, 3, 4\}$, $M_3 = \{4, 5, 6, 8, 9\}$, $M_4 = \{\}$ gegeben. Man ermittle:
 a) $M_1 \cap M_2$ b) $M_2 \cap M_3$ c) $M_1 \cap M_1$ d) $M_1 \cap M_4$ e) $M_1 \cap M_3$ f) $M_4 \cap M_3$
- 1.5** Es sind die Mengen $M_1 = \{2; 4; 9\}$, $M_2 = \{1; 2; 3\}$, $M_3 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 10\}$, $M_4 = \{\}$ gegeben. Man ermittle:
 a) $M_1 \cup M_2$ b) $M_2 \cup M_3$ c) $M_4 \cup M_4$ d) $M_2 \cup M_4$ e) $M_4 \cup M_1$ f) $M_1 \cup M_3$
- 1.6** Es sind die Mengen $M_1 = \{1; 2; 3\}$, $M_2 = \{3; 7\}$, $M_3 = \{4; 7\}$ gegeben. Man ermittle:
 a) $M_1 \setminus M_2$ b) $M_2 \setminus M_1$ c) $M_1 \setminus M_3$ d) $M_3 \setminus M_1$ e) $M_2 \setminus M_3$ f) $M_3 \setminus M_2$
- 1.7** Gegeben sind die folgenden Intervalle: $I_1 = (-2; 3)$, $I_2 = [0; 5]$ und $I_3 = [-1; 5)$.
 a) Stellen Sie diese Intervalle grafisch dar.
 b) Geben Sie, sofern dies möglich ist, als Intervalle an:
 $I_1 \cup I_2$ $I_2 \cap I_3$ $I_1 \setminus I_2$ $I_3 \setminus I_1$
 $(I_1 \cap I_2) \cup I_3$ $(I_3 \cup I_2) \setminus I_1$ $I_2 \cap \mathbf{N}$
- 1.8** Gegeben sind zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt M und den Radien R und r . Die Punktmenge A des Kreises mit dem Radius R sei als Menge der Punkte im Inneren dieses Kreises (unter Ausschluss des Randes) gegeben; entsprechendes gilt für die Punktmenge B , vgl. Bild 1.9. Welche Punkt Mengen werden durch nachfolgende Mengenverknüpfungen dargestellt:

- a) $A \cap B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
 b) $A \cup B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
 c) $A \setminus B$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$
 d) $B \setminus A$ für (1) $R > r$ (2) $R = r$

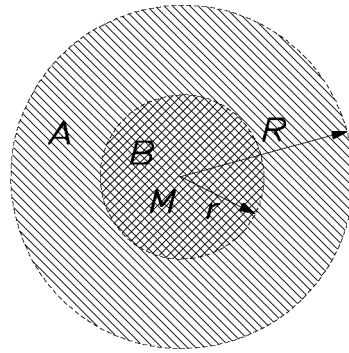


Bild 1.9

1.2 Die vier Grundrechenoperationen mit Variablen und Termen

1.2.1 Einführung

Die *Beherrschung* der Regeln und Gesetze für die vier Grundrechenoperationen

Addition und Subtraktion (Rechenoperationen der *ersten Stufe*) und
Multiplikation und Division (Rechenoperationen der *zweiten Stufe*)

und ihre sichere Anwendung beim Lösen von Aufgaben ist eine entscheidende Voraussetzung für das Eindringen in neue mathematische Stoffgebiete. Die Erfahrung zeigt immer wieder, dass viele Lernende z. B. an Hochschulen nicht daran scheitern, dass sie die „höhere Mathematik“ nicht begreifen, sondern daran, dass elementare Rechenfehler die Ursache für falsche Ergebnisse in Aufgaben mit durchaus richtig angegangenem Lösungsweg sind.

Aus diesem Grunde soll an dieser Stelle ein Überblick über die wichtigsten mathematischen Operationen mit Variablen und Termen gegeben werden. Dem Leser wird dazu eine Fülle von Übungsaufgaben angeboten. Sie soll ihn in die Lage versetzen, seine Kenntnisse und Fertigkeiten zu überprüfen und gegebenenfalls vorhandene Lücken aufzufüllen.

1.2.2 Das Rechnen mit Klammerausdrücken

Beim Rechnen mit Klammern kommen zwei einander entgegengesetzte Aufgabenstellungen vor: Vorhandene Klammern sollen „aufgelöst“ werden, bzw. umfangreichere Ausdrücke sollen „in Klammern eingeschlossen“ werden.

Für die **Addition und Subtraktion** von Klammerausdrücken gilt die Regel:

Steht vor einem Klammerausdruck ein Pluszeichen, so darf das zugehörige Klammerpaar einfach weggelassen werden. Steht jedoch ein Minuszeichen vor dem Klammerausdruck, dann müssen beim Weglassen der Klammern alle innerhalb der Klammer auftretenden Vorzeichen und Rechenzeichen der ersten Stufe umgekehrt werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
1.12 \quad x - \{y + 3z - [-2x + (3x - 4y) + y]\} + 4y &= \text{Auflösen der runden Klammern} \\
= x - \{y + 3z - [-2x + 3x - 4y + y]\} + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= x - \{y + 3z - [x - 3y]\} + 4y &= \text{Auflösen der eckigen Klammern} \\
= x - \{y + 3z - x + 3y\} + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= x - \{4y - x + 3z\} + 4y &= \text{Auflösen der geschweiften Klammern} \\
= x - 4y + x - 3z + 4y &= \text{Zusammenfassen} \\
= 2x - 3z &
\end{aligned}$$

Die vorhandenen drei Klammerpaare wurden hier schrittweise „von innen nach außen“ aufgelöst. Es wäre genau so gut möglich gewesen, die Klammern von „außen nach innen“ zu beseitigen. Führen Sie diesen Lösungsweg zur Kontrolle selbstständig durch! Durch ständiges Üben kann man es erreichen, dass nicht mehr alle Zwischenschritte aufgeschrieben werden müssen.

Bei der **Multiplikation von Klammerausdrücken** ist jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer zu multiplizieren.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
1.13 \quad (3u - 2v)(4u + 5v) &= \\
= 12u^2 + 15uv - 8uv - 10v^2 &= \text{Gleichartige Glieder zusammenfassen!} \\
= 12u^2 + 7uv - 10v^2 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.14 \quad (2a + 3b - 1)(2a - 3b + 2) &= 4a^2 - 6ab + 4a + 6ab - 9b^2 + 6b - 2a + 3b - 2 \\
&= 4a^2 - 9b^2 + 2a + 9b - 2
\end{aligned}$$

Auf diese Weise können auch Quadrate und höhere Potenzen von *Binomen* berechnet werden. So ist

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad (1.1)$$

Entsprechend ergeben sich die Formeln

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad (1.2)$$

und

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \quad (1.3)$$

Für $(a + b)^3$ und $(a - b)^3$ erhält man

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad (1.4)$$

und

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad (1.5)$$

Beispiele:

1.15 a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
 b) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
 c) $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

1.16 Die „dritte binomische Formel“ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ gestattet es, manche Zahlenrechnungen sehr schnell auszuführen, ohne dass man den Taschenrechner zur Hilfe nehmen muss. So ist

$$\begin{array}{lcl} 64 \cdot 76 = (70 - 6)(70 + 6) & & 0,87 \cdot 1,13 = (1 - 0,13)(1 + 0,13) \\ = 4900 - 36 & \text{oder} & = 1,0000 - 0,0169 \\ = 4864 & & = 0,9831 \end{array}$$

1.17 $(4x^2 - 3)^3 = (4x^2)^3 - 3(4x^2)^2 \cdot 3 + 3(4x^2) \cdot 3^2 - 3^3$
 $= 64x^6 - 3 \cdot 16x^4 \cdot 3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 9 - 27$
 $= 64x^6 - 144x^4 + 108x^2 - 27$

1.18 $(1 - k^2)^5 = 1^5 - 5 \cdot 1^4 k^2 + 10 \cdot 1^3 k^4 - 10 \cdot 1^2 k^6 + 5 \cdot 1^1 k^8 - k^{10}$

Beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken werden Produkte in Summen umgewandelt. Dies ist dann vorteilhaft, wenn sich dadurch gleichartige Glieder zusammenfassen lassen. In der Bruchrechnung tritt jedoch das entgegengesetzte Problem auf: Brüche lassen sich „kürzen“, wenn im Zähler und Nenner *gemeinsame Faktoren* auftreten. Treten also im Zähler und im Nenner eines Bruches Summen auf, so wird es günstig sein, wenn man diese Summen durch „*Ausklammern gemeinsamer Faktoren*“ in Produkte zerlegen kann.

Beispiele:

1.19 Die Ausdrücke

a) $10x - 15y$ b) $7 + 21a$ c) $4u^4 - 4u^2$ d) $36x^2y^3 + 48x^3y^2$
 sollen in Faktoren zerlegt werden.

Lösungen:

a) $10x - 15y = 5 \cdot 2x - 5 \cdot 3y = 5(2x - 3y)$
 b) $7 + 21a = 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3a = 7(1 + 3a)$
 c) $4u^4 - 4u^2 = 4u^2(u^2 - 1) = 4u^2(u + 1)(u - 1)$

3. binomische Formel beachten!

d) $36x^2y^3 + 48x^3y^2 = 12x^2y^2 \cdot 3y + 12x^2y^2 \cdot 4x$
 $= 12x^2y^2(3y + 4x)$

1.20 Die Ausdrücke

a) $p^2 + 2pq + q^2$ b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
 c) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ d) $225u^4 - 121v^2$
 e) $x^3 - 4x^2 + x - 4$

sollen in Produkte umgeformt werden.

Lösungen:

a) $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$ (Binomische Formel!)
 b) Auch in $4x^2 + 12xy + 9y^2$ ist eine binomische Formel enthalten:
 $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$