Mathematik

Ein Lehr- und Übungsbuch
Band 3

EUROPA LEHRMITTEL

Edition
Harri
Deutsch

Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

von

Regina Gellrich
Carsten Gellrich

3., korrigierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56023

Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch

Band 1: Gellrich/Gellrich;
Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;
Lineare Algebra, Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;
Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Band 4: Schark/Overhagen;
Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen

3., korrigierte Auflage 2011

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5602-3

ISBN 978-3-8085-5811-9 (E-Book)

http://www.europa-lehrmittel.de
Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Druck: fgb · freiburger graphische betriebe

Vorwort

Im vorliegenden Band 3 der Buchreihe „MATHEMATIK – Ein Lehr- und Übungsbuch“ werden die Grundlagen der Infinitesimalrechnun für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen behandelt.

Das erste Kapitel befasst sich mit endlichen und unendlichen Zahlenfolgen und -reihen. Dabei werden die für die höhere Mathematik wichtigen Begriffe wie Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und Divergenz ausführlich behandelt und damit die Voraussetzungen für die Untersuchung von Grenzwerten geschaffen. Die hier gewonnenen Erkenntnisse werden im zweiten Kapitel auf die Funktionen mit einer unabhängigen Veränderlichen übertragen, sodass eine mathematisch saubere Definitio der Stetigkeit möglich wird, die für die gesamte höhere Mathematik von grundlegender Bedeutung ist. Die bisher bekannten Hilfsmittel zur Untersuchung der Eigenschaften von Funktionen werden erweitert und auch auf Funktionen in Parameterdarstellung und in Polarkoordinaten ausgedehnt. Das dritte und das vierte Kapitel stellen dann den Hauptteil dieses Bandes dar. Sie enthalten die Differenzial- und die Integralrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen und ermöglichen damit dem Leser den Einstieg in die höhere Mathematik.

Das Grundanliegen der Buchreihe, auf komplizierte theoretische Untersuchungen sowie auf aufwendige Beweise weitestgehend zu verzichten und stattdessen anschaulich und verständlich anhand von vielen ausführlich kommentierten Beispielen und zahlreichen sorgfältig ausgewählten Übungsaufgaben in die Begriffswelt der höheren Mathematik einzuführen, wird auch in diesem Band konsequent beibehalten. Die Autoren und der Verlag hoffen, dass diese Art der Wissensvermittlung vor allem dem Lernenden hilft, seine Fähigkeiten und Fertigkeiten im Lösen von Aufgaben zu vervollkommnen, und dass damit auch sein Bedürfnis geweckt wird, sich eingehender mit den theoretischen Grundlagen zu beschäftigen.

Die meisten der Aufgaben und deren Lösungen wurden wiederum den Lehrbüchern der MATHEMATIK von SCHALK übernommen. Dem RENIETS-Verlag in Wien, in dem dieses Lehrwerk erschienen ist, danken wir dafür sehr herzlich. Zu großem Dank verpflichte sind wir auch Frau Dr. Marianne Kreul und Herrn Prof. Dr. Hans Kreul für die vielen wertvollen Hinweise und Anregungen, die sie uns bei der Erarbeitung des Manuskripts gegeben haben. Und nicht zuletzt gebührt unser Dank auch den Mitarbeitern des Verlages Harri Deutsch, die der Neuauflage den letzten drucktechnischen Schliff gegeben haben.

Die bereits im Vorwort zum ersten Band ausgesprochene Bitte an die Leser dieses Buches möchten wir wiederholen: Schreiben Sie uns bitte, wenn Sie Druckfehler oder sonstige Unstimmigkeiten entdecken oder wenn Sie Verbesserungs- oder Änderungsvorschläge für die Gestaltung dieser Buchreihe haben.

Autoren und Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
D-60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
Internet: http://www.harri-deutsch.de

Allen Lesern, die tiefer in die Geheimnisse der höheren Mathematik eindringen wollen oder ihr mathematisches Wissen und Können vervollkommnen möchten, wünschen wir viel Erfolg und Freude bei der Arbeit mit diesem Buche.

Regina und Carsten Gellrich

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen

1.1 Zahlenfolgen

1.1.1 Der Begriff der Zahlenfolge

Werden die Elemente einer Zahlenmenge in einer ganz bestimmten Reihenfolge angeordnet, dann spricht man von einer **Zahlenfolge**.
Bei einer Zahlenfolge ist also genau festgelegt, welches Element der gegebenen Zahlenmenge das 1., 2., 3., …, n-te Glied der Zahlenfolge ist.

Häufi stellt man Zahlenfolgen in der Weise dar, dass man die einzelnen Elemente der Reihe nach aufschreibt:

$$\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-1}, a_n.$$

Die Elemente einer Zahlenfolge werden **Glieder der Folge** genannt.
a_1 und a_2 sind das erste und das zweite Glied der Folge. a_k heißt das *„allgemeine Glied"*.

Für mathematische Betrachtungen sind nur solche Folgen von Bedeutung, für die ein *„Bildungsgesetz"* für die einzelnen Glieder der Folge vorliegt. Dann lassen sich nämlich die Glieder a_k der Reihe nach aus der Bildungsvorschrift

$$a_k = f(k)$$

für die vorgegebenen Werte von k berechnen.

Beispiele:

1.1 Wie lauten die ersten Glieder der durch die Bildungsvorschrift

$$\left\{\frac{1}{k}\right\} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

gegebenen Zahlenfolge?

Lösung:

Das allgemeine Glied dieser Zahlenfolge ist $a_k = \dfrac{1}{k}$.
Setzt man hierin für k der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ ein, so ergeben sich als Anfangsglieder der Folge

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Da kein Endwert für k angegeben ist, kann man die Zahlenfolge beliebig weit fortsetzen. Es liegt eine *unendliche Zahlenfolge* vor.

1.2 Bei der durch

$$\left\{\frac{(-1)^k}{k}\right\} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

gegebenen Folge lauten die ersten Glieder

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = -\frac{1}{5}, \quad \ldots$$

Die Potenz $(-1)^k$ im Zähler der Bildungsvorschrift bewirkt einen Vorzeichenwechsel bei jedem Glied der Folge.
Folgen, bei denen das Vorzeichen der aufeinander folgenden Glieder ständig wechselt, werden *alternierende Folgen* genannt.

1.3 Die Zahlenfolge

$$\{2 + 3k\} \qquad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

besitzt nur 8 Glieder, denn für k wurde nur eine endliche Anzahl von Werten vorgegeben:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 11, \quad a_4 = 14, \quad a_5 = 17, \quad a_6 = 20, \quad a_7 = 23.$$

Hier liegt eine *endliche Zahlenfolge* vor. Sie gehört zu den *arithmetischen Zahlenfolgen*, die man daran erkennt, dass die Differenz zweier beliebiger aufeinander folgender Glieder immer denselben Wert besitzt.
Ist a_1 das *Anfangsglied* einer arithmetischen Folge und d die konstante Differenz zweier aufeinander folgender Glieder, dann ergibt sich folgendes *Bildungsgesetz für arithmetische Zahlenfolgen*:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1) \cdot d}$$

Im gegebenen Beispiel ist $a_1 = 2$ und $d = 3$.

1.4 Die durch

$$\left\{ \frac{5}{10^k} \right\} \qquad \text{mit} \quad k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$$

gegebene endliche Zahlenfolge besitzt die fünf Glieder

$$a_0 = 5, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.05, \quad a_3 = 0.005, \quad a_4 = 0.0005.$$

Diese Folge gehört zu den *geometrischen Zahlenfolgen*, die dadurch gekennzeichnet sind, dass der Quotient zweier beliebiger aufeinander folgender Glieder stets konstant ist.
Ist a_1 das Anfangsglied und q der konstant bleibende Quotient zweier aufeinander folgender Glieder, so ergibt sich folgender *allgemeiner Aufbau für geometrische Zahlenfolgen*:

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{a_1} &= q \rightarrow a_2 = a_1 \cdot q \\
\frac{a_3}{a_2} &= q \rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \quad \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \\
\frac{a_4}{a_3} &= q \rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \quad \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
\frac{a_k}{a_{k-1}} &= q \rightarrow a_k = a_{k-1} \cdot q \rightarrow \boxed{a_k = a_1 \cdot q^{k-1}}
\end{aligned}$$

Im vorliegenden Beispiel ist $a_1 = 5$ und $q = 0.1$.

In den Beispielen 1.3 und 1.4 konnte das allgemeine Glied a_k jeweils durch das vorhergehende Glied ausgedrückt werden:

$a_k = a_{k-1} + d$ bei der arithmetischen und

$a_k = a_{k-1} \cdot q$ bei der geometrischen Zahlenfolge.

Eine Beziehung zwischen a_k und bereits berechneten Gliedern der Folge, aus der dann a_k ermittelt werden kann, bezeichnet man als *rekursive Darstellung*. Ist außerdem noch das Anfangsglied bekannt, so kann man mithilfe dieser **Rekursionsformel** alle Glieder der Folge berechnen.

Beispiele:

1.5 Wie lauten die ersten fünf Glieder der Folge, die durch die Rekursionsformel

$a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = 1$

gegeben ist?

Lösung:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 + 1 = 6 + 1 = 7 \\ a_4 &= 2 \cdot a_3 + 1 = 14 + 1 = 15 \\ a_5 &= 2 \cdot a_4 + 1 = 30 + 1 = 31 \end{aligned}$$

1.6 Es sind die ersten fünf Glieder der Folge zu berechnen, die durch die Rekursionsformel

$$a_k = \frac{a_{k-1} - a_{k-2}}{2} \qquad \text{mit} \qquad a_1 = 5 \qquad \text{und} \qquad a_2 = 3$$

gegeben ist.

Lösung:

In dieser Rekursionsformel wird das k-te Glied a_k der Folge durch die beiden vorhergehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ausgedrückt. Daher müssen hier die ersten beiden Glieder der Folge für die Berechnung der nachfolgenden Glieder bekannt sein.
Für $a_1 = 5$ und $a_2 = 3$ ergibt sich

$$a_3 = \frac{3-5}{2} = -1, \qquad a_4 = \frac{-1-3}{2} = -2 \qquad \text{und} \qquad a_5 = \frac{-2-(-1)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

In den bisherigen Beispielen wurde demonstriert, wie man die einzelnen Glieder einer Zahlenfolge berechnen kann, wenn das Bildungsgesetz der Folge bekannt ist. Ebenso oft hat man jedoch die umgekehrte Aufgabenstellung zu lösen:

Gegeben ist eine Anzahl aufeinander folgender Glieder einer Zahlenfolge.
Welche Gesetzmäßigkeit liegt der Folge zugrunde, d. h., wie lautet das allgemeine Glied der Folge?

Beispiele:

1.7 Es soll eine Bildungsvorschrift für die Folge der geraden Zahlen von 2 bis 20 angegeben werden.

Lösung:
Alle geraden Zahlen enthalten den Faktor 2. Die gesuchte Folge lässt sich demnach in der Form

$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \ldots, 2 \cdot 9, 2 \cdot 10$

schreiben, sodass die Bildungsvorschrift

$\{2 \cdot k\} \qquad \text{mit} \qquad k = 1, 2, \ldots, 10$

lautet. Eine andere Lösungsvariante ist dann gegeben, wenn man erkennt, dass die zu untersuchende Zahlenfolge eine *arithmetische Folge* ist. (Die Differenz zwischen allen benachbarten Gliedern der Folge ist immer 2.) Auf diese Weise entsteht mit $a_1 = 2$ und $d = 2$ (vgl. Beispiel 1.3)

$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d = 2 + (k-1) \cdot 2 = 2k$

in Übereinstimmung mit der oben gefundenen Lösung.

1.8 Wie lautet die Bildungsvorschrift für die Folge $1, -3, 5, -7, 9, \ldots$?

Lösung:
Man erkennt, dass eine *unendliche alternierende Folge* vorliegt, in der der Reihe nach alle ungeraden Zahlen vorkommen.
Den Vorzeichenwechsel kann man durch Potenzen von -1 bewirken. Es ist bei der Festlegung des Exponenten nur sorgfältig darauf zu achten, dass als erstes Glied $+1$ entsteht.
Da sich jede ungerade Zahl, wenn man mit $k = 0$ beginnt, in der Form $2k + 1$ oder, wenn man mit $k = 1$ beginnt, in der Form $2k - 1$ mit $k \in \mathbf{N}$ darstellen lässt, ergeben sich u. a. die folgenden möglichen Varianten einer Bildungsvorschrift der gegebenen Folge:

$$\begin{aligned}
&\{(-1)^k \cdot (2k+1)\} \quad && k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\
&\{(-1)^{k+1} \cdot (2k-1)\} && k = 1, 2, 3, 4, \ldots, \\
&\{(-1)^{k-1} \cdot (2k-1)\} && k = 1, 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}$$

1.9 In der Folge $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ treten lauter echte Brüche auf, bei denen im Zähler der Reihe nach sämtliche natürliche Zahlen stehen, während die Nenner immer um 1 größer sind als die zugehörigen Zähler. Damit ergibt sich als Bildungsgesetz der Folge

$$\left\{\frac{k}{k+1}\right\} \qquad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

1.10 Die bei der Folge 1,2,6,24,120,720,5040,... auftretende Gesetzmäßigkeit ist nicht so einfach zu erkennen wie in den vorangegangenen Beispielen.
In derartigen Fällen muss man versuchen, Beziehungen zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern herzustellen. Hier ist

$a_1 = 1, \qquad a_2 = a_1 \cdot 2, \qquad a_3 = a_2 \cdot 3, \qquad a_4 = a_3 \cdot 4, \qquad a_5 = a_4 \cdot 5, \qquad \ldots$

Daraus folgt als *rekursive Darstellung* der Folge

$a_k = a_{k-1} \cdot k \qquad \text{mit} \qquad a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$

Beachtet man, dass

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 = 1!, \\
a_2 &= a_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2!, \\
a_3 &= a_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!, \\
a_4 &= a_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!, \ldots
\end{aligned}$$

ist, dann lässt sich die gegebene Folge auch in der Form

$\{k!\} \qquad \text{mit} \qquad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$

schreiben.

Die Ermittlung der bei einer Zahlenfolge vorliegenden Gesetzmäßigkeit zwischen den einzelnen Gliedern, wie sie in den Beispielen 1.7 bis 1.10 vorgeführt wurde, liefert jedoch nur dann ein *gesichertes Ergebnis*, wenn man eine ausreichende Anzahl von Gliedern kennt.

Wenn nicht genügend Glieder der Folge bekannt sind, dann kann es durchaus vorkommen, dass es mehrere ganz unterschiedliche Möglichkeiten für die Formulierung des allgemeinen Gliedes der Folge geben kann. Dies soll am folgenden Beispiel demonstriert werden.

Beispiel:

1.11 Die drei ersten Glieder einer Folge lauten $2, 4, 8$. Welche Bildungsvorschrift könnte dieser Folge zugrunde liegen?

Lösung:

Es ist augenfällig, dass jedes der drei angegebenen Glieder jeweils das Doppelte des vorangegangenen Gliedes ist, sodass es sich um eine *geometrische Folge* mit $a_1 = 2$ und $q = 2$ handeln könnte:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2 \cdot 2, \quad a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad \ldots$$

Damit wäre eine erste Bildungsvorschrift gefunden:

$$\{2^k\} \qquad \text{mit} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Diese Folge würde mit den Gliedern

$$\{2^k\} = 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

beginnen.
Für die drei Anfangsglieder könnte man jedoch auch die folgende Gesetzmäßigkeit erkennen:

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 2 + 2 = 2 + 1 \cdot 2, \qquad a_3 = 2 + 6 = 2 + 2 \cdot 3,$$

woraus sich schlussfolgern ließe, dass die Bildungsvorschrift der Folge

$$\{a_k\} = \{2 + (k-1) \cdot k\} \qquad \text{mit} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

lautet. In diesem Falle würden die ersten 6 Glieder der Folge

$$\{2 + (k-1) \cdot k\} = 2, 4, 8, 14, 22, 32, \ldots$$

sein.
Schließlich sei noch auf eine weitere Gesetzmäßigkeit hingewiesen, die für die ersten drei Glieder der Folge zutrifft, die jedoch nicht so leicht erkennbar ist wie die vorher genannten Bildungsgesetze. Der Ausdruck $k^3 - 2k^2 + 3k + 2$ liefert nämlich für $k = 0$, $k = 1$ und $k = 2$ die in der Aufgabenstellung angegebenen Werte 2,4 und 8, sodass auch die Vermutung gerechtfertigt ist, dass die Folge durch

$$\{k^3 - 2k^2 + 3k + 2\} = 2, 4, 8, 20, 46, 92, \ldots$$

gegeben sein kann.
Alle drei Folgen erfüllen die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen.
Die drei in der Aufgabenstellung angegebenen Glieder gestatten es also *nicht*, mit Sicherheit sagen zu können, wie das allgemeine Bildungsgesetz der Folge lautet. Erst bei einer größeren Anzahl von gegebenen Gliedern ließe sich feststellen, welche der drei Varianten als Bildungsvorschrift für die Folge infrage kommt. Dabei kann man nicht ausschließen, dass das für dieses Beispiel zutreffende Bildungsgesetz noch gar nicht gefunden ist.

Aufgaben:

1.1 Wie lauten die ersten fünf Glieder der Folgen

a) $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ **b)** $\{1 - 2k\}$ $k = 2, 3, 4, \ldots$

c) $\left\{\frac{k-2}{k}\right\}$ $k = 4, 5, 6, \ldots$ **d)** $\{3^k\}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

e) $\left\{\frac{(-1)^k}{3k-1}\right\}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ **f)** $\{3 \cdot (-1)^k\}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

g) $\left\{\frac{2^k}{k!}\right\}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ **h)** $\left\{\frac{k}{2k-1}\right\}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

1.2 Von den folgenden in rekursiver Darstellung gegebenen Folgen sollen die ersten fünf Glieder bestimmt werden.

a) $a_k = 0.5 \cdot a_{k-1}$ $a_1 = 2$ **b)** $a_k = 2 \cdot a_{k-1} - 4$ $a_1 = 2$

c) $a_k = 2 \cdot a_{k-1} - 4$ $a_2 = 2$ **d)** $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k-2}}{2}$ $a_1 = 1, a_2 = 3$

e) $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1}$ $a_1 = 1, a_2 = 2$ **f)** $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1}$ $a_1 = 1, a_2 = 3$

g) $a_k = -a_{k-1}$ $a_1 = 4$ **h)** $a_k = \frac{1}{a_{k-1} \cdot a_{k-2}}$ $a_1 = 2, a_2 = 0.5$

1.3 Welche der in den Aufgaben 1.1 und 1.2 angegebenen Folgen sind

a) arithmetische Folgen? Geben Sie a_1 und d an.
b) geometische Folgen? Geben Sie a_1 und q an.

1.4 Wie lautet das allgemeine Glied der angegebenen Folgen? Für welche k-Werte erhält man die ersten 5 Glieder?

a) Stammbrüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **b)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \ldots$ **d)** $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

e) 100, 90, 80, 70, 60, ... **f)** $-100, 10, -1, 0.1, -0.01, \ldots$

g) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$ **h)** $-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{8}{9}, -\frac{11}{12}, \ldots$

1.5 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a wird ein Kreis einbeschrieben, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. (vgl. Bild 1.1).
a) Wie lautet die Folge der Quadratseiten?
b) Wie lautet die Folge der Flächeninhalte der einbeschriebenen Kreise?

1.6 Einem Halbkreis mit dem Radius $r_1 = 5$ cm wird ein Kreis einbeschrieben, der Hälfte dieses Kreises wiederum ein Kreis usw. (vgl. Bild 1.2).
a) Wie lautet die Folge der Längen der ersten vier Halbkreislinien?
b) Berechnen Sie die Folge der ersten vier Halbkreisflächen

1.7 Mithilfe einer Folge von gleichseitigen Dreiecken wird eine spiralähnliche Figur konstruiert (vgl. Bild 1.3). Die Seitenlänge des ersten Dreiecks beträgt $a = 5$ cm.
Für die ersten fünf Dreiecke soll
a) die Folge der Dreiecksumfänge,
b) die Folge der Dreiecksfläche
berechnet werden.

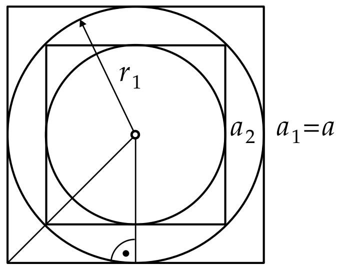

Bild 1.1

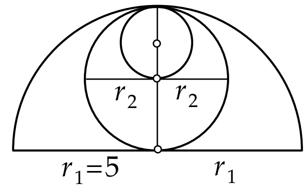

Bild 1.2

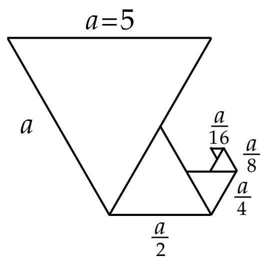

Bild 1.3

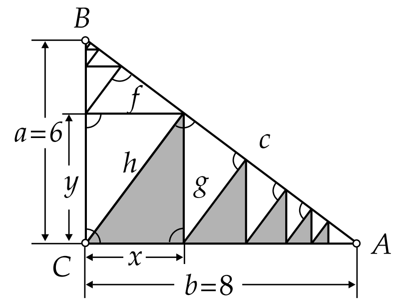

Bild 1.4

1.8 In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ fällt man vom Fußpunkt der Höhe auf die Hypotenuse c je ein Lot auf die beiden Katheten (vgl. Bild 1.4). Von den Fußpunkten dieser Lote fällt man wiederum jeweils ein Lot auf die Hypotenuse usw. Es soll
a) die Folge der Längen der Hypotenusen h,
b) die Folge der Längen der Höhen g und
c) die Folge der im Bild 1.4 schraffierte Dreiecksfläche
ermittelt werden.

1.9 Beim Papierformat DIN A 0 besitzt das Blatt eine Fläche von $1\,\text{m}^2$. Die Blattbreite verhält sich zur Blatthöhe wie $1 : \sqrt{2}$. Die folgenden Papierformate DIN A 1, DIN A 2, ... entstehen dadurch, dass das vorhergehende Blatt jeweils längs der Mittellinie der längeren Seite halbiert wird.
Berechnen Sie die Folge der Seitenlängen der Formate DIN A 0 bis DIN A 8. (Die Ergebnisse sollen auf volle mm gerundet werden.)

1.1.2 Eigenschaften von Zahlenfolgen

Der allgemeine Aufbau des Bildungsgesetzes für die Glieder einer Zahlenfolge

$$a_k = f(k)$$

stellt eine Funktionsgleichung dar. Während bei den Funktionen $y = f(x)$ der Definitionsbe reich DB_x für die Variable x in der Regel eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, ist bei den Folgen der Definitionsber ich DB_k für die Variable k eine *Teilmenge der natürlichen Zahlen*.

Genau so, wie man bei $y = f(x)$ aufgrund der Funktionsgleichung zu jedem $x \in \text{DB}_x$ ein zugehöriges y berechnen kann, lässt sich bei den Folgen für jedes $k \in \text{DB}_k$ der zugehörige Wert $f(k)$ des k-ten Gliedes der Folge angeben. Damit gelten für die Zahlenfolgen dieselben Eigenschaften, die im Band 1 bereits für die Funktionen beschrieben worden sind.

Die wichtigsten dieser Eigenschaften sollen hier noch einmal auf die Zahlenfolgen zugeschnitten zusammengefasst werden.

1.1.2.1 Monotonie einer Zahlenfolge

> Eine Zahlenfolge $\{a_k\}$ heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $k \in \mathrm{DB}_k$ gilt
> $$a_k \leq a_{k+1},$$
> sie heißt **monoton fallend**, wenn für alle $k \in \mathrm{DB}_k$ gilt
> $$a_k \geq a_{k+1}.$$
> Gilt für kein $k \in \mathrm{DB}_k$ das Gleichheitszeichen in den beiden angegebenen Ungleichungen, dann wird die Folge *streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend* genannt.

Weitere Einzelheiten über die Monotonie von Funktionen finde sich im Abschnitt 4.2.2 des Bandes 1.

Nach dieser Definitio sind die Folgen aus den Beispielen 1.1 und 1.4 streng monoton fallend, während die Folgen aus den Beispielen 1.3 und 1.5 streng monoton wachsen.

Die Folge aus dem Beispiel 1.2 ist eine *alternierende Folge*. Für sie gilt

$$\boxed{a_k \cdot a_{k+1} < 0 \qquad \text{für alle } k.}$$

Beispiel:

1.12 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ... ist eine streng monoton wachsende Zahlenfolge.
Dagegen ist -0.9, -0.99, -0.999, -0.9999, ... eine streng monoton fallende Zahlenfolge.
Die Zahlenfolge 1, 1, 1, ... ist eine Folge mit konstanten Gliedern.
Nach der oben angegebenen Definitio kann man sie sowohl als eine monoton (jedoch *nicht streng monoton*) wachsende als auch als eine monoton (aber *nicht streng monoton*) fallende Zahlenfolge auffassen.
Bei 0.9 ,0.7, 1.0, 0.6, 1.1, 0.5, ... kann man weder von einer monoton wachsenden noch von einer monoton fallenden Zahlenfolge sprechen.

Nicht immer lässt sich aus wenigen Gliedern einer Folge auf ein bestimmtes Monotonieverhalten schließen, denn es muss ja die Gültigkeit der Ungleichungen $a_k \leq a_{k+1}$ bzw. $a_k \geq a_{k+1}$ für *alle* $k \in \mathrm{DB}_k$ gelten. In Fällen, in denen die Tendenz des Wachstums der Glieder nicht so offensichtlich erkennbar ist wie in den letzten Beispielen, ist eine exakte mathematische Untersuchung erforderlich. Wie man dabei vorgeht, soll am folgenden Beispiel demonstriert werden.

Beispiel:

1.13 Es soll untersucht werden, welche Art der Monotonie bei der Folge mit dem Bildungsgesetz $a_k = \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2}$ vorliegt.

Lösung:
Um einen Eindruck vom Verhalten dieser Folge zu bekommen, werden zunächst einige ihrer Glieder berechnet.

$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{5}{9}, \quad a_4 = \frac{7}{16}, \quad \dots, \quad a_8 = \frac{15}{64}, \quad \dots$

Da die Nenner dieser Brüche schneller wachsen als die zugehörigen Zähler, könnte man vermuten, dass eine monoton fallende Folge vorliegt, d. h. dass $a_{k+1} \leq a_k$ gelten müsste. Nimmt man an, dass diese Ungleichung richtig ist, dann folgt

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq a_k \\ \frac{2}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} && | \cdot k^2(k+1)^2 \\ 2k^2(k+1) - k^2 &\leq 2k(k+1)^2 - (k+1)^2 \\ 2k^3 + 2k^2 - k^2 &\leq 2k^3 + 4k^2 + 2k - k^2 - 2k - 1 \\ 0 &\leq 2k^2 - 1 \\ \frac{1}{2} &\leq k^2. \end{aligned}$$

Dies ist eine für alle $k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ richtige Aussage. Sie kann noch verschärft werden, denn für alle $k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ gilt sogar

$\frac{1}{2} < k^2.$

Damit ist die Annahme bestätigt, dass die Ungleichung, von der ausgegangen wurde, richtig sei. Das bedeutet aber, dass die gegebene Folge in der Tat *streng monoton fallend* ist.

1.1.2.2 Beschränktheit einer Zahlenfolge

Für viele Untersuchungen ist es von großer Bedeutung zu wissen, ob eine Folge *beschränkt* ist. In Anlehnung an die im Band 1, Abschnitt 4.2.1 angegebene Defin tion der Beschränktheit einer Funktion gilt für Folgen:

> Eine Zahlenfolge $\{a_k\}$ heißt **beschränkt**, wenn es zwei reelle Zahlen A und B gibt, sodass für alle $k \in \mathrm{DB}_k$ gilt
> $A \leq a_k \leq B.$
> Existiert nur A, dann heißt die Folge *nach unten beschränkt*, existiert nur B, dann heißt die Folge *nach oben beschränkt*.

In diesem Sinne ist die Folge aus Beispiel 1.1 beschränkt, denn für sie gilt $0 < a_k \leq 1$ für alle k.

Auch die im Beispiel 1.2 behandelte Folge ist beschränkt, denn für alle k gilt in diesem Falle $-1 \leq a_k < 1$.

Die Folge aus Beispiel 1.3 hingegen ist nur nach unten beschränkt, weil für alle k eine untere Schranke, nämlich 2, angegeben werden kann. Eine obere Schranke lässt sich nicht angeben, da die Glieder der Folge mit wachsendem k immer größer werden. Hier gilt also nur $a_k \geq 2$.

Jede endliche Folge ist beschränkt. Unendliche Folgen hingegen können beschränkt sein, sie müssen es aber nicht.

Für die in der Definitio der Beschränktheit einer Folge angegebenen reellen Größen A und B gibt es viele mögliche Zahlen. So könnte man beispielsweise im Beispiel 1.3 auch sagen, für alle k würde gelten $a_k \geq 1.999$, oder $a_k \geq 0$, oder $a_k \geq -1000$ usw. Unter allen diesen möglichen unteren Schranken der Folge gibt es eine größte, nämlich $A_{\max} = 2$.

Für die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke gibt es eine besondere Bezeichnung:

> Die *kleinste obere Schranke* heißt **Supremum** oder *obere Grenze*.
> Die *größte untere Schranke* wird **Infimu** oder *untere Grenze* genannt.

Bei einer monoton wachsenden (fallenden) Folge ist das erste Glied das Infimu (Supremum).

Nicht immer lässt sich aus dem Aufbau einer Folge sofort erkennen, ob es eine obere bzw. untere Schranke gibt. Am folgenden Beispiel soll gezeigt werden, wie man in einem solchen Falle vorgehen kann.

Beispiel:

1.14 Die Folge $\left\{\dfrac{3k+1}{k+1}\right\}$ mit $k \in \mathbf{N}$ wächst monoton. (Weisen Sie das bitte selbstständig nach!) Es soll nachgeprüft werden, ob 2.5 eine obere Schranke für die Folge ist, und, wenn dies nicht der Fall sein sollte, ob sich eine obere Schranke für die Folge finde lässt.

Lösung:

Wenn 2.5 eine obere Schranke für die Folge sein soll, dann muss für alle $k \in \mathbf{N}$ die Ungleichung

$$a_k \leq 2.5 \qquad \text{oder} \qquad \frac{3k+1}{k+1} \leq \frac{5}{2}$$

gelten.
Aus dieser Ungleichung erhält man durch Erweitern mit dem Hauptnenner

$$6k + 2 \leq 5k + 5$$

woraus

$$k \leq 3$$

folgt.
Das bedeutet aber, dass nur die ersten drei Glieder der Folge kleiner sind als 2.5, dass also 2.5 *keine obere Schranke* der Folge sein kann.
Eine obere Schranke für die Glieder der Folge lässt sich leicht ermitteln, wenn man das allgemeine Glied wie folgt umformt:

$$a_k = \frac{3k+1}{k+1} = \frac{3k+3-2}{k+1} = \frac{3(k+1)-2}{k+1} = 3 - \frac{2}{k+1}.$$

Da der Bruch $\dfrac{2}{k+1}$ für alle $k \in \mathbf{N}$ einen positiven Wert besitzt, muss a_k auf jeden Fall kleiner als 3 sein. Lässt man k über alle Grenzen wachsen, so strebt der Bruch gegen den Wert null, sodass

$$\sup(a_k) = 3$$

sein muss.