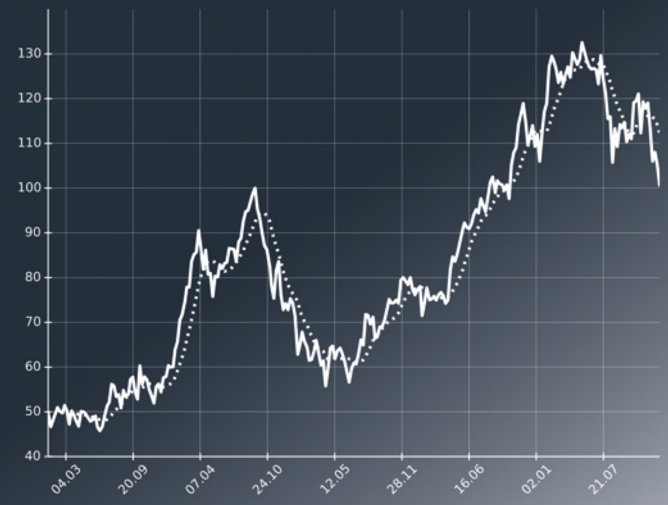
A. Pfeifer



FINANZMATHEMATIK

LEHRBUCH FÜR STUDIUM UND PRAXIS

Mit Futures, Optionen, Swaps und anderen Derivaten

Edition
Harri
Deutsch

EUROPA LEHRMITTEL

ISBN: 978-3-8085-5629-0 (Buch)
ISBN: 978-3-8085-5835-5 (E-Book)

Der Titel erscheint in der Edition Harri Deutsch des Verlages Europa-Lehrmittel.

Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis

Finanzmathematik

Lehrbuch für Studium und Praxis

Mit Futures, Optionen, Swaps
und anderen Derivaten

von
Andreas Pfeifer

6., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56283

Der Autor
Prof. Dr. Andreas Pfeifer ist Professor für Finanz- und Wirtschaftsmathematik an der Hochschule Darmstadt (University of Applied Sciences).
E-Mail: andreas.pfeifer@h-da.de

6., aktualisierte Auflage 2016
Druck 5 4 3 2 1

Die bisherigen Auflagen sind unter dem Titel „Praktische Finanzmathematik“ erschienen.

ISBN 978-3-8085-5629-0

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Für die **6. Auflage** wurde das Konzept des Buches beibehalten, aber der Inhalt erheblich überarbeitet und auch erweitert:

Eine **Vielzahl an Aktualisierungen** wurde vorgenommen: Angefangen von der Preisangabenverordnung (PAngV) über negative Zinsen bis hin zu neuen Bedingungen bei der geometrisch-degressiven Abschreibung und bei der Bewertung von Derivaten, um nur einige Themen zu nennen.

Auch wurden **viele Ergänzungen** eingefügt, unter anderem zu geometrischen und arithmetischen Mittelwerten, zu Auswirkungen von Zinseszinsen bei niedrigen Zinssätzen, zu Treasury-Bills, zum Mehrkurvenansatz bei Zinsderivaten und zum Einkommensteuertarif in Österreich.

Ganze Abschnitte – wie beispielsweise zu Steuertarifen in Deutschland – wurden **neu erstellt**. Das Literaturverzeichnis ist aktualisiert und auf grundlegende Werke beschränkt worden. Der Seitenumfang des Buches ist auf insgesamt 452 Seiten angewachsen.

Extras: Online
Für die im Buch aufgeführten Beispiele und Aufgaben gibt es **Excel-Dateien** unter der Internet-Adresse **www.europa-lehrmittel.de/56283,** mit denen Sie auf einfache Weise die Beispiele und Aufgaben des Buches nicht nur nachvollziehen, sondern auch mit anderen Zahlenwerten nachrechnen können.

Vom gleichen Autor und im gleichen Verlag ist **„Finanzmathematik – Das große Aufgabenbuch“** mit 444 Aufgaben**,** ausführlichen Lösungswegen und einer herausnehmbaren Formelsammlung erschienen.

Das Buch wendet sich an Studierende von Fachhochschulen und Universitäten sowie an Praktiker in Banken, in Versicherungen und in kaufmännischen Bereichen, die sich mit Finanzmathematik beschäftigen. Darüber hinaus richtet es sich an alle, die Interesse an finanzmathematischen Fragestellungen und Antworten haben. Es wird viel Wert auf Anwendungen und Praxisbeispiele gelegt. Zum Abschluss jedes Kapitels gibt es **Aufgaben**, deren **Lösungen** Sie im Anhang finden.

In den Kapiteln 1 bis 8 wird der klassische Stoff der Finanzmathematik behandelt, wie die **Zins- und Zinseszinsrechnung** (einschließlich der Darstellung verschiedener Zinstage-Methoden und Geschäftstage-Konventionen), das **Äquivalenzprinzip**, die **Renten- und Tilgungsrechnung** sowie verschiedene Arten der **Abschreibung**. Die Ermittlung des **effektiven Jahreszinses** nach verschiedenen Methoden u.a. nach der deutschen **Preisangabenverordnung** wird anhand vieler Beispiele erläutert. Umfassend wird im Kapitel 7 die **Bewertung festverzinslicher Wertpapiere** behandelt. Erklärt werden u.a. Begriffe wie **Duration**, **Konvexität** und **Zinsimmunisierung**. Im Kapitel 8 werden **Investmentfonds** und dabei insbesondere die Auswirkungen des **Durchschnittskosteneffekts** (Cost-Average-Effekt) auf Anlageerfolge ausführlich erläutert.

Die Bewertung von Wertpapierdepots (Portfolios) aufgrund von **Rendite und Risiko** wird im Kapitel 9 dargestellt. Hier wird auch erklärt, was die Kennzahl **Volatilität** bedeutet, die zur Bewertung vieler Finanzprodukte notwendig ist.

Derivative Finanzprodukte wie **Optionen** (einschließlich Binomialmodell und Black-Scholes-Merton-Modell)**, Futures, Forward-Rate-Agreements (FRAs), Swaps, Caps, Floors, Collars** und **Repos** werden im Kapitel 10 erklärt und bewertet. Kapitel 11 behandelt die Kennzahl **Value-at-Risk**. Anhand von Beispielen werden die wichtigsten Methoden zur Berechnung dieser Kennzahl beschrieben. Dabei wird insbesondere auf die **Varianz-Kovarianz-Methode** eingegangen; aber auch die **Historische Simulation** und die **Monte-Carlo-Simulation** werden erklärt. Außerdem wird das **Mapping von Zahlungsströmen** erläutert.

Zu den in diesem Buch angegebenen Beispielen und Aufgaben gibt es **Excel-Dateien** unter der Internet-Adresse www.europa-lehrmittel.de/56283, mit denen Sie auf einfache Weise die Beispiele und die Lösungen der Aufgaben nicht nur nachvollziehen, sondern auch mit anderen Zahlenwerten nachrechnen können. Dazu finden Sie genauere Informationen im Anhang A. Dort sind auch nützliche Hinweise zur **Anwendung von Excel in der Finanzmathematik** angegeben.

Die **Lösungen** zu den Aufgaben am Ende jeden Kapitels finden Sie im Anhang B.

Bei der sogenannten modernen oder stochastischen Finanzmathematik (ab Kap. 9) spielen die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine große Rolle. **Statistikgrundlagen** – wie beispielsweise zur Normalverteilung – finden Sie im Anhang C.

Im Anhang D sind die **Tarife der Einkommensteuer, des Solidaritätszuschlags und der Abgeltungsteuer in Deutschland** angegeben. Begriffe wie **Grenzsteuersatz, Eingangssteuersatz** und **Durchschnittssteuersatz** werden erklärt. Angaben zum **Einkommensteuertarif in Österreich** und zur **Steuerberechnung in der Schweiz** sind in Anhang E und F zu finden. Anhang G enthält eine kurze **Beschreibung wichtiger Zinssätze**.

Das Ende von Beispielen ist durch das Symbol □ gekennzeichnet.

Bedanken möchte ich mich bei allen, die mir Hinweise und Verbesserungsvorschläge zu vorherigen Auflagen gegeben haben, insbesondere bei Herrn Prof. Dr. Kowitz für seine Hinweise zur dritten Auflage. Für weitere Anregungen und Hinweise bin ich dankbar.

Unter **www.europa-lehrmittel.de/56283** finden Sie im Internet neben den Excel-Dateien aktuelle Ergänzungen und – falls notwendig – Fehlerkorrekturen.

Groß-Zimmern, im Januar 2016 Andreas Pfeifer

Inhaltsübersicht

Anhang

Seid nicht geldgierig, und lasst euch genügen an dem, was da ist.
Denn der Herr hat gesagt: „Ich will dich nicht verlassen und nicht von dir weichen.“

Die Bibel. Hebräer 13, 5 (Übersetzung nach Martin Luther)

„Wie oft soll ich es Ihnen eigentlich noch erklären“, sagt der Mathematik-Professor in der Vorlesung, „es gibt keine größere und kleinere Hälfte. Eine Hälfte ist eben eine Hälfte.
– Aber ich sehe schon, die größere Hälfte von Ihnen begreift das nie!“

Eine Frau fragt ihren vom Arzt kommenden Mann:
„Was hat er gesagt?“ „Zehn Euro.“
„Nein, ich meine doch, was hast du gehabt? “ „Acht Euro!“
„Nein! Was dir gefehlt hat, will ich wissen!“ „Zwei Euro!“

Seit Abschaffung der 10-Euro-Praxisgebühr im Januar 2013
nur noch bei Zusatzleistungen vorkommend

Aus einem Brief eines Vaters an seinen Sohn, der studiert:
„Anbei die von dir gewünschten zehn Euro. Übrigens schreibt man zehn Euro mit einer Null und nicht mit drei Nullen.“

Von jetzt an werde ich nur so viel ausgeben, wie ich einnehme, selbst wenn ich mir dafür Geld borgen muss.

Von Mark Twain, amerik. Schriftsteller, 1835 – 1910, überliefert

Ein Schotte kommt spät abends nach Hause und erzählt stolz seiner Frau:
„Heute habe ich mir das Geld für den Bus gespart. Ich bin hinter dem letzten Bus hergelaufen; habe ihn aber nicht mehr erreicht.“
Seine Frau antwortete daraufhin kritisch: „Warum bist du nicht hinter einem Taxi hergelaufen, du Dummer? Dann hättest du noch viel mehr sparen können.“

2.2 Einfache Verzinsung

Def. 2.2.1:

Der **Zins** (aus lat.: census (Abgabe), engl.: interest) oder **Zinsbetrag** ist der Preis (das Entgelt) für die Überlassung von Geld oder Kapital zur Nutzung.

Legen Sie Geld oder Kapital auf Zeit an, so erhalten Sie Zinsen. Bei **einfachen Zinsen** (oder **linearen Zinsen**) werden diese Zinsen proportional zum angelegten Betrag und proportional zur Zeit gezahlt. Der Proportionalitätsfaktor wird mit **Zinssatz** (oder **Zinsrate**, engl.: interest rate) bezeichnet und mit i abgekürzt. Das heißt, die **Zinsen** Z_t (auch **Zins** oder **Zinsbetrag** genannt) betragen:

$Z_t = K_0 \cdot t \cdot i$, wobei

K_0 der angelegte Betrag ist, der auch **Anfangskapital, Kapital** (lat.: caput = Haupt, engl.: capital) **zu Beginn**, **Anfangswert**, **Gegenwartswert** oder **Barwert** genannt wird.
t, genannt **Laufzeit**, ist die Anzahl der Zeiteinheiten oder Zeitperioden, in der das Kapital angelegt ist.

Am Ende der Laufzeit wird das Anfangskapital plus Zinsen fällig; diese Summe

$K_t = K_0 + Z_t$

wird **Endwert** (engl.: final value), **Endkapital, Wert nach der Laufzeit t** oder seltener **Zeitwert** genannt.

Die Angabe des Zinssatzes wird dabei auf eine Zeiteinheit, meist auf ein Jahr, bezogen. Bei der Bedeutung des Zinssatzes ist deshalb immer auf die Zeiteinheit zu achten, auf die er sich bezieht. Beispiele:

p.a. (lat.: per annum) steht für pro Jahr (selten: p. J.). Wenn sich der Zinssatz auf ein Jahr bezieht, wird die Angabe p.a. bzw. pro Jahr in der Regel weggelassen.
p.Q. steht für pro Quartal (3 Monate).
p.M. steht für pro Monat.

Wichtig: Die Laufzeit t und der Zinssatz i müssen sich auf dieselbe Zeiteinheit beziehen.

Statt der Angabe des Zinssatzes i wird oft auch der **Zinsfuß** p angegeben. Er ist definiert als:

$p = 100 \cdot i$.

(In manchen Büchern wird p auch als Zinssatz bezeichnet.)

Beispiel 2.2.1:

Es sei i = 3% der Zinssatz. Da die Angabe der Zeitperiode fehlt, bezieht sich der Zinssatz auf ein Jahr, i = 3% p.a. Es gilt i = 3% = 0,03 = 3/100. Der Zinsfuß p ist 3.

Legen Sie 1.000 € für ein Jahr an, sind K_0 = 1.000 € das Anfangskapital und t = 1 die Laufzeit. Die Zinsen für ein Jahr betragen: Z_1 = 1.000 € · 1 · 0,03 = 30 €. Legen Sie das Kapital nur einen Monat an, ist t = 1/12. Die Zinsen betragen dann

$$Z_{\frac{1}{12}} = 1.000\ € \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}03 = 2{,}50\ €.$$

Legen Sie das Kapital zwei Jahre an, betragen die Zinsen Z_2 = 1.000 € · 2 · 0,03 = 60 €.

Deutlicher wäre es, wenn hinter der Angabe 2 noch die Zeiteinheit „Jahr" mit aufgeführt und hinter dem Zinssatz 0,03 noch „pro Jahr" stehen würde. In finanzmathematischen Formeln werden bei i und t meist keine Zeiteinheiten angegeben, d. h., i = 0,03 und t = 2. t ist die Anzahl der Zeitperioden, auf die sich der Zinssatz i bezieht. Da nach Def. 2.2.1 davon ausgegangen wird, dass sich die Laufzeit und der Zinssatz auf die gleiche Zeiteinheit beziehen, führt dies zu keinen Problemen.

Ist i = 0,25% der Zinssatz pro Monat, wobei $i = \frac{3\%}{12} = 0{,}25\% = 0{,}0025$, dann betragen die Zinsen nach einem Monat Z_1 = 1.000 € · 1· 0,0025 = 2,50 €. Die Zinsen bei einer Laufzeit von zwölf Monaten sind: Z_{12} = 1.000 € · 12 · 0,0025 = 30 €. D. h., ob Sie den Zinssatz pro Monat oder pro Jahr verwenden, führt zu keinem anderen Zinsbetrag, wenn der Anlagezeitraum der Gleiche ist. Sie müssen nur beachten, dass sich bei Z_{12} die 12 auf Monate und nicht auf Jahre bezieht. □

Bemerkungen:

– Die Höhe des Zinssatzes bildet sich am Markt nach Angebot und Nachfrage und hängt von der Länge der Leihfrist sowie von geldpolitischen und gesetzgeberischen Regelungen ab. Wenn für bestimmte Anlagen der Zinssatz i negativ ist, spricht man von **Negativzins**, **Strafzins**, **Guthabengebühr** oder **Guthabenkommission**. Dann ist Geld für die Anlage (Aufbewahrung) des Geldes zu zahlen.

– In der Regel wird der Zinssatz pro Jahr angegeben. Deshalb beziehen sich alle Zinssätze, wenn nichts anderes angegeben ist, auf ein Jahr.
  Bei einfachen Zinsen ergibt der Zinssatz i p.a. den gleichen Zinsbetrag, wie die Zinssätze $\frac{i}{12}$ p.M. und $\frac{i}{4}$ p.Q. Dabei muss sich die Laufzeit jeweils auf die gleiche Zeiteinheit wie der Zinssatz beziehen. Sie dürfen also in die Formel für die Zinsen beispielsweise <u>nicht</u> den Zinssatz pro Monat und für die Laufzeit die Zahl der Jahre einsetzen.

– Die in Def. 2.2.1 angegebenen Zinsen heißen, genau genommen, einfache **nachschüssige** Zinsen. Nachschüssig heißt, dass die Zinsen am Laufzeitende fällig werden und aus dem Anfangskapital ermittelt werden.

– Bei **einfachen Zinsen** werden die Zinsen proportional zur Zeit gezahlt und nicht mitverzinst. Der Zinsbetrag ist somit pro Jahr über alle Jahre immer gleich groß. Von **Zinseszinsen** (engl.: compound interest) wird gesprochen, wenn Zinsen berechnet und dem Kapital hinzugefügt (= kapitalisiert) und dann mit diesem verzinst werden. Diese Art der Verzinsung wird in Abschnitt 2.3 ausführlich erklärt.

Satz 2.2.1 (einfache Verzinsung, auch lineare Verzinsung genannt):

Es seien K_0 das Anfangskapital, t die Laufzeit, K_t das Endkapital am Ende der Laufzeit und i der Zinssatz. i und t beziehen sich auf die gleiche Zeiteinheit. Dann gilt bei einfachen (nachschüssigen) Zinsen:

Zinsen: $Z_t = K_0 \cdot t \cdot i\,.$ (I)

Endkapital: $K_t = K_0 \cdot (1 + t \cdot i)\,.$ (II)

Anfangskapital: $K_0 = \dfrac{K_t}{1 + t \cdot i}\,.$ (III)

Laufzeit: $t = \dfrac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i}\,.$ (IV)

Zinssatz: $i = \dfrac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t}\,.$ (V)

Das Multiplikationszeichen zwischen K_0, t und i wird oft weggelassen.

Beispiel 2.2.2:

Ein Kapital von 200 € wird mit einem Zinssatz von 3% p.a. verzinst. Das Kapital ist dann nach zwei Jahren bei einfachen Zinsen auf 212 € angewachsen, denn mit:

$K_0 = 200$ €, $i = 0{,}03$ und $t = 2$ ergibt sich: $K_2 = 200\text{ €} \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}03) = 212$ €. □

Beispiel 2.2.3:

Wenn Sie nach fünf Jahren bei 3% p.a. einfachen Zinsen ein Kapital von 400 € besitzen, wie hoch ist das Kapital zu Beginn, d. h., wie hoch ist also der Barwert?

Mit $K_5 = 400$ €; $i = 0{,}03$ und $t = 5$ folgt $K_0 = \dfrac{400}{(1 + 5 \cdot 0{,}03)}\text{ €} = 347{,}83$ €. □

Bemerkungen:

1. Die Werte des Kapitals bei einfacher Verzinsung $K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots$ bilden eine arithmetische Folge (vgl. Def. 1.3.1) mit der Differenz $d = K_0 \cdot i$.
2. Aus dem Anfangskapital das Endkapital zu berechnen, wird **Aufzinsen** genannt. Der Vorgang, zu einem gegebenen Endkapital das Anfangskapital zu berechnen, heißt **Abzinsen** oder **Diskontieren**. Ursprünglich ist die Diskontierung der Ankauf eines Wechsels vor dessen Fälligkeit durch eine Bank unter Abzug von Zinsen (Diskont) von der Wechselsumme (vgl. Beispiel 2.4.2).
3. Um aus dem Endwert den Barwert zu ermitteln (Diskontierung), ist Formel (III) aus Satz 2.2.1 zu verwenden, die auch **bürgerliche (amtliche) Diskontierung** genannt wird. Diese Diskontierung ist finanzmathematisch korrekt. Manchmal wird noch die **kaufmännische Diskontierung** verwendet: $K_0 = K_t\,(1 - t\,i)$, $t \geq 0$. Diese Methode

3.3 Effektivverzinsung bei unterjährigen Zahlungen

Um den Effektivzins auszurechnen, müssen nach Def. 3.1.2 zwei Zahlungsströme äquivalent sein. Dazu wird der Wert beider Zahlungsströme benötigt. Um den Wert eines Zahlungsstroms auszurechnen, können verschiedene Zinsberechnungsmethoden angewandt werden. Auch muss der Bezugszeitpunkt festgelegt werden. Erfolgen alle Zahlungen jährlich und wird die exponentielle Zinsmethode verwendet, ist der Wert eindeutig bestimmbar: Zur Berechnung des effektiven Zinssatzes (Rendite) werden dann nach jedem Jahr die Zinsen wieder kapitalisiert und somit mitverzinst. Erfolgen Ein- bzw. Auszahlungen (beispielsweise Zinszahlungen) aber innerhalb eines Jahres, gibt es verschiedene Methoden, wie die Zinsverrechnung erfolgt (z.B. linear, exponentiell oder gemischt). Somit gibt es bei unterjährigen Zahlungen verschiedene Methoden der Effektivzinsberechnung. Dazu

Beispiel 3.3.1:

Sie zahlen bei einer Kapitalanlage 100 € ein und erhalten nach 32 Monaten 115 € zurück. Wie hoch ist die effektive Verzinsung (Rendite)?
Wenn Sie die 100 € auf ein Sparkonto anlegen, kommt es – wie Sie in Beispiel 2.5.3 gesehen haben – auch bei festem Zinssatz noch auf das genaue Datum der Einzahlung an, um berechnen zu können, wie hoch das Endkapital nach 32 Monaten ist. Also ist es wichtig, wann genau die Zinskapitalisierungszeitpunkte sind. □

Angaben über Renditen bei Sparkonten, Darlehen oder Renten sollten nicht vom genauen Einzahlungszeitpunkt abhängen, sondern nur von der Laufzeit. Denn es ist nicht praktikabel, wenn die Renditeangabe sich täglich ändert, ohne dass sich die Konditionen verändert haben. Die Methoden der Renditeberechnungen unterscheiden sich durch die Art der Lage und Verrechnung der unterjährigen Zeitanteile. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Verfahren dargestellt.

A) Braess/Fangmeyer-Methode (Sparbuchmethode)

Bei der Methode nach Braess/Fangmeyer wird als Bezugszeitpunkt für die Berechnung des effektiven Zinssatzes der Zeitpunkt der letzten auftretenden Zahlung verwendet. Unterjährige Zahlungen werden bis zum Jahresende linear aufgezinst und dann exponentiell (Zinseszinsformel) verzinst. Der gebrochene Laufzeitanteil (beispielsweise 0,25 Jahre bei einer Laufzeit von 4,25 Jahren) wird an den Anfang der Gesamtlaufzeit gelegt.[1]

Beispiel 3.3.1 (Fortsetzung):

Sie zahlen bei diesem Beispiel 100 € ein und erhalten nach 32 Monaten 115 €. Wie hoch ist die effektive Verzinsung?

[1] Wird der gebrochene Laufzeitanteil an das Ende der Laufzeit gelegt, wird diese Methode auch als **360-Tage-Methode** bezeichnet. Bei ganzen Jahren als Laufzeit gibt es keinen Unterschied zwischen der Braess/Fangmeyer- und der 360-Tage-Methode.

```
 100 €                                                Leistung
                                      115 €           Gegenleistung
|-------|--|-------|--|--------|--|-------->
0          1          2       32/12  3      Jahre
   8 M.  ↑  1 Jahr  ↑  1 Jahr   ↑          (↑=Zinskapitalisierungszeitpunkte)
```

32 Monate sind 2 Jahre und 8 Monate. Die zwei „vollen“ Laufzeitjahre werden an das Laufzeitende gelegt und der gebrochene Anteil (= 8 Monate) liegt am Anfang. 100 € werden deshalb zunächst linear 8 Monate verzinst und dann zwei Jahre exponentiell.
Bei Verwendung der Rendite i_{eff} als Zinssatz müssen die beiden Endwerte der Zahlungsströme gleich sein: $100\left(1+i_{eff}\,\frac{8}{12}\right)(1+i_{eff})^2 = 115.$

Die Renditegleichung wird mit einem Iterationsverfahren gelöst, vgl. Abschnitt 3.2. Als Lösung ergibt sich 5,369%. □

B) Exponentielle Methode[1]

Die exponentielle Methode ist weit verbreitet und wird häufig am internationalen Kapitalmarkt angewandt. Bei ihr wird die exponentielle Verzinsung angewandt: $K_t = K_0\,(1+i)^t$, um die Zahlungen auf einen Zeitpunkt zu diskontieren. Dann ist grundsätzlich der Bezugszeitpunkt nicht wichtig (vgl. Satz 3.1.1), und es brauchen auch keine Zinskapitalisierungszeitpunkte berücksichtigt zu werden, vgl. Beispiel 2.8.2 und Satz 2.8.2. Unterjährige Laufzeiten werden dabei meist auf Basis actual/actual berechnet. Die verwendete Zinstage-Methode kann aber eine andere sein.

Beispiel 3.3.1 (Fortsetzung):

Da die Laufzeit $\frac{32}{12}$ Jahre beträgt, erhalten Sie nach der exponentiellen Methode aus der Gleichung $100\,(1+i_{eff})^{\frac{32}{12}} = 115$ eine Rendite von $i_{eff} = \left(\frac{115}{100}\right)^{\frac{12}{32}} - 1 = 5{,}381\%.$ □

Beispiel 3.3.2:

Ein Darlehen von 200 € zahlen Sie nach drei Monaten mit 80 € und nach zweieinhalb Jahren mit 140 € zurück. Wie groß ist die Effektivverzinsung?
Zunächst ist die Gleichung für den Effektivzinssatz aufzustellen. Als Bezugszeitpunkt wird der Auszahlungszeitpunkt des Darlehens gewählt. Es ist jedoch bei exponentieller Verzinsung gleichgültig, welcher Bezugszeitpunkt gewählt wird, vgl. Satz 3.1.1. Es sind 80 € 0,25 Jahren und 140 € 2,5 Jahren zu diskontieren:

$$200 = 80\,(1 + i_{eff})^{-0{,}25} + 140\,(1 + i_{eff})^{-2{,}5}. \qquad (*)$$

[1] Auch ICMA-Methode (internationale Methode oder ISMA-Methode, früher AIBD-Methode) genannt. ICMA (International Capital Market Association) ist der Dachverband der an internationalen Anleihemärkten tätigen Institutionen und Händler.

9.2 Portfolioauswahl

Die im vorigen Abschnitt dargestellten Untersuchungen werden auf mehr als zwei Anlagen übertragen.

Satz 9.2.1 (Erwartungswert und Varianz der Rendite eines Portfolios mit n Anlagen):

Gegeben seien n Anlagemöglichkeiten. Es sei R_k die Zufallsvariable, die die Rendite der Anlage k angibt; sie habe den Erwartungswert $E(R_k) = \mu_k$, und die Varianz $Var(R_k) = \sigma_k^2$, $k = 1, \ldots, n$.
Die Kovarianz zwischen den Zufallsvariablen R_j und R_k sei $cov(R_j, R_k) = \sigma_{j,k}$, wobei $j, k = 1, 2, \ldots, n$.
Dann gilt für die Summe $R_P = a_1R_1 + a_2R_2 + \ldots + a_nR_n$, wobei die Koeffizienten a_k, $k = 1, \ldots, n$, reelle Zahlen sind:

$$E(R_P) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(R_k) = a^T \cdot \mu = \mu^T \cdot a,$$

$$Var(R_P) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 Var(R_k) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} a_k a_j cov(R_k, R_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k a_j cov(R_k, R_j) = a^T \cdot Cov \cdot a,$$

wobei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$ der Vektor der Gewichte und $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \ldots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ der Vektor der Erwartungswerte der Einzelanlagen ist. a^T ist der transponierte Vektor, also $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n} \\ \cdots & & & & \cdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ ist die (Varianz-)Kovarianz-Matrix.

Der **Beweis** dieses Satzes ist in vielen Statistikbüchern zu finden.

Bemerkungen:

– Die Koeffizienten a_k, $k = 1, \ldots, n$, werden auch als Gewichte oder Gewichtsfaktoren bezeichnet.

a) Die Koeffizienten haben meist die Bedeutung von Anlageanteilen. Z.B. $a_k = 0{,}3$ bedeutet, dass 30% des gesamten Portfolios in Anlage k angelegt ist.
Oft gilt noch zusätzlich die Bedingung, dass die Summe der Anteile 1 ist. In Matrizenschreibweise heißt dies $a^T \cdot e = 1$, wobei e der Vektor aus lauter Einsen, also aus n Einsen ist. R_P ist deshalb die Zufallsvariable der Rendite einer Mischung aus Einzelanlagen (mit den jeweiligen Anteilen a_k), also die Rendite eines Portfolios.
b) Die Koeffizienten können aber auch die Anlagebeträge sein. $a_k = 30.000$ € bedeutet dann, dass 30.000 € in Anlage k angelegt werden. Die Summe aller Koeffizienten ist dann der gesamte zur Verfügung stehende Anlagebetrag. R_P ist dann der Gewinn der Anlagemischung. Wenn die Koeffizienten keine Anteile, sondern Anlagebeträge sind, wird dies im Folgenden extra erwähnt.

– Wenn zusätzlich die Bedingungen $a_k \geq 0$, k = 1, .., n, gefordert werden, bedeutet dies, dass negative Anteile (= Verkauf von Anlagen) nicht erlaubt sind.

– Im Folgenden wird bei allen Beispielen und Sätzen davon ausgegangen, dass die entsprechenden Erwartungswerte und Varianzen existieren, ohne dass es noch einmal explizit erwähnt wird.

– Oftmals ist statt der Kovarianz die Korrelation angegeben. Die Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang. Zwischen Kovarianz und Korrelation besteht folgender Zusammenhang:

Korrelationskoeffizient $\rho_{k,j} = \dfrac{\operatorname{cov}(R_k, R_j)}{\sqrt{\operatorname{Var}(R_k) \cdot \operatorname{Var}(R_j)}}$. Dann folgt aus Satz 9.2.1 für die

Varianz der Rendite eines Portfolios: $\operatorname{Var}(R_P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k \cdot a_j \cdot \rho_{k,j} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_j$.

– Für Berechnungen ist es nützlich, folgende Zusammenhänge zu kennen:

$\operatorname{cov}(uX+Y, vZ) = u \cdot v \cdot \operatorname{cov}(X, Z) + v \cdot \operatorname{cov}(Y, Z)$,

$\operatorname{cov}(X, r) = 0$ und $\operatorname{cov}(X, X) = \operatorname{Var}(X)$,

wobei X, Y, Z Zufallsvariablen und u, v, r reelle Zahlen sind.

Sind X und Y unabhängig, so gilt:

$\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ und $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$. (*)

Beispiel 9.2.1:

Ein Investor besitzt 3 Anlagen. Der Gesamtwert der Anlagen ist 100.000 €. In Anlage 1 hat er 40%, in Anlage 2 40% und in Anlage 3 20% investiert, d.h. $a^T = (40\% \;\; 40\% \;\; 20\%)$. Die Erwartungswerte, das Risiko und die Korrelationen sind in Abb. 9.2.1 angegeben.

Dann gilt nach Satz 9.2.1: $E(R_p) = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3) \cdot \begin{pmatrix} 7\% \\ 10\% \\ 20\% \end{pmatrix} = (0{,}4 \;\; 0{,}4 \;\; 0{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 7\% \\ 10\% \\ 20\% \end{pmatrix} = 10{,}8\%$.

Preisangabenverordnung (PAngV): Fassung vom 18.10.2002 (BGBl I, S. 4197ff) zuletzt geändert durch Artikel 7 des Gesetzes vom 20.09.2013 (BGBl I, S. 3642ff) . (www.gesetze-im-internet.de, www.bgblportal.de)

Reitz, Stefan (2010): Mathematik in der modernen Finanzwelt: Derivate, Portfoliomodelle und Ratingverfahren; Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Reitz, Stefan; Schwarz, Willi; Martin, Marcus R. W. (2004): Zinsderivate; Wiesbaden: Vieweg

Sharpe, William F. (1964): Capital Asset Prices. A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. Journal of Finance, Vol. 19, S. 425 - 442

Sievi, Christian R. (1998): Convex3-Mapping. Sonderbeilage zu Gillardon NEWS 22, Nov. 1998, E1 - E10; Bretten: Gillardon Publishing. Im Internet verfügbar unter www.dr-sievi.de

Steiner, Manfred; Bruns, Christoph; Stöckl, Stefan (2012): Wertpapiermanagement. Professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung; Stuttgart: Schäffer-Poeschel; 10., überarbeitete Aufl.

Seydel, Rüdiger U. (2012): Tools for Computational Finance; Berlin: Springer, 5th edition

Tietze, Jürgen (2014): Einführung in die Finanzmathematik; Wiesbaden: Springer Spektrum; 12. Aufl.

Uszczapowski, Igor (2012): Optionen und Futures verstehen; München: Beck; 7., überarbeitete Aufl.

Wiedemann, Arnd (2013): Financial Engineering – Bewertung von Finanzinstrumenten; Frankfurt: Frankfurt School Verlag; 6., überarbeitete und erweiterte Aufl.

Wilmott, Paul (2006): Paul Wilmott On Quantitative Finance (3 Volume Set); New York: John Wiley & Sons, 2nd edition

Wilmott, Paul (2007): Introduces Quantitative Finance; New York: John Wiley & Sons, 2nd edition

Der faire Preis einer Aktie ist wie der Weihnachtsmann,
Man glaubt, dass es ihn gibt, aber keiner hat ihn gesehen.

Nicht nur auf Zigarettenpackungen gibt es Warnhinweise.
In England gibt es auch bei Kreditangeboten zum Erwerb von Wohneigentum eine Warnung:

Your home may be repossessed
if you do not keep up repayments on your mortgage.

Schlusswort

Im Zusammenhang mit der Finanzmathematik wird manchmal die Frage aufgeworfen: Ist es zu verantworten, ein Gebiet zu bearbeiten, das anscheinend den Reichen und den Banken Vorteile bietet und ihren Reichtum vermehrt und auch immer wieder zu Krisen führt, die nicht nur das Finanzsystem erschüttern?

Auf den ersten Blick scheint es richtig zu sein, diese Frage mit Nein zu beantworten. Durch die Finanzmathematik und deren Modelle können jedoch Risiken aufgezeigt werden. Dadurch wird die Transparenz der Finanzmärkte erhöht. Auch können mithilfe finanzmathematischer Methoden Risiken minimiert werden. Transparente und stabile Finanzmärkte sind Grundlage für den Wohlstand aller Bevölkerungsschichten.

Wichtig zu beachten ist, welche Voraussetzungen bei Berechnungen erforderlich sind. Beispielsweise beruhen manche Modelle und Verfahren, insbesondere beim Value-at-Risk, stark auf Vergangenheitsdaten. Die Ergebnisse, die dann daraus abgeleitet werden, müssen immer sehr kritisch bewertet werden. Sie fahren ja auch nicht Auto, indem Sie – statt in Fahrtrichtung zu blicken – nur in den Rückspiegel schauen.

Bei allem sollte außerdem nicht vergessen werden, was in der Bibel steht:
„Ihr sollt euch nicht Schätze sammeln auf Erden, wo sie die Motten und der Rost fressen, und wo Diebe einbrechen und stehlen. Sammelt euch aber Schätze im Himmel, wo sie weder Motten noch Rost fressen und wo die Diebe nicht einbrechen und stehlen. Denn wo dein Schatz ist, da ist auch dein Herz.“[1]

[1] Die Bibel, Matthäus 6, 19-21 (Übersetzung nach Martin Luther)

Index