Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis

Finanzmathematik

Lehrbuch für Studium und Praxis

Mit Futures, Optionen, Swaps
und anderen Derivaten

von
Andreas Pfeifer

6., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56283

Der Autor
Prof. Dr. Andreas Pfeifer ist Professor für Finanz- und Wirtschaftsmathematik an der Hochschule Darmstadt (University of Applied Sciences).
E-Mail: andreas.pfeifer@h-da.de

6., aktualisierte Auflage 2016
Druck 5 4 3 2 1

Die bisherigen Auflagen sind unter dem Titel „Praktische Finanzmathematik“ erschienen.

ISBN 978-3-8085-5629-0

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Für die **6. Auflage** wurde das Konzept des Buches beibehalten, aber der Inhalt erheblich überarbeitet und auch erweitert:

Eine **Vielzahl an Aktualisierungen** wurde vorgenommen: Angefangen von der Preisangabenverordnung (PAngV) über negative Zinsen bis hin zu neuen Bedingungen bei der geometrisch-degressiven Abschreibung und bei der Bewertung von Derivaten, um nur einige Themen zu nennen.

Auch wurden **viele Ergänzungen** eingefügt, unter anderem zu geometrischen und arithmetischen Mittelwerten, zu Auswirkungen von Zinseszinsen bei niedrigen Zinssätzen, zu Treasury-Bills, zum Mehrkurvenansatz bei Zinsderivaten und zum Einkommensteuertarif in Österreich.

Ganze Abschnitte – wie beispielsweise zu Steuertarifen in Deutschland – wurden **neu erstellt**. Das Literaturverzeichnis ist aktualisiert und auf grundlegende Werke beschränkt worden. Der Seitenumfang des Buches ist auf insgesamt 452 Seiten angewachsen.

Extras: Online
Für die im Buch aufgeführten Beispiele und Aufgaben gibt es **Excel-Dateien** unter der Internet-Adresse **www.europa-lehrmittel.de/56283,** mit denen Sie auf einfache Weise die Beispiele und Aufgaben des Buches nicht nur nachvollziehen, sondern auch mit anderen Zahlenwerten nachrechnen können.

Vom gleichen Autor und im gleichen Verlag ist **„Finanzmathematik – Das große Aufgabenbuch“** mit 444 Aufgaben**,** ausführlichen Lösungswegen und einer herausnehmbaren Formelsammlung erschienen.

Das Buch wendet sich an Studierende von Fachhochschulen und Universitäten sowie an Praktiker in Banken, in Versicherungen und in kaufmännischen Bereichen, die sich mit Finanzmathematik beschäftigen. Darüber hinaus richtet es sich an alle, die Interesse an finanzmathematischen Fragestellungen und Antworten haben. Es wird viel Wert auf Anwendungen und Praxisbeispiele gelegt. Zum Abschluss jedes Kapitels gibt es **Aufgaben**, deren **Lösungen** Sie im Anhang finden.

In den Kapiteln 1 bis 8 wird der klassische Stoff der Finanzmathematik behandelt, wie die **Zins- und Zinseszinsrechnung** (einschließlich der Darstellung verschiedener Zinstage-Methoden und Geschäftstage-Konventionen), das **Äquivalenzprinzip**, die **Renten- und Tilgungsrechnung** sowie verschiedene Arten der **Abschreibung**. Die Ermittlung des **effektiven Jahreszinses** nach verschiedenen Methoden u.a. nach der deutschen **Preisangabenverordnung** wird anhand vieler Beispiele erläutert. Umfassend wird im Kapitel 7 die **Bewertung festverzinslicher Wertpapiere** behandelt. Erklärt werden u.a. Begriffe wie **Duration**, **Konvexität** und **Zinsimmunisierung**. Im Kapitel 8 werden **Investmentfonds** und dabei insbesondere die Auswirkungen des **Durchschnittskosteneffekts** (Cost-Average-Effekt) auf Anlageerfolge ausführlich erläutert.

Die Bewertung von Wertpapierdepots (Portfolios) aufgrund von **Rendite und Risiko** wird im Kapitel 9 dargestellt. Hier wird auch erklärt, was die Kennzahl **Volatilität** bedeutet, die zur Bewertung vieler Finanzprodukte notwendig ist.

Derivative Finanzprodukte wie **Optionen** (einschließlich Binomialmodell und Black-Scholes-Merton-Modell)**, Futures, Forward-Rate-Agreements (FRAs), Swaps, Caps, Floors, Collars** und **Repos** werden im Kapitel 10 erklärt und bewertet. Kapitel 11 behandelt die Kennzahl **Value-at-Risk**. Anhand von Beispielen werden die wichtigsten Methoden zur Berechnung dieser Kennzahl beschrieben. Dabei wird insbesondere auf die **Varianz-Kovarianz-Methode** eingegangen; aber auch die **Historische Simulation** und die **Monte-Carlo-Simulation** werden erklärt. Außerdem wird das **Mapping von Zahlungsströmen** erläutert.

Zu den in diesem Buch angegebenen Beispielen und Aufgaben gibt es **Excel-Dateien** unter der Internet-Adresse www.europa-lehrmittel.de/56283, mit denen Sie auf einfache Weise die Beispiele und die Lösungen der Aufgaben nicht nur nachvollziehen, sondern auch mit anderen Zahlenwerten nachrechnen können. Dazu finden Sie genauere Informationen im Anhang A. Dort sind auch nützliche Hinweise zur **Anwendung von Excel in der Finanzmathematik** angegeben.

Die **Lösungen** zu den Aufgaben am Ende jeden Kapitels finden Sie im Anhang B.

Bei der sogenannten modernen oder stochastischen Finanzmathematik (ab Kap. 9) spielen die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine große Rolle. **Statistikgrundlagen** – wie beispielsweise zur Normalverteilung – finden Sie im Anhang C.

Im Anhang D sind die **Tarife der Einkommensteuer, des Solidaritätszuschlags und der Abgeltungsteuer in Deutschland** angegeben. Begriffe wie **Grenzsteuersatz, Eingangssteuersatz** und **Durchschnittssteuersatz** werden erklärt. Angaben zum **Einkommensteuertarif in Österreich** und zur **Steuerberechnung in der Schweiz** sind in Anhang E und F zu finden. Anhang G enthält eine kurze **Beschreibung wichtiger Zinssätze**.

Das Ende von Beispielen ist durch das Symbol □ gekennzeichnet.

Bedanken möchte ich mich bei allen, die mir Hinweise und Verbesserungsvorschläge zu vorherigen Auflagen gegeben haben, insbesondere bei Herrn Prof. Dr. Kowitz für seine Hinweise zur dritten Auflage. Für weitere Anregungen und Hinweise bin ich dankbar.

Unter **www.europa-lehrmittel.de/56283** finden Sie im Internet neben den Excel-Dateien aktuelle Ergänzungen und – falls notwendig – Fehlerkorrekturen.

Groß-Zimmern, im Januar 2016 Andreas Pfeifer

Inhaltsübersicht

Anhang

Seid nicht geldgierig, und lasst euch genügen an dem, was da ist.
Denn der Herr hat gesagt: „Ich will dich nicht verlassen und nicht von dir weichen."

Die Bibel. Hebräer 13, 5 (Übersetzung nach Martin Luther)

„Wie oft soll ich es Ihnen eigentlich noch erklären", sagt der Mathematik-Professor in der Vorlesung, „es gibt keine größere und kleinere Hälfte. Eine Hälfte ist eben eine Hälfte.
– Aber ich sehe schon, die größere Hälfte von Ihnen begreift das nie!"

Eine Frau fragt ihren vom Arzt kommenden Mann:
„Was hat er gesagt?" „Zehn Euro."
„Nein, ich meine doch, was hast du gehabt? " „Acht Euro!"
„Nein! Was dir gefehlt hat, will ich wissen!" „Zwei Euro!"

Seit Abschaffung der 10-Euro-Praxisgebühr im Januar 2013
nur noch bei Zusatzleistungen vorkommend

Aus einem Brief eines Vaters an seinen Sohn, der studiert:
„Anbei die von dir gewünschten zehn Euro. Übrigens schreibt man zehn Euro mit einer Null und nicht mit drei Nullen."

Von jetzt an werde ich nur so viel ausgeben, wie ich einnehme, selbst wenn ich mir dafür Geld borgen muss.

Von Mark Twain, amerik. Schriftsteller, 1835 – 1910, überliefert

Ein Schotte kommt spät abends nach Hause und erzählt stolz seiner Frau:
„Heute habe ich mir das Geld für den Bus gespart. Ich bin hinter dem letzten Bus hergelaufen; habe ihn aber nicht mehr erreicht."
Seine Frau antwortete daraufhin kritisch: „Warum bist du nicht hinter einem Taxi hergelaufen, du Dummer? Dann hättest du noch viel mehr sparen können."

1 Was ist Finanzmathematik?

Bei einer Sparquote von ungefähr zehn Prozent des verfügbaren Einkommens ist ein enormes Geld- und Realvermögen angehäuft worden. Es gibt nach Angaben der Deutschen Bundesbank (www.bundesbank.de) über fünf Billionen Euro privates Geldvermögen in Deutschland: als Bargeld oder angelegt in Sparkonten, Aktien, Wertpapieren oder anderen Finanzprodukten. Dagegen stehen knapp zwei Billionen Euro an Verbindlichkeiten, sodass das Nettogeldvermögen aller privaten Haushalte in Deutschland bei über drei Billionen Euro liegt. Das Vermögen ist jedoch ungleich auf die Haushalte verteilt.

Der Markt für Finanzanlagen wurde in den letzten Jahrzehnten immer vielfältiger, woran auch Finanzkrisen nichts geändert haben. Umso wichtiger ist es, Finanzgeschäfte korrekt bewerten zu können. Dazu sind mathematische Berechnungen ungeheuer wichtig.

Die Finanzmathematik ist ein Gebiet der angewandten Mathematik und befasst sich mit der mathematischen Bewertung von Finanzprodukten wie beispielsweise der Bewertung von Krediten, festverzinslichen Anleihen oder Optionen. Mit Hilfe der Finanzmathematik können Eigenschaften dieser Finanzprodukte berechnet werden. Grundsätzlich lässt sich die Finanzmathematik in die **klassische Finanzmathematik** und in die **moderne (oder stochastische) Finanzmathematik** einteilen. Die klassische Finanzmathematik beinhaltet die Zins- und Zinseszinsrechnung, die Renten- und Tilgungsrechnung und das Äquivalenzprinzip. Mathematische Grundlagen sind dabei Folgen und Reihen. Die moderne (oder stochastische) Finanzmathematik, deren Basis die Wahrscheinlichkeitstheorie ist. umfasst die Portfoliotheorie, die Bewertung derivativer Finanzprodukte und die Risikoanalyse. Die stochastische Finanzmathematik wird in **diskrete Finanzmathematik** – dazu gehört beispielsweise das Binomialmodell zur Bewertung von Optionen – und **stetige Finanzmathematik** – dazu zählt unter anderem das Black-Scholes-Modell – unterteilt.

Im nächsten Abschnitt folgen drei Beispiele der klassischen Finanzmathematik. In späteren Kapiteln werden auch optimale Anlagekombinationen und Risikoberechnungen der stochastischen Finanzmathematik betrachtet.

1.1 Beispiele

Beispiel 1.1.1: Drei Anlagemöglichkeiten

Sie wollen 1.000 € für zwei Jahre anlegen. Sie erkundigen sich und finden dabei Angebote von drei Banken. Angebot A bietet 4% Zinsen im ersten Jahr und 4% im zweiten Jahr. Die Zinsen des ersten Jahres werden dabei im zweiten Jahr mitverzinst. Dies gilt auch für Angebot B, bei dem es im ersten Jahr 6% Zinsen und im darauf folgenden Jahr allerdings nur 2% gibt. Bei Angebot C erhalten Sie dagegen im ersten Jahr nur 2%, im zweiten dann allerdings 6%.

	Angebot		
	A	B	C
1. Jahr	4%	6%	2%
2. Jahr	4%	2%	6%

Welches der drei Angebote ist das beste Angebot? Oder sind vielleicht alle Angebote gleich gut? Schätzen Sie doch einfach einmal, ohne zu rechnen und ohne weiterzulesen. Welches Angebot würden Sie wählen?

Im Durchschnitt scheint jedes der drei Angebote 4% zu ergeben. Doch dies ist falsch. Um zu entscheiden, welches Angebot das Beste ist, muss das sogenannte Endkapital, das ist in diesem Beispiel das Kapital nach zwei Jahren, bestimmt werden.
Beim Angebot A ergibt sich: Nach einem Jahr haben Sie 1.000 € plus 4% Zinsen, also plus 40 €. Dies ergibt 1.040 €. Nach zwei Jahren sind es 1.040 € plus 41,60 € Zinsen, also insgesamt 1.081,60 €.

Beim Angebot B besitzen Sie nach einem Jahr 1.060 €, nämlich 1.000 € plus 6% Zinsen (= 60 €). Für das zweite Jahr erhalten Sie dann 2% Zinsen auf die 1.060 €, das sind 0,02 · 1.060 € = 21,20 € Zinsen, sodass Sie insgesamt 1.081,20 € besitzen.

Sie können leicht selbst nachrechnen, dass Angebot C auch genau 1.081,20 € liefert. Es überrascht zunächst, dass Angebot B und Angebot C nach zwei Jahren genau den gleichen Betrag ergeben. Wir werden später sehen, dass das Endkapital bei Zinseszinsen mit gleichen Zinssätzen immer gleich hoch ist, gleichgültig ob die hohen Zinssätze am Anfang oder am Ende gezahlt werden.

Zurück zum Beispiel. Insgesamt gilt:

	Angebot		
	A	B	C
Kapital zu Beginn	1.000,00 €	1.000,00 €	1.000,00 €
nach 1. Jahr	1.040,00 €	1.060,00 €	1.020,00 €
nach 2. Jahr	1.081,60 €	1.081,20 €	1.081,20 €

Der Ertrag ist also bei Angebot A am höchsten. Auch ohne Finanzmathematik können Sie sagen: Angebot A bringt durchschnittlich 4% Zins – oder wie gesagt wird: Die Rendite bei Angebot A ist 4%.

Wie können Sie nun die durchschnittliche Verzinsung für die anderen zwei Angebote ausrechnen? Dies wird später behandelt. Ohne Finanzmathematik wissen Sie nur, dass die durchschnittliche Verzinsung wohl kleiner als 4% sein muss, da 1.081,20 € weniger als 1.081,60 € ist. Die Lösung dieser Aufgabe wird auf Seite 45f erklärt und im Beispiel 2.3.4 berechnet. Im dann folgenden Beispiel 2.3.5 werden die Berechnungen auch für Anlagen mit unterschiedlichen Zinssätzen bei mehr als zwei Jahren Laufzeit durchgeführt. □

Ein Student schickt eine E-Mail an seine Eltern: „Wo bleibt das Geld?“ –
Die kurze Antwort: „Hier!“

Beispiel 1.1.2: Darlehen

Sie wollen eine Eigentumswohnung kaufen und nehmen dazu ein Darlehen von 190.000 € bei 4% Zinsen in Anspruch. Ein Darlehen ist eine Ausleihung eines bestimmten Betrages auf eine bestimmte Zeit, wobei die Rückzahlung entweder in einem Betrag bei Fälligkeit oder in festgelegten Raten erfolgt. Nach dem Durcharbeiten dieses Buches können Sie ausrechnen, wann Sie das Darlehen zurückgezahlt haben, wenn Sie beispielsweise 950 € pro Monat zurückzahlen. Jede Rückzahlung besteht aus der Tilgung und den Zinsen. Unter Tilgung (im Schweizerischen auch Amortisation genannt) ist derjenige Teil der Rückzahlung zu verstehen, der die Kreditschuld reduziert.

Zur Information sei nur angegeben, dass 27 Jahre und 7 Monate zur Rückzahlung notwendig sind, d.h., es dauert 27 Jahre und 7 Monate, bis die Schuld vollständig getilgt ist. Um diese Zeit auszurechnen, sind allerdings noch zusätzliche Angaben notwendig. Zum Beispiel muss aufgeführt werden, wann die sogenannte Zins- und Tilgungsverrechnung erfolgt. Die genaue Berechnung wird im Kapitel 6.5 hergeleitet und auf Seite 187 durchgeführt.

□

Beispiel 1.1.3: Rente

Sie haben zu Beginn des Jahres 10.000 € auf ihrem Sparkonto. Das Sparkonto wird mit 4% verzinst. Am Ende jedes Jahres heben Sie 1.000 € ab. In der Finanzmathematik werden in gleicher Höhe periodisch erfolgende Zahlungen mit „Rente“ bezeichnet.
Wie lange können Sie nun 1.000 € abheben, bis das ganze Kapital von 10.000 € aufgebraucht ist? Ohne Zinsen auf dem Sparkonto reicht die Rente genau für 10 Jahre (10 · 1.000 € = 10.000 €). Reicht bei 4% Zinsen die Rente für 11 oder 12 Jahre? Vielleicht noch länger? In die Abb. 1.1.1a sollten Sie einmal in Abhängigkeit des Zinssatzes Ihre Vermutung eintragen, für wie viele Jahre die Rentenzahlungen reichen.

Die korrekten Ergebnisse sind in Abb. 1.1.1b zu finden. Bei einem Zinssatz von 4% können Sie 13 Jahre lang 1.000 € abheben. Ist der Zinssatz größer oder gleich 10%, wird das Kapital nie aufgebraucht.

Zinssatz	10.000 € reichen bei jährlicher Entnahme von 1.000 € insgesamt
0%	10 Jahre
2%	
4%	
6%	
8%	
10%	

Abb. 1.1.1a: Werte für Beispiel 1.1.3

Zinsen auf dem Sparkonto (Zinssatz)	10.000 € reichen bei jährlicher Entnahme von 1.000 € insgesamt für
0%	10,0 Jahre
2%	11,3 Jahre
4%	13,0 Jahre
6%	15,7 Jahre
8%	20,9 Jahre
10%	unbegrenzt

Abb. 1.1.1b: Werte für Beispiel 1.1.3; Berechnungsweise siehe Beispiel 4.2.3
Entnahme erfolgt am Ende jeden Jahres

Wie erhalten Sie diese Ergebnisse? Die Vorgehensweise in der Finanzmathematik zur Lösung von Problemen ist die Folgende: Zunächst werden alle Zahlungen mit Hilfe eines Zahlenstrahls dargestellt bzw. alle Zahlungen in einer Tabelle zusammengestellt.

```
Einzahlungen:  10.000
Auszahlungen:            1.000    1.000    1.000           1.000
                |--------|--------|--------|-----...-----|------------>
                0        1        2        3             n          Zeit
```

Abb.1.1.2: Zahlenstrahl mit allen Zahlungen

Dann wird mit einem finanzmathematischen Prinzip (im Beispiel mit dem Äquivalenzprinzip) eine Gleichung aufgestellt. Für unser Beispiel ist dies bei 4% Zinsen die Gleichung:

$$10.000\text{ €} = 1.000\text{ €} \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-n}}{0{,}04}, \qquad (*)$$

wobei n die (unbekannte) Anzahl der Jahre ist, wie lange die Rente von 1.000 € gezahlt wird. Die genaue Herleitung der Formel auf der rechten Seite von (*) erfolgt im Abschnitt 4.2 über die Rentenrechnung. Anschließend wird die Gleichung (*) vereinfacht:

$$(1{,}04)^{-n} = 1 - \frac{10.000}{1.000} \cdot 0{,}04\,.$$

Diese Gleichung muss nun nach der Unbekannten n aufgelöst werden. Dazu sind Kenntnisse der Potenz- und Logarithmenrechnung notwendig. Logarithmieren Sie beide Seiten, ergibt sich

$$\ln(1{,}04^{-n}) = \ln(0{,}6). \qquad (**)$$

„ln“ ist die Abkürzung für den natürlichen Logarithmus. Er wird in diesem Buch beim Logarithmieren standardmäßig verwendet. Sie können auch einen anderen Logarithmus anwenden, z.B. den Zehnerlogarithmus. **Wichtig ist, dass Sie auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Logarithmusfunktion verwenden.**

Der Exponent – n auf der linken Seite in Gleichung (**) kann vor den Logarithmus gezogen werden. Dies besagt die Rechenregel: $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$. Also

$$-n \cdot \ln(1{,}04) = \ln(0{,}6) \quad \text{oder} \quad n = -\frac{\ln(0{,}6)}{\ln(1{,}04)}.$$

Mit einem Taschenrechner erhalten Sie dann n = 13,024384, d. h., 13 volle Jahre können jeweils 1.000 € ausgezahlt werden. Anschließend bleibt noch ein kleiner Rest.

□

Wie Sie insbesondere im letzten Beispiel gesehen haben, wird zur Lösung eines finanzmathematischen Problems ein mathematisches Modell gebildet, d.h., es werden Einflussgrößen und Zusammenhänge ermittelt und anschließend Gleichungen bzw. Ungleichungen aufgestellt. Zur Lösung gibt es dann verschiedene Möglichkeiten.

Früher wurden dazu **Tabellenwerke** oder **Nomogramme** verwendet. Nomos (griech.) bedeutet Gesetz und gramma (griech.) Zeichnung. Mit Hilfe graphischer Darstellungen von Kurvenverläufen, sogenannten Nomogrammen, können die Lösungen von Gleichungen abgelesen werden. Diese Vorgehensweise ist zwar einfach, aber die abgelesenen Ergebnisse sind ungenau.

In diesem Buch gibt es im Anhang nur eine Tabelle der Normalverteilung. Ansonsten werden zur Berechnung Taschenrechner und Computer verwendet:

a) Die Lösung können Sie mit einem **üblichen Taschenrechner** erhalten, wenn er entsprechende Funktionstasten für Potenzen und Logarithmen besitzt, die bei finanzmathematischen Aufgaben benötigt werden. Für komplexere Fragestellungen gibt es **spezielle Taschenrechner für die Finanzmathematik**. Bei diesen Taschenrechnern sind viele Formeln schon programmiert. Beispielsweise kann die Rückzahlungsdauer von Darlehen nach Eingabe der Darlehensdaten mit einem Tastendruck ermittelt werden.

b) Es gibt zahlreiche **professionelle Computer-Software** speziell **zur Finanzmathematik**, aber auch allgemein zum Handel mit Finanzprodukten. Sie werden für den Banken-, Versicherungs- und Immobilienbereich erstellt. Mit ihnen können viele finanzmathematische Fragestellungen menü-orientiert auf einfache Weise gelöst werden. Finanzmathematische Kenntnisse sind dabei zwar nicht notwendig, aber sehr nützlich, um die Daten korrekt eingeben und die Ergebnisse sinnvoll interpretieren zu können.

c) **Tabellenkalkulationsprogramme**, wie beispielsweise LibreOffice Calc oder Microsoft Excel, können verwendet werden, um selbst Programme zur Finanzmathematik auf einfache Weise zu erstellen. In fast jeder Büro-Software sind Tabellenkalkulationsprogramme enthalten.

d) Sie können **eigene Programme in Programmiersprachen** wie beispielsweise C/C++, Java oder R schreiben.

1.2 Anlagemöglichkeiten

Bei Geldanlagen sollten fünf Punkte berücksichtigt. Es empfiehlt sich, Vermögen so sicher, so rentabel, so liquide, so bequem und so nachhaltig wie möglich anlegen:

Sicherheit bedeutet, dass Sie angelegtes Geld oder Kapital auch wieder bekommen. Die Sicherheit hängt von vielen Größen wie beispielsweise von der Bonität[1] des Schuldners, von Währungsrisiken oder von Kursrisiken ab.
Die **Rentabilität** ergibt sich aus dem Ertrag dieser Vermögensanlage. Der Ertrag kann aus Zins- oder Dividendenzahlungen oder aus Wertsteigerungen bestehen.
Unter **Liquidität** oder **Verfügbarkeit** wird verstanden, wie schnell ein angelegter Betrag wieder in ein verfügbares Bankguthaben oder in Bargeld umgewandelt werden kann.
Die **Bequemlichkeit** (engl.: convenience). Die beste Anlage ist nicht geeignet, wenn sie beispielsweise nur mit großem Zeitaufwand zu realisieren ist und Sie diesen Zeitaufwand scheuen.
Die **Nachhaltigkeit/Ethik**. Damit sind ökologische, ethische und soziale Aspekte gemeint. Vielleicht scheiden als Kapitalanlage für Sie Aktien von Rüstungs- oder Zigarettenfirmen aus. Oder Sie möchten nur in erneuerbare Energien investieren.

Jeder Anleger wertet die fünf Punkte unterschiedlich. Grundsätzlich gilt für alle Formen der Vermögensanlage: Je höher die Gewinnaussichten, desto höher ist auch das Risiko. Wer viel gewinnen möchte, kann auch viel verlieren. Eine Geldanlage, bei der das Geld schnell verfügbar, absolut sicher und auch noch sehr hoch verzinst wird, gibt es nicht. Die obigen Kriterien schließen sich bis zu einem gewissen Grad gegenseitig aus.

Es gibt viele Anlagemöglichkeiten; auf einige soll kurz eingegangen werden.

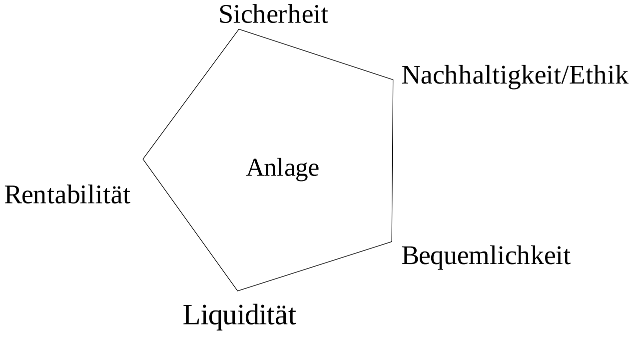

Abb. 1.2.1: Die 5 Kriterien der Vermögensanlage[2]

[1] Bonität ist der Ruf bzw. das Image von Personen und Unternehmen; die Bonität dient als Maßstab für die Zahlungsfähigkeit bzw. die Zahlungswilligkeit, vgl. auch Abschnitt 7.4.

[2] Oft werden in der Literatur die Aspekte Bequemlichkeit und Nachhaltigkeit/Ethik nicht aufgeführt. Dann wird vom sogenannten „magischen Dreieck“ gesprochen, da nur drei Kriterien berücksichtigt werden.

Sichteinlagen sind Einlagen bei Kreditinstituten, über die bei „Sicht" unbegrenzt ohne Kündigungsfristen[1] verfügt werden kann. Dazu zählen **Girokonten** und **Tagesgeldkonten**. Beim Girokonto können Sie in der Regel durch Barabhebungen, Schecks oder Überweisungen verfügen. Beim Tagesgeld werden Beträge auf ein extra eingerichtetes Konto gezahlt, mit dem aber kein Zahlungsverkehr (Bezahlung von Rechnungen usw.) durchgeführt werden darf. Dafür wird das Tagesgeldkonto meist höher als das Girokonto verzinst.

Termineinlagen (z. B. Festgeldanlage für drei Monate) sind Einlagen, die für einen bestimmten Zeitraum angelegt werden oder mit einer bestimmten Frist gekündigt werden können. Sie werden mit einem festen Zinssatz verzinst, der meist höher als bei Sichteinlagen ist.

Spareinlagen sind Sparguthaben bei einem Kreditinstitut, die nicht dem Zahlungsverkehr dienen und die durch Ausfertigung einer Urkunde (Kontoauszug, Sparbuch) kennzeichnet sind. Sie haben eine vereinbarte Kündigungsfrist (meist zwischen drei Monaten und vier Jahren). Kündigt der Sparer, kann er erst nach Ablauf dieser Frist sein Geld abheben. Ansonsten muss er Strafzinsen (Vorschusszinsen) zahlen. Er erhält bei längeren Kündigungsfristen höhere Zinsen. **Sparbriefe** haben eine feste Laufzeit, meist zwischen zwei und zehn Jahren. Sie erhalten in regelmäßigem Abstand von einem oder einem halben Jahr Zinsen, wobei die Zinszahlungen bei manchen Formen mit der Zeit steigen. Bei der Form mit wachsendem Zins können Sie als Anleger auch vorzeitig kündigen. Sparbriefe werden nicht an der Börse gehandelt.

Festverzinsliche Wertpapiere (engl.: fixed-interest bonds) verbriefen eine Geldschuld, die mit einem festen Satz verzinst wird. So fließen dem Inhaber regelmäßig Zinseinnahmen (quasi eine Rente) zu; deshalb heißen diese Wertpapiere auch **Renten(papiere)**. Es gibt auch **variabel verzinsliche** Wertpapiere, sogenannte Floating-Rate-Notes (FRN), kurz Floater. Bei diesen Wertpapieren ist die Höhe der Verzinsung nicht zahlenmäßig festgelegt, sondern kann sich ändern, denn sie wird zu bestimmten Zeitpunkten aus einem Referenzzins berechnet. Verzinsliche Wertpapiere werden auch als **Anleihen** bezeichnet.

Aktien (engl.: shares. stocks) verbriefen eine Beteiligung an der Gesellschaft und beinhalten eine Reihe von Rechten: Teilnahme an der Hauptversammlung, Dividendenzahlung, Bezugsrecht auf neue Aktien bei Kapitalerhöhungen. Der Ertrag bzw. Wertzuwachs ist nicht im Voraus festgelegt, er hängt vom Erfolg der Aktiengesellschaft ab.

Genussscheine sind besondere Wertpapiere zwischen Aktien und Renten. Sie verbriefen bestimmte Vermögensrechte. Die Art und der Umfang der einzelnen Rechte sind in den Genussscheinbedingungen festgelegt, die bei den verschiedenen Genussscheinen sehr unterschiedlich sein können. Wichtige Ausstattungsmerkmale sind dabei die Regelungen der Ausschüttungen, der Risikobeteiligung und der Laufzeit. Zwitter zwischen Aktien und Anleihen sind auch die **Aktienanleihen** oder **Indexanleihen** (auch Reverse-Convertible-Bonds genannt). Das sind Anleihen, die in der Regel höhere Zinsen als „normale" Anleihen bieten. Die Rückzahlung erfolgt jedoch in Abhängigkeit eines oder mehrerer Aktienkurse (Aktienanleihen) bzw. eines Aktienindexes (Indexanleihen).

Wandelanleihen (engl.: convertible bonds) beinhalten eine (niedrige) feste Verzinsung und das Recht, die Anleihen in einem bestimmten Verhältnis in Aktien zu wandeln.

[1] In der Praxis werden Anlagen mit einer Laufzeit unter 30 Tagen noch zu Sichteinlagen gezählt.

Investmentfonds (engl.: investment funds, mutual funds) sammeln das Kapital vieler Anleger, um es unter Beachtung des Fondszweckes und der Anlagerichtlinien in verschiedene Vermögenswerte (z. B. in Aktien, Renten, Sachwerte) anzulegen. Investmentfonds eignen sich nicht nur für Anleger mit kleinen Beträgen, die sonst bestimmte Anlagen (z. B. in Immobilien) nicht tätigen könnten, sondern auch für Anleger, die keine Zeit haben, sich um einzelne Anlageentscheidungen zu kümmern.

Derivate sind Finanzprodukte, deren Bewertungen sich überwiegend von den Preisen bzw. Preiserwartungen zugrunde liegender Basisobjekte (z. B. Aktien, Anleihen, Zinssätzen, Devisen) ableiten. Mit Derivaten können mit geringen Mitteleinsätzen große Anlagesummen bewegt werden. Dadurch kann eine höhere Rendite in Bezug auf das eingesetzte Kapital erzielt werden. Allerdings führt dieser Hebel-Effekt im ungünstigen Fall zu hohen Verlusten. Der höheren Rendite steht also auch ein höheres Risiko gegenüber. Zu den Derivaten zählen insbesondere Optionen, Futures, Swaps, Caps, Floors, Collars.

Unter **Asset-Allokation** wird die Strukturierung des Vermögens verstanden, d. h. die Gewichtung der einzelnen Anlageklassen (Aktien, Anleihen, Immobilien usw.). Dazu ist zunächst zu ermitteln, wie die einzelnen Produkte in den Anlageklassen zu bewerten sind.

1.3 Mathematische Grundlagen

Zum Lösen von Problemen der klassischen Finanzmathematik benötigen Sie – wie dies schon im Beispiel 1.1.3 dargestellt wurde – Kenntnisse im Rechnen mit Potenzen, mit Wurzeln und mit Logarithmen. Die notwendigen Rechenregeln finden Sie in allen guten mathematischen Formelsammlungen. Zum Üben ist auch Pfeifer/Schuchmann (2007) nützlich, wo Sie neben Formeln auch viele Aufgaben mit Lösungen finden.

Formeln, die bei Beweisen oft auftauchen, sind in den folgenden zwei Sätzen angegeben.

Satz 1.3.1 (Summenberechnungen): Es gilt[1]

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \ldots\ , \qquad \text{(I)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \text{ wobei } q \neq 1, \qquad \text{(II)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}, \text{ wobei } q \neq 1. \qquad \text{(III)}$$

1 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist eine abkürzende Schreibweise für die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Unterhalb des Summenzeichens Σ wird der Index des ersten Summanden, oberhalb des Summenzeichens der des letzten Summanden angegeben. Der Index (hier k) wird immer in Einer-Schritten „hochgezählt".

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot q^k = \frac{q \cdot (1 - q^n - nq^n + nq^{n+1})}{(q-1)^2} = \frac{q - q^{n+1}}{(q-1)^2} + \frac{nq^{n+1}}{q-1}, \text{ falls } q \neq 1. \qquad \text{(IV)}$$

Beweis:

(I) Gesucht ist die Summe s der ersten n natürlichen Zahlen, d.h.
$s = 1 + 2 + 3 + ... + n-2 + n-1 + n$. Oder in umgekehrter Reihenfolge
$s = n + n-1 + n-2 + ... + 3 + 2 + 1$. Die Addition beider Gleichungen ergibt
$2s = n+1 + n+1 + n+1 + ... + n+1 + n+1 + n+1$.
Da auf der rechten Seite dieser Gleichung n Summanden stehen, gilt
$2s = n\,(n+1)$ bzw. $s = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

(II) Es sei $s = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$. Multiplizieren Sie diese Gleichung mit q, erhalten Sie $qs = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1}$. Subtrahieren Sie die erste von der zweiten Gleichung, folgt: $qs - s = q^{n+1} - 1$. Also $(q-1)s = q^{n+1} - 1$. Aufgelöst nach s ergibt diese Gleichung die Behauptung (II).

(III) Die Aussage folgt aus $\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - 1 = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$, wobei $q \neq 1$.

(IV) Nach (II) gilt: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, wobei $q \neq 1$. Fassen Sie die linke und die rechte Seite dieser Gleichung als Funktion von q auf und bilden auf beiden Seiten jeweils die Ableitung, erhalten Sie mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = \frac{(n+1)q^n(q-1) - (q^{n+1}-1)}{(q-1)^2}, \text{ wobei } q \neq 1.$$

Umgeformt ergibt dies $\sum_{k=0}^{n} (k \cdot q \cdot q^{k-1}) = q \cdot \frac{(nq^n q - nq^n + q^n q - q^n) - q^{n+1} + 1}{(q-1)^2}$.

Daraus folgen die Behauptungen (IV) durch einfache Umformungen, da der erste Summand der linken Seite null ist.

Beispiel 1.3.1:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5.050.$$ □

Beispiel 1.3.2:

Oma Sparsam schenkt ihrem Enkel Florian jede Woche einen Geldbetrag. In der ersten Woche sind es 5 Cent, in der zweiten Woche 10 Cent, in der dritten dann 20 Cent. Jede Woche verdoppelt Oma Sparsam den Betrag.
Nach welcher Woche hat Enkel Florian 102,35 € zusammen?

Da 102,35 € 10.235 Cent sind, heißt das Problem mathematisch ausgedrückt: Wie viele Glieder der Folge 5, 10, 20, 40, 80, ... ergeben die Summe 10.235?
Mit Satz 1.3.1(II) folgt:

$$5 + 10 + 20 + 40 + \ldots = 5 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) = 5 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1})$$

$$= 5 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 10.235 \Rightarrow 2^n = \frac{10.235}{5} + 1 = 2.048 \Rightarrow \ln(2^n) = \ln(2.048). \text{ Also}$$

$n \ln(2) = \ln(2.048) \Rightarrow n = 11.$ Nach elf Wochen hat Enkel Florian 102,35 € zusammen.

In der Finanzmathematik spielen zwei Arten von Zahlenfolgen eine große Rolle:

Def. 1.3.1:
Eine Zahlenfolge heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich groß ist.
Eine Zahlenfolge heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich groß ist.

Die Summanden 1, 2, 3, ... aus dem Beispiel 1.3.1 bilden eine arithmetische Folge mit Differenz 1. Die Summanden aus Satz 1.3.1(II) bzw. aus Beispiel 1.3.2 sind geometrische Folgen mit den Quotienten q bzw. 2.

Beim **Runden** von Dezimalbrüchen wird abgerundet, wenn die erste wegzulassende Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 ist. Ist die erste wegzulassende Ziffer eine 5, 6 7, 8 oder 9, wird aufgerundet.
Beim **Abrunden** auf n Dezimalstellen werden alle folgenden Dezimalen weggelassen.
Beim **Aufrunden** auf n Dezimalen werden die folgenden Dezimalen weggelassen und die verbleibende Zahl um eine Einheit der n-ten Dezimalen erhöht.

Beispiel 1.3.3:
Soll jeweils auf drei Stellen hinter dem Komma gerundet werden, ergibt sich aus 2,45650 gerundet 2,457. 2,49999 wird gerundet auf 2,500. 3,141592... wird gerundet auf 3,142.

Die obigen Rundungsregeln waren und sind auch bei der Umrechnung von Euro in Deutsche Mark oder Österreichische Schilling und umgekehrt zu verwenden. Dabei ist auf zwei Dezimalstellen zu runden: Beim festgelegten Umrechnungskurs von 1,95583 DM pro Euro [bzw. 13,7603 Österreichische Schilling pro Euro] ergeben 2 Euro genau
2 EUR · 1,95583 DM/EUR = 3,91166 DM. Gerundet sind dies 3,91 DM.
[bzw. 2 EUR · 13,7603 ATS/EUR = 27,5206 ATS. Gerundet sind dies 27,52 ATS.]

1 DM sind genau $\frac{1}{1{,}95583}$ EUR = 0,51129... EUR; gerundet auf zwei Dezimalstellen ergibt dies 0,51 EUR. □

In der Finanzmathematik werden auch Methoden zur Lösung von Gleichungen benötigt. Diese Verfahren werden in Abschnitt 3.2 behandelt.