

Theoretische Physik

Band 7

---

Walter Greiner  
Joachim Reinhardt

**Quanten-  
elektro-  
dynamik**



Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik  
Band 7  
Walter Greiner/Joachim Reinhardt  
Quantenelektrodynamik

Walter Greiner

## **Theoretische Physik**

- Band 1: Mechanik, Teil 1
- Band 2: Mechanik, Teil 2
- Band 3: Elektrodynamik
- Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung
- Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien
- Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen
- Band 7: Quantenelektrodynamik
- Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung
- Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik
- Band 10: Quantenchromodynamik

### Ergänzungsbände

- Band 2A: Hydrodynamik
- Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie
- Band 4A: Quantentheorie, Spezielle Kapitel
- Band 7A: Feldquantisierung

### In Vorbereitung

- Physik der Elementarteilchen: Theoretische Grundlagen
- Modelle der Elementarteilchen
- Kernmodelle
- Quantenstatistik
- Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation

Theoretische Physik  
Band 7

---

Walter Greiner  
Joachim Reinhardt

# Quanten- elektro- dynamik

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen  
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1995



Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. Walter Greiner ist Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main.

Dr. phil. nat. Jochem Reinhardt ist Akademischer Oberarzt am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main.

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

**Theoretische Physik** : mit Lehr- und Übungsbuch : / Thor  
Frankfurt am Main : Deutsch.

Bd. 1. Greiner, Walter: Quantenelektrodynamik. - 2., überarb. und erw. Aufl. - 1995

**Greiner, Walter:**

Quantenelektrodynamik / mit zahlreichen Beispielen und  
Aufgaben mit ausführlichen Lösungen / Walter Greiner ;  
Jochem Reinhardt. - 2., überarb. und erw. Aufl. - Thor  
Frankfurt am Main : Deutsch, 1995

(Theoretische Physik - Bd. 1)  
ISBN 3-8171-1426-8

WK Reinhardt-Joachim

ISBN 3-8171-1426-8

2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1995

© 1995 Verlag Harri Deutsch, Thor und Frankfurt am Main

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung  
des Buches - oder von Teilen daraus - sind vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in

irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch wenn für  
Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer  
Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den  
Strafzusammungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Her-  
ausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen so-  
wie für etwaige Druckfehler keine Haftung.

Druck: Pöschel-Verlagsanstalt, Pöschel

## Vorwort zur 1. Auflage

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Dies alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlic einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mitteilen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen, Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Daran werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik, die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier die Quantenelektrodynamik vor. Sie ist so gehalten wie alle anderen Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir den Stoff so interessant wie möglich darzustellen. Die Quantenelektrodynamik ist ein so umfangreiches Gebiet, daß wir uns im Wesentlichen auf die „archaische Quantenelektrodynamik“, also die direkt auf der Lochertheorie basierende Formulierung von Stückelberg und Feynman beschränken. Die quantenfeldtheoretische Formulierung, auf dem kanonischen Formalismus beruhend, ist einer Spezialvorlesung vorbehalten. Ein Student der Physik muß heute beide Zugänge zur QED, der beiden Feldtheorien die wir kennen, beherrschen. Der

hier vorgezeichnete Einstieg in dieses interessante und sich ständig noch erweiternde Gebiet ist geeignet, zunächst einen Überblick über die Vielfaltigkeit der Prozesse, Probleme und Methoden in recht anschaulicher Weise zu geben.

Nach Einführung der Propagatortheorie, der Definition der  $S$ -Matrix und der ausführlichen Erläuterung der Anwendung Green'scher Funktionen in typischen Fällen der klassischen Physik werden die relativistischen Propagatoren für Elektronen und Positronen (Stückelberg-Feynman-Propagator) vorgestellt.

In 20 Beispielen und im Detail ausgearbeiteten Aufgaben des 3. Kapitels folgen die Anwendungen des relativistischen Propagatorformalismus. Sie reichen von der einfachen Coulombstreuung von Elektronen, über die Kosenblathformel, die Bremsstrahlung, die Bethe-Heitler-Formel, die Klein-Nishina-Formel (Comptonstreuung) bis hin zur Paarerzeugung und zur Streuung polarisierter Diprotonen.

Schließlich werden im 4. Kapitel die schon früher heuristisch abgeleiteten Feynmanregeln zusammengefaßt. Dasurry-Theorem und eine Erläuterung der häufig benutzten Maßsysteme sind hier ebenfalls zu finden.

Den Renormierungsproblemen begegnen wir bei der Berechnung der Vakuumpolarisation, der Selbstenergie, der Vertexkorrektur und der Diskussion der Lambdift (5. Kapitel). Hier wird Methodisches an Hand physikalischer Fragestellungen erläutert.

Auf die Bethe-Salpeter-Gleichung, also eine relativistische Gleichung für ein Zweiteilchensystem, stoßen wir im 6. Kapitel.

Schließlich wird die in den letzten 15 Jahren entwickelte Quantenelektrodynamik der starken, überkritischen Felder im vorletzten (7.) Kapitel vorgestellt. Nichtperturbative Methoden stehen hier im Vordergrund. Das fundamentale Problem des „Zerfalls des Vakuums“ wird erläutert und sowohl mathematisch als auch in seinen physikalischen Implikationen diskutiert.

Das letzte Kapitel ist der Quantentheorie der Bosonenfelder gewidmet. Viele der für Spinorpartikeln entwickelten Methoden können (mit Änderungen) direkt übertragen werden. Es macht Spaß zu sehen, wie selbstverständlich das Erlernte in vielfältiger Weise Anwendung findet.

Wir bedanken uns bei den Damen Ingeborg Heinz, Ruth Lasarzig, Lenke Schubert und Brigitte Utschig für ihre große Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts und der Zeichnungen. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer notwendigen Änderungen war bewundernswert.



Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese Vorlesung über Quantenelektrodynamik viele Freunde findet.

Frankfurt am Main, im März 1984.

Walter Greiner

Jochim Reintardt

## Vorwort zur 2. Auflage

Anlaßlich der nunmehr notwendig gewordenen zweiten Auflage des Lehrbuchs „Quantenelektrodynamik“ sowie seiner Übersetzung ins Englische haben wir die Gelegenheit genutzt, den Text zwar nicht in seinem Grundkonzept jedoch in vielen Einzelheiten gründlich zu überarbeiten. Zunächst wurde eine große Anzahl von Druckfehlern korrigiert und an vielen Stellen wurden zusätzliche erklärende Bemerkungen eingefügt. Insbesondere das dritte Kapitel mit der Entwicklung der quantenelektrodynamischen Störungstheorie und der Berechnung zahlreicher Elementarprozesse haben wir umstrukturiert. Es wurden viele neue Figuren zur Illustration der Ergebnisse und zum Vergleich mit Experimenten eingefügt. Gänzlich neu hinzugekommen sind im dritten Kapitel der Abschnitt 3.4 (Elektron-Positron-Streuung), Aufgabe 3.8 (Møller- und Bhabha-Streuung), die Aufgaben 3.14 und 3.15 zur Paarvernichtung und Paarerzeugung durch Photonen sowie eine Einführung in die Methode der äquivalenten Photonen (Beisp. 3.18). In Kapitel 5 wurde die Behandlung des Uehlingpotentials (Aufg. 5.3) wesentlich erweitert. Ebenso enthält das fünfte Kapitel neue Informationen zum anomalen magnetischen Moment von Elektron und Muon und zur Energieverschiebung atomarer Niveaus. Neu hinzugekommen ist Aufg. 5.2 zur Polarisationsfunktion des Photons. Schließlich wurden noch Beisp. 6.5 (Nichtrelativistische Reduktion der Bethe-Salpeter-Gleichung) und Aufg. 7.6 (Effektive Lagrangefunktion des elektromagnetischen Felds) neu aufgenommen. Der Text wurde um eine Sammlung kurzer biographischer Notizen und eine Zusammenstellung von Literaturhinweisen ergänzt.

Wir hoffen, daß auch der überarbeitete Band immer Vorlesungen zur Quantenelektrodynamik viele Freunde finden wird und möchten ergänzend noch auf den mittlerweile erschienenen Band 7A (Feldquantisierung) dieser Reihe hingewiesen. Dort



wird die hier heuristisch eingeführte Theorie durch eine feldtheoretische Herleitung im Rahmen der „zweiten Quantisierung“ systematisch begründet.

Wir möchten uns bei vielen Kollegen für nützliche Hinweise zur Überarbeitung des Buchs bedanken. Besonderen Dank verdient Herr M. Vokosić, der die Fertigstellung des Manuskripts betreute. Den Herren Ch. Best, A. Bischoff, B. Flansperger, H. van Geel, H. Graf, K.H. Kang, J. Kneipka, K.-J. Lutz, M. Meyer-Herrmann, Y. Pitsin, M. Rosenstock, J. Schaffner, St. Schneider danken wir für ihre Hilfe beim Schreiben des L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Manuskripts und Frau A. Steidl für die Erstellung zahlreicher Figuren.

Frankfurt am Main, im Juli 1994

Walter Greiner

Jochim Remhardt

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Propagator-Theorie</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung	1
1.2 Der nichtrelativistische Propagator	2
1.3 Greenfunktion und Propagator	4
1.4 Integralgleichung für $\psi$	8
1.5 Anwendung auf Streuprobleme	16
1.6 Unitarität der $S$ -Matrix	27
1.7 Symmetrieeigenschaften der $S$ -Matrix	28
1.8 Die Greenfunktion in Impulsdarstellung und ihre Eigenschaften	32
1.9 Greenfunktion für Teilchen mit Wechselwirkung	39
<b>2 Die Propagatoren für Elektronen und Positronen</b>	<b>51</b>
2.1 Der freie Propagator	51
2.2 Die vollständige Greenfunktion und die $S$ -Matrix	66

<b>3. Quantenelektrodynamische Prozesse</b>	<b>99</b>
3.1 Die Coulombstreuung von Elektronen	99
3.2 Die Streuung eines Elektrons an einem freien Proton: Rückstoßeffekte	125
3.3 Die Streuung identischer Fermionen	170
3.4 Elektron-Positron-Streuung: Bhabha-Streuung und Myon-Paarerzeugung	179
3.5 Die Streuung polarisierter Dirac-Teilchen	194
3.6 Die Bremsstrahlung	204
3.7 Compton-Streuung – Die Klein-Nishina-Formel	230
3.8 Die Zerstrahlung von Teilchen und Antiteilchen	248
<b>4. Resümee: Die Feynman-Regeln der QED</b>	<b>291</b>
4.1 Die Feynman-Regeln der QED im Impulsraum	292
4.2 Der Photonenpropagator in verschiedenen Eichungen	299
<b>5. Die Streumatrix in höheren Ordnungen</b>	<b>305</b>
5.1 Elektron-Positron-Streuung in vierter Ordnung	305
5.2 Die Vakuumpolarisation	310
5.3 Die Selbstenergie des Elektrons	349
5.4 Die Vertexkorrektur	357
<b>6. Zwei-Teilchen-Systeme</b>	<b>389</b>
6.1 Die Bethe-Salpeter-Gleichung	389
<b>7. Quantenelektrodynamik starker Felder</b>	<b>429</b>
7.1 Starke Felder in Atomen	434
7.2 Starke Felder in Schwerionenstößen	465

---

<b>8 Die Quantenelektrodynamik spinloser Bosonen</b>	<b>499</b>
8.1 Die Klein-Gordon-Gleichung	500
8.2 Der Feynman-Propagator für skalare Teilchen	502
8.3 Die Streuung von Spin-0-Bosonen	504
8.4 Die Feynman-Regeln der skalaren Elektrodynamik	512
<b>9 Anhang</b>	<b>521</b>
9.1 Biographische Notizen	521
9.2 Weiterführende Literatur	528



# Aufgaben und Beispiele

Aufgabe:	1.1	Eigenschaften von $G$	0
Aufgabe:	1.2	Relation zwischen $G^+$ und $G^-$	21
Beispiel:	1.3	Die freie Greenfunktion und ihre Eigenschaften	25
Aufgabe:	1.4	Integraldarstellung der Sprungfunktion	38
Beispiel:	1.5	Die Greenfunktion für die Diffusion	41
Beispiel:	1.6	Das Kirchhoffsche Integral	44
Aufgabe:	2.1	Zerlegung des Feynman-Propagators nach ebenen Wellen	65
Aufgabe:	2.2	Feynman-Propagator für ein Fermi-Gas	73
Aufgabe:	2.3	Nichtrelativistischer Grenzfall des Feynman-Propagators	82
Aufgabe:	2.4	Zeitentwicklung von Dirac-Wellenfunktionen	84
Aufgabe:	2.5	Der Propagator $S_F(x)$ explizit	88
Aufgabe:	3.1	Ein hilfreiches Integral	112
Aufgabe:	3.2	Lorentz-Transformation ebener Wellen	114
Aufgabe:	3.3	Spuren und Identitäten mit $\gamma$ -Matrizen	117
Beispiel:	3.4	Die Coulombstreuung von Positronen	121
Aufgabe:	3.5	Die Rosenbluth-Formel	147
Beispiel:	3.6	Die Elektron-Proton-Streuung in höherer Ordnung	157
Aufgabe:	3.7	Statischer Grenzfall für den Austausch zweier Photonen	167
Aufgabe:	3.8	Mandelstam-Variablen für die Møller- und Bhabha-Streuung	187
Aufgabe:	3.9	Der Polarisationsgrad	200
Aufgabe:	3.10	Statischer Grenzfall der Bremsstrahlung	221
Beispiel:	3.11	Die Bethe-Heitler-Formel	224
Aufgabe:	3.12	Beziehung zwischen Energie und Impuls	247
Aufgabe:	3.13	Der totale Wirkungsquerschnitt der Paarverrichtung	257
Aufgabe:	3.14	Elektron-Positron-Vernichtung im Schwerpunktsystem	261
Aufgabe:	3.15	Paarerzeugung durch zwei Photonen	266



Aufgabe:	3.16	Paarerzeugung im Feld eines Atomkerns	270
Beispiel:	3.17	Die Methode der äquivalenten Photonen	275
Aufgabe:	3.18	Winkelintegration des Hadrentensors	287
Aufgabe:	4.1	Das Furry-Theorem	296
Aufgabe:	4.2	Einheitensysteme in der Elektrodynamik	301
Aufgabe:	5.1	Berechnung eines Integrals	328
Aufgabe:	5.2	Die Photopolarisationsfunktion	330
Aufgabe:	5.3	Das Uehling-Potential	335
Beispiel:	5.4	Myonische Atome	345
Aufgabe:	5.5	Gaußsche Integrale	348
Beispiel:	5.6	Der Formfaktor des Elektrons	361
Beispiel:	5.7	Die Infrarotkatastrophe	372
Beispiel:	5.8	Die Energieverschiebung atomarer Niveaus	375
Aufgabe:	6.1	Gebundene Zustände der Bethe-Salpeter-Gleichung	399
Aufgabe:	6.2	Die Lösung des Anfangswertproblems für Fermionen	401
Aufgabe:	6.3	Die Bethe-Salpeter-Gleichung für das Positronium	404
Beispiel:	6.4	Nicht-retardierter Grenzfall der Bethe-Salpeter-Gleichung	410
Beispiel:	6.5	Die Breit-Wechselwirkung	417
Beispiel:	6.6	Nichtrelativistische Reduktion der Zweikörper-Gleichung für das Positronium	422
Aufgabe:	7.1	Die Wellenfunktion am Eintauchpunkt	439
Beispiel:	7.2	Fanos Formalismus zur Beschreibung von Resonanzen	447
Aufgabe:	7.3	Das Produkt zweier Hauptwertpole	456
Aufgabe:	7.4	Zeitabhängiger Vakuumzerfall	458
Beispiel:	7.5	Die effektive Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes	477
Aufgabe:	7.6	Eine alternative Ableitung der effektiven Lagrangefunktion	492
Aufgabe:	7.7	Lösung der Dirac-Gleichung im inhomogenen Magnetfeld	495
Aufgabe:	8.1	Compton-Streuung an Bosonen	513
Aufgabe:	8.2	Die Elektroproduktion von Pionen	517

# Kapitel 1

## Propagator-Theorie

### 1.1 Einleitung

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Quantenelektrodynamik (QED), die zu den präzisesten und erfolgreichsten Theorien in der Physik gehört. Unter der QED versteht man im engeren Sinne die Quantenfeldtheorie für Elektronen, Positronen (das Elektron-Positronfeld) und Photonen (das elektromagnetische Feld oder Strahlungsfeld); im weiteren Sinne gehören auch alle elektromagnetischen Quantenprozesse der schweren Leptonen ( $\mu^-$  und  $\tau^-$ ) und anderer geladener Teilchen dazu. In allgemeinen unterliegen diese Teilchen auch nicht-elektromagnetischen Kräften, insbesondere der starken und der schwachen Wechselwirkung. Experimentell wurde entdeckt, daß stark wechselwirkende Teilchen (Hadronen) aus anderen elementaren Teilchen zusammengesetzt sind, den Quarks, so daß neue Freiheitsgrade wichtig werden (colour, flavour). Es wird vermutet, daß die starke und die schwache Wechselwirkung durch „nicht-abelsche“ Eichtheorien analog zur QED, die eine „abelsche“ Eichtheorie ist, beschrieben wird. Die entsprechenden Theorien sind die Quantenchromodynamik ( $SU(3)_C$ ) für die starke und die Quantenflavourdynamik für die schwache Wechselwirkung ( $SU(2)_F$ ). In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns ausschließlich mit der QED, die als exemplarische Eichtheorie das Vorbild für die Beschreibung der anderen Wechselwirkungen geliefert hat. Auch für sich alleine betrachtet ist die QED von großer Bedeutung, da sie die Grundlage der Atomphysik bildet.

Es gibt nun zwei Zugänge zur Quantenelektrodynamik: Der eine, formellere geht über die Quantisierung der Wellenfelder, der andere, anschaulichere Weg stammt von Stückelberg und Feynman und benutzt das Propagator-Verfahren. Ein Student der Physik muß heute beide Wege kennen, doch ist es befriedigender und daher didaktisch vorzuziehen, wenn recht bald klar wird, wie nützlich ein entwickelter Formalismus ist. Fast jeder möchte möglichst bald sehen, wie verschiedene Prozesse wirklich ausgerechnet werden. Das läßt sich im Feynmanschen Propagator-Formalismus am

besten erreichen. Deshalb stellen wir diesen in den Mittelpunkt dieser Vorlesungen. Im Anhang werden Bücher zur quantenfeldtheoretischen Methode vorgestellt, die eine weniger intuitive, als vielmehr eine systematischere Behandlung der QED beinhalten.

Wir wenden uns zunächst einer allgemeineren Diskussion der Streuprozesse zu. Es ist das Ziel dieser Betrachtungen, Übergangswahrscheinlichkeiten und Streuquerschnitte im Rahmen der Dirac-Theorie der Elektronen und Positronen zu berechnen. Diese Rechnungen werden im Prinzip exakt sein, aber in der Praxis doch im Rahmen einer Störungsrechnung (Entwicklung nach kleinen Wechselwirkungsparametern) erfolgen. Da die Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse von Elektron-Positron-Paaren mitbeschrieben werden sollen, muß der Formalismus von vornherein relativistisch sein.

Im Feynmanschen Propagator-Verfahren werden die Streuprozesse mit Hilfe von Integralgleichungen beschrieben. Der leitende Gedanke dabei, daß Positronen als Elektronen negativer Energie aufgefaßt werden, die rückwärts in der Zeit laufen, geht auf E.C.G. Stückelberg zurück und wurde von R.P. Feynman ausgebaut<sup>1</sup>. Feynman bekam für seine Formulierung der Quantenelektrodynamik im Jahre 1965 zusammen mit J. Schwinger und S. Tomonaga den Nobelpreis. Letztere lieferten wiederum andere Formulierungen der QED, die aber alle untereinander äquivalent sind. Wir werden uns im folgenden von der Leistungsfähigkeit dieser Formulierung der Theorie überzeugen. Die mehr oder weniger heuristischen Rechenvorschriften können durch eine quantenfeldtheoretische Vertiefung bewiesen und bestätigt werden.

## 1.2 Der nichtrelativistische Propagator

Es ist nützlich, zunächst an die Definition der Greenfunktionen im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik zu erinnern. Die hier verwendeten Begriffe und Methoden lassen sich dann zwanglos auf die relativistische Quantenmechanik übertragen.

Wir betrachten primär quantenmechanische Stoßprozesse in drei Dimensionen, in welchen ein Teilchen mit einem fixierten Kraftfeld oder mit einem anderen Teilchen kollidiert. Ein Streuprozess läuft dabei nach dem in Abb. 1.1 skizzierten Schema ab. Man richtet es durch Kollimatoren  $D$  in der Praxis so ein, daß die einfallenden Teilchen zu einem wohldefinierten Strahl fokussiert werden. Solch ein kollimierter

<sup>1</sup> Vgl. z. B. R.P. Feynman: Phys. Rev. 76, 549 (1949).

Strahl ist im allgemeinen nicht eine unendlich ausgedehnte Welle, etwa der Form  $e^{ikx}$ , sondern eine Überlagerung von sehr vielen ebenen Wellen mit benachbarten Wellenzahlvektoren  $k$ , also ein Wellenpaket. Demnach wird in der stationären Streutheorie aus Einfachheitsgründen das einfallende Wellenpaket durch eine ebene Welle repräsentiert. Man muß nur berücksichtigen, daß Interferenzen zwischen einfallendem Wellenpaket und Streuwelle nicht möglich sind. Rechnet man also mit ebenen Wellen, so müssen diese Interferenzen explizit ausgeschlossen werden<sup>1</sup>.

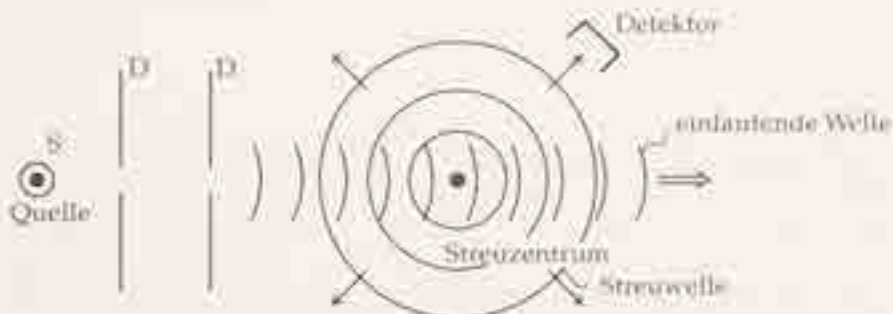


Abb. 1.1 Schematische Darstellung einer Versuchsanordnung zur Messung eines Streuprozesses. Durch die Kollimatoren D wird erreicht, daß im Detektor keine Interferenz zwischen einfallender Welle und Streuwelle auftritt.

In der ursprünglichen, zeitabhängigen Beschreibung von Streuprozessen betrachten wir also Wellenpakete, die sich aus Anfangsbedingungen, die in der fernen Vergangenheit festgelegt wurden, zeitlich entwickeln. Es werden also im allgemeinen keine stationären Energie-Eigenzustände (d.h. stehende Wellen) betrachtet. Die wichtigste Frage in einem Streuproblem lautet dann: Was wird – zeitlich gesehen – aus einem Wellenpaket, das in der fernen Vergangenheit ein Teilchen darstellt, welches sich einem Streuzentrum (Potential, anderes Teilchen) nähert? Wie sieht diese Welle in der fernen Zukunft aus?

Hier hilft das verallgemeinerte *Huygen'sche Prinzip* weiter. Wenn eine Wellenfunktion  $\psi(\vec{x}, t)$  zu einer bestimmten Zeit  $t$  bekannt ist, so kann ihre Gestalt zu einem späteren Zeitpunkt  $t'$  dadurch gefunden werden, daß man jeden Raumpunkt  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  als Quelle einer Kugelwelle ansieht, die sich vom Ort  $\vec{x}$  weg bewegt. Es ist plausibel anzunehmen, daß die von  $\vec{x}$  ausgehende und zur Zeit  $t'$  bei  $\vec{x}'$  einfallende

<sup>1</sup>Für eine vollständige Diskussion der Wellenpaket-Beschreibung siehe z.B. M.L. Goldberger und K.M. Watson: *Collision Theory* (Wiley, New York 1964), Kap. 3, oder R.G. Newton: *Scattering Theory of Waves and Particles* (McGraw-Hill, New York 1966), Kap. 8.



Welle der ursprünglichen, erregenden Wellenamplitude  $\psi(\vec{x}, t)$  proportional ist. Die Proportionalitätskonstante nennen wir

$$G(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) \quad (1.1)$$

Das verallgemeinerte Huygenssche Prinzip läßt sich dann so ausdrücken:

$$\psi(\vec{x}', t') = \int d^3x G(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \quad - \quad t' > t \quad (1.2)$$

Hierbei ist  $\psi(\vec{x}', t')$  die zur Zeit  $t'$  bei  $\vec{x}'$  eintrifftende Welle. Die Größe  $G(\vec{x}', t'; \vec{x}, t)$  heißt *Greenfunktion* oder auch *Propagator*. Sie beschreibt die Auswirkung der Welle  $\psi(\vec{x}, t)$ , die in der Vergangenheit (zur Zeit  $t < t'$ ) am Ort  $\vec{x}$  vorlag, auf die zur späteren Zeit  $t'$  am Ort  $\vec{x}'$  herrschende Welle  $\psi(\vec{x}', t')$ . Kennt man die Greenfunktion  $G(\vec{x}', t'; \vec{x}, t)$ , so läßt sich aus einem gegebenen Anfangszustand  $\psi(\vec{x}, t)$  der sich daraus entwickelnde physikalische Endzustand  $\psi(\vec{x}', t')$  gemäß (1.2) berechnen. Die Kenntnis von  $G$  löst also das gesamte Streuproblem. Mit anderen Worten: Die Kenntnis von  $G$  ist der vollständigen Lösung der Schrödinger-Gleichung äquivalent. Wir wollen uns zunächst mathematisch einen Überblick verschaffen und die verschiedenen Möglichkeiten der Definition von Greenfunktionen besprechen.

### 1.3 Greenfunktion und Propagator

Zur mathematisch-begrifflichen Klärung beginnen wir am besten mit der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{x}, t) = \left( \hat{H}_0 + V(\vec{x}, t) \right) \psi(\vec{x}, t), \quad (1.3)$$

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2,$$

welche die Wechselwirkung eines Teilchens der Masse  $m$  mit einem Potential  $V(\vec{x}, t)$  beschreibt. Wenn wir  $m$  durch die reduzierte Masse  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  ersetzen, so bleibt (1.3) auch für das (nichtrelativistische) Zwei-Körper-Problem gültig. Die Differentialgleichung (1.3) ist von erster Ordnung in der Zeit; höhere Zeitableitungen kommen also nicht vor. Deshalb kann die erste Zeitableitung  $\partial \psi(\vec{x}, t) / \partial t$  immer durch  $\psi(\vec{x}, t)$  ausgedrückt werden, was ja in (1.3) klar zum Ausdruck kommt. Dies

wiederum hat zur Konsequenz, daß aus allen Werten von  $\psi(\vec{x}, t)$  bei einer bestimmten Zeit (z.B.  $t_0$ ) und allen Orten  $\vec{x}$ , also aus  $\psi(\vec{x}, t_0)$ , die Wellenfunktion  $\psi(\vec{x}, t)$  in allen Orten und zu allen Zeiten (sowohl früheren ( $t < t_0$ ) als auch späteren Zeiten ( $t > t_0$ )) berechnet werden kann. Da weiterhin die Schrödinger-Gleichung (1.3) *linear* in  $\psi$  ist, gilt das Superpositionsprinzip, d.h. Lösungen können linear superponiert werden, und die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen zu verschiedenen Zeiten ( $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\psi(\vec{x}, t_0)$ ) muß linear sein. Das bedeutet, daß  $\psi(\vec{x}, t)$  einer linearen homogenen Integralgleichung der Form

$$\psi(\vec{x}, t) = i \int d^3z G(\vec{x}, t; \vec{z}, t_0) \psi(\vec{z}, t_0) \quad (1.4)$$

genügen muß, wobei sich die Integration über den gesamten Raum erstreckt. Diese Beziehung dient auch zur Definition der Funktion  $G$ , die als die zum Hamiltonoperator  $\hat{H}$  gehörige Greenfunktion bezeichnet wird.

Es ist wichtig festzuhalten, daß in der Beziehung (1.4) – im Gegensatz zu (1.2) – kein Unterschied zwischen einer Vorwärtsausbreitung von  $\psi$  in der Zeit ( $t' > t$ ) und einer Rückwärtsausbreitung von  $\psi$  in der Zeit ( $t' < t$ ) gemacht wird. Es ist jedoch wünschenswert, diese zwei Fälle klar zu unterscheiden. Für die Vorwärtsausbreitung wird die *retardierte Greenfunktion* oder der *Propagator* definiert durch

$$G^>(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = \begin{cases} G(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) & \text{für } t' \geq t \\ 0 & \text{für } t' < t \end{cases} \quad (1.5)$$

Hier ist es nützlich, die Sprungfunktion  $\Theta(\tau)$  einzuführen (vgl. Abb. 1.2)

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{für } \tau < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Damit läßt sich die kausale Entwicklung von  $\psi(\vec{x}', t')$  aus  $\psi(\vec{x}, t)$  mit  $t' > t$  formulieren:



Abb. 1.2: Die Sprungfunktion  $\Theta(\tau)$ .

$$\Theta(t' - t) \psi(\vec{x}', t') = i \int d^3z G^>(\vec{x}', t'; \vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t) \quad (1.7)$$

Für  $t' < t$  drückt diese Beziehung aufgrund von (1.5) und (1.6) eine Trivialität aus. Für  $t' > t$  ist sie aber identisch mit (1.4). Die Gleichung (1.7) stellt sicher,