L. D. LANDAU · E. M. LIFSCHITZ

LEHRBUCH DER THEORETISCHEN PHYSIK

IV

QUANTEN-ELEKTRODYNAMIK

VERLAG HARRI DEUTSCH

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Band IV

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler

Band 1:
Mechanik
unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2007,
231 Seiten, 56 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1326-2

Band 2:
Klassische Feldtheorie
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2009,
496 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1327-9

Band 3:
Quantenmechanik
unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2007,
660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, Leinen
ISBN 978-3-8171-1328-6

Band 4:
Quantenelektrodynamik
unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2009,
628 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1329-3

Band 5:
Statistische Physik Teil 1
unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2008,
535 Seiten, 78 Abbildungen, 3 Tabellen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1330-9

Band 6:
Hydrodynamik
korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2007,
705 Seiten, 136 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1331-6

Band 7:
Elastizitätstheorie
7. Auflage 1991, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1332-3

Band 8:
Elektrodynamik der Kontinua
5., ergänzte Auflage 1990, 565 Seiten, 65 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1333-0

Band 9:
Statistische Physik Teil 2
4., berichtigte Auflage 1992, 404 Seiten, 18 Abbildungen, Leinen
ISBN 978-3-8171-1334-7

Band 10:
Physikalische Kinetik
2. Auflage 1990, 480 Seiten, 35 Abbildungen, Leinen,
ISBN 978-3-8171-1335-4

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich
ISBN 978-3-8171-1336-1

W. B. BERESTETZKI · E. M. LIFSCHITZ
L. P. PITAJEWSKI

QUANTEN-ELEKTRODYNAMIK

Mit 25 Abbildungen

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe:
Квантовая электродинамика

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1989

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. sc. Adolf Kühnel, Leipzig, und Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden, übersetzt aus dem Russischen von Prof. Dr. sc. Adolf Kühnel

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1329-3

Unveränderter Nachdruck der 7. berichtigten Auflage 1991, 2009

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt <www.betz-druck.de>
Printed in Germany

VORWORT
ZUR VIERTEN DEUTSCHEN AUFLAGE

Die relativistische Quantentheorie ist gegenwärtig bei weitem noch keine abgeschlossene Theorie; selbst die physikalischen Prinzipien, auf denen diese Theorie aufbaut, sind noch nicht völlig ergründet. Diese Feststellungen treffen in besonderem Maße auf die Theorie der starken und der schwachen Wechselwirkungen zu.

Dem ursprünglichen Vorhaben von L. D. LANDAU entsprechend, sollen in diesem Lehrbuch nur diejenigen theoretischen Ergebnisse dargestellt werden, die mit einem vernünftigen Grad an Zuverlässigkeit als gesichert erscheinen und in ein bestimmtes System eingeordnet werden können. Mit anderen Worten, die Darstellung sollte sich nicht zu dicht an die „vorderste Front" der Theoretischen Physik heranwagen. Es ist ganz natürlich, daß man sich bei einem derartigen Vorhaben im wesentlichen auf die Quantenelektrodynamik beschränken muß.

Bei der Behandlung der konkreten Anwendungen der Theorie haben wir uns nicht das Ziel gestellt, die Vielzahl der einschlägigen Effekte vollständig zu erfassen; wir haben uns auf die grundlegenden Effekte beschränkt und zusätzlich einige Hinweise auf Originalarbeiten gegeben, in denen weitergehende Untersuchungen zu finden sind. Bei der Wiedergabe der meist sehr umfangreichen Rechnungen haben wir oft einige Zwischenformeln weggelassen, aber wir haben uns immer bemüht, alle nichttrivialen methodischen Gesichtspunkte darzustellen. In diesem Zusammenhang muß man beachten, daß in diesem Band gegenüber den anderen Bänden dieses Lehrbuches ein höheres Niveau des Lesers vorausgesetzt wird.

Dieser Band ist ohne die direkte Beteiligung unseres Lehrers L. D. LANDAU geschrieben worden. Wir haben uns jedoch bemüht, uns immer von demselben Geist und demselben Verhältnis zur Theoretischen Physik leiten zu lassen, das er uns gelehrt hat und das er auch in den anderen Bänden dieses Lehrbuches eingenommen hat. Wir haben uns häufig selbst gefragt, wie sich wohl DAU zu dieser oder jener Frage stellen würde, und wir haben uns bemüht, so zu antworten, wie es uns die jahrelange Gemeinsamkeit mit ihm eingegeben hat.

In dieser Auflage sind die beiden Teile, in denen dieser Band in früheren Auflagen herausgegeben worden ist, zu einem Buch vereinigt worden. Wir haben es dabei für zweckmäßig erachtet (gemäß der oben formulierten allgemeinen Zielstellung), eine gewisse Kürzung vorzunehmen und einige fragmentarische Abschnitte über die Theorie der starken und der schwachen Wechselwirkungen wegzulassen. Gleichzeitig haben wir das Kapitel über die Elektrodynamik der Hadronen etwas erweitert und auch an einigen anderen Stellen geringfügige Änderungen vorgenommen.

November 1976

W. B. Berestetzki   E. M. Lifschitz   L. P. Pitajewski

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Der vorliegende Band des „Lehrbuches für Theoretische Physik" befaßt sich mit der Quantenelektrodynamik, dem weitgehend abgesicherten Gebiet der relativistischen Quantentheorie. Einige der dargestellten Ergebnisse liegen in diesem Buch erstmalig in deutscher Sprache vor. Die Art des zu vermittelnden Stoffes bedingt eine anspruchsvollere Darstellung als in den anderen Bänden dieses Lehrbuches; mitunter müssen recht formale Abschnitte vorbereitend für die physikalische Anwendung eingestreut werden. Andererseits sind oft längere Zwischenrechnungen, die die Darstellung unnötig schwerfällig werden ließen, nicht wiedergegeben, und der interessierte Leser wird die betreffenden Rechnungen entweder selbst ausführen oder zur zitierten Originalliteratur greifen.

Die vorliegende 7. deutsche Auflage der Quantenelektrodynamik wurde nach der 3. russischen Auflage dieses Buches vorbereitet. Die dort enthaltenen Korrekturen und Veränderungen sind in dieser deutschen Auflage berücksichtigt worden. Die vorgenommenen Änderungen gegenüber der 6. deutschen Auflage sind, abgesehen von den neu eingeführten Formelsymbolen, geringfügig.

Frau Diplom-Physiker U. Nitzsche sei an dieser Stelle für eine gründliche Durchsicht der vorangegangenen deutschen Auflage auf Druckfehler gedankt. Ebenso gilt unser Dank Herrn Prof. L. P. Pitajewski für seine Unterstützung bei der Vorbereitung dieser neuen Auflage. Die erfreuliche Zusammenarbeit mit Herrn Prof. E. M. Lifschitz bei der Herausgabe früherer deutscher Auflagen behalten wir in dankbarer Erinnerung.

Dresden und Leipzig 1990 P. Ziesche A. Kühnel

INHALTSVERZEICHNIS

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Vierdimensionale Bezeichnungen

Vierdimensionale Tensorindizes werden mit griechischen Buchstaben $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ bezeichnet und nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an.

Es wird die 4-Metrik mit der Signatur $(+ - - -)$ verwendet. Der metrische Tensor ist $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$).

Die Komponenten eines 4-Vektors werden in folgender Weise angegeben: $a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise von Formeln wird der Index der Komponenten von 4-Vektoren häufig weggelassen.[1] Skalarprodukte von 4-Vektoren werden dabei einfach als (ab) oder ab geschrieben: $ab = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \boldsymbol{ab}$.

Der vierdimensionale Ortsvektor ist $x^\mu = (t, \boldsymbol{r})$, das vierdimensionale Volumenelement ist d^4x.

Der Operator für die Differentiation nach den 4-Koordinaten ist $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$.

Der antisymmetrische 4-Einheitstensor ist $e^{\lambda\mu\nu\rho}$ mit $e^{0123} = -e_{0123} = +1$.

Die vierdimensionale δ-Funktion ist $\delta^{(4)}(a) = \delta(a_0)\,\delta(\boldsymbol{a})$.

Dreidimensionale Bezeichnungen

Für die dreidimensionalen Tensorindizes werden lateinische Buchstaben verwendet: $i, k, l, \ldots$; sie nehmen die Werte x, y, z an.

Dreidimensionale Vektoren werden als halbfett-kursive Buchstaben gesetzt oder griechische Buchstaben mit Pfeil.

Das dreidimensionale Volumenelement ist d^3x.

Operatoren

Operatoren werden mit Buchstaben mit einem „Dach" bezeichnet.[2]

Die Kommutatoren oder Antikommutatoren zweier Operatoren sind $(\hat{f}, \hat{g})_\pm = \hat{f}\hat{g} \pm \hat{g}\hat{f}$.

---

[1] Diese Schreibweise ist in der heutigen Literatur weit verbreitet. Dieser Kompromiß zwischen den Vorräten an Buchstaben und den Erfordernissen der Physik erfordert natürlich vom Leser besondere Aufmerksamkeit.

[2] Zur Vereinfachung der Schreibweise wird aber über den Spinmatrizen das Dach weggelassen. Auch über den Bezeichnungen für die Operatoren in Matrixdarstellung wird das Dach nicht mitgeschrieben.

Der transponierte Operator ist $\tilde{\hat{f}}$.

Der adjungierte (hermitesch konjugierte) Operator ist $\hat{f}^+$.

Der Operator für die Ladungskonjugation ist $\hat{C}$.[1]

Der Operator einer räumlichen Spiegelung ist $\hat{P}$.[1]

Der Operator für die Zeitumkehr ist $\hat{T}$.

Für das Symbol des zeitgeordneten Produkts wird der Buchstabe T verwendet.

Matrixelemente

Das Matrixelement des Operators $\hat{F}$ für den Übergang aus dem Anfangszustand i in den Endzustand f ist F_{fi} oder $\langle f|F|i\rangle$.

Die Bezeichnung $|i\rangle$ wird als abstraktes Symbol für einen Zustand unabhängig von der konkreten Darstellung der zugehörigen Wellenfunktion verwendet, $\langle f|$ ist das Symbol für den Endzustand („konjugiert komplexen" Zustand).[2]

Dementsprechend werden mit $\langle s|r\rangle$ die Koeffizienten in der Entwicklung eines Systems von Zuständen mit den Quantenzahlen r nach Zuständen mit den Quantenzahlen s bezeichnet: $|r\rangle = \sum_s |s\rangle\langle s|r\rangle$.

Die reduzierten Matrixelemente der sphärischen Tensoren sind $\langle f\|F\|i\rangle$.

Dirac-Gleichung

Die Dirac-Matrizen sind γ^μ mit $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$; ferner treten die Matrizen $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ und $\beta = \gamma^0$ auf. Ausdrücke in Spinor- und in Standarddarstellung sind (21,3), (21,16), (21,20) (S. 72, 74, 75).

$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $(\gamma^5)^2 = 1$ (s. (22,18) auf S. 78).

$\sigma^{\mu\nu} = 1/2(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ (s. (28,2) auf S. 95).

Diracsche Konjugation: $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

Die Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sind auf S. 62 definiert.

Die Indizes von 2-Spinoren werden mit $\alpha, \beta, \ldots$ und $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots$ bezeichnet und nehmen die Werte 1, 2 und 1, 2 an.

Die Bispinorindizes $i, k, l, \ldots$ nehmen die Werte 1, 2, 3, 4 an.

Fourier-Entwicklung

Die dreidimensionale Entwicklung ist

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad f(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x$$

Entsprechendes gilt für den vierdimensionalen Fall.

---

[1] Von den englischen Worten charge (Ladung) bzw. parity (Parität).

[2] Bezeichnung nach Dirac.

Maßeinheiten

Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, werden die relativistischen Einheiten $\hbar = 1$ und $c = 1$ verwendet. In diesen Einheiten ist das Quadrat der Elementarladung $e^2 = 1/137$.

Die atomaren Maßeinheiten sind $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. In diesen Einheiten ist $c = 137$. Atomare Längen-, Zeit- und Energieeinheit sind $\hbar^2/me^2$, $\hbar^3/me^4$ bzw. $me^4/\hbar^2$ (die Größe $\mathrm{Ry} = me^4/2\hbar$ wird als Rydberg bezeichnet).

Die normalen Einheiten werden dem absoluten (Gaussschen) Maßsystem entnommen.

Konstanten

Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}997925 \cdot 10^{10}$ cm/s.
Elementarladung[1] $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ cgs-Einheiten.
Elektronenmasse $m = 9{,}110 \cdot 10^{-28}$ g.
Plancksches Wirkungsquantum $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-27}$ erg · s.
Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137{,}04$.
Bohrscher Radius $\hbar^2/me^2 = 5{,}292 \cdot 10^{-9}$ cm
Klassischer Elektronenradius $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}818 \cdot 10^{-13}$ cm
Compton-Wellenlänge eines Elektrons $\hbar/mc = 3{,}862 \cdot 10^{-11}$ cm.
Ruhenergie eines Elektrons $mc^2 = 0{,}5110 \cdot 10^6$ eV.
Atomare Energieeinheit $me^4/\hbar^2 = 4{,}360 \cdot 10^{-11}$ erg $= 27{,}21$ eV.
Bohrsches Magneton $e\hbar/2mc = 9{,}274 \cdot 10^{-21}$ erg/T.
Protonenmasse $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g.
Compton-Wellenlänge eines Protons $\hbar/m_p c = 2{,}103 \cdot 10^{-14}$ cm
Kernmagneton $e\hbar/2m_p c = 5{,}051 \cdot 10^{-24}$ erg/T.
Verhältnis der Myonenmasse zur Elektronenmasse $m_\mu/m = 2{,}068 \cdot 10^2$

Hinweise auf andere Bände dieses Lehrbuches sind mit Ziffern versehen: I (Mechanik, 1984), II (Feldtheorie, 1984), III (Quantenmechanik, 1984), VIII (Elektrodynamik der Kontinua, 1985), X (Physikalische Kinetik, 1990).

[1] In diesem Band enthält die Bezeichnung e für die Ladung eines Teilchens (überall außer in Kapitel XIV) auch das Vorzeichen, so daß für ein Elektron $e = -|e|$ gilt.

EINLEITUNG

§ 1. Unschärferelationen im relativistischen Bereich

Die gesamte in Band III dieses Lehrbuches behandelte Quantenmechanik ist nichtrelativistisch; sie kann nicht auf Erscheinungen angewandt werden, bei denen Bewegungen mit Geschwindigkeiten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit nicht klein sind, vorkommen. Auf den ersten Blick könnte man erwarten, daß der Übergang zu einer relativistischen Theorie durch eine mehr oder weniger direkte Verallgemeinerung des Apparates der nichtrelativistischen Quantenmechanik möglich wäre. Eine sorgfältige Betrachtung zeigt dagegen, daß der Aufbau einer logisch geschlossenen relativistischen Theorie die Einbeziehung neuer physikalischer Prinzipien erfordert.

Wir wollen an einige physikalische Vorstellungen erinnern, die der nichtrelativistischen Quantenmechanik zugrunde liegen (III, § 1). Wir haben gesehen, daß in der nichtrelativistischen Quantenmechanik der Begriff der Messung eine fundamentale Rolle spielt. Unter einem Meßprozeß versteht man die Wechselwirkung eines quantenmechanischen Systems mit einem „klassischen Objekt" („Gerät"); durch diese Wechselwirkung nimmt das quantenmechanische System bestimmte Werte gewisser dynamischer Veränderlicher (Koordinaten, Geschwindigkeiten u. a.) an. Wir haben auch gesehen, daß die Quantenmechanik die Möglichkeiten der gleichzeitigen Existenz verschiedener dynamischer Veränderlicher eines Elektrons[1] stark einschränkt. Die Unschärfen Δq und Δp, die bei einer gleichzeitigen Messung von Ort und Impuls unvermeidlich sind, erfüllen die Beziehung $\Delta q\,\Delta p \sim \hbar$[2]; je genauer man eine dieser Größen mißt, desto weniger genau kann die andere gleichzeitig gemessen werden.

Es ist aber wesentlich, daß jede dynamische Veränderliche eines Elektrons für sich allein beliebig genau gemessen werden kann; die Messung kann in einem beliebig kleinen Zeitintervall erfolgen. Dieser Sachverhalt spielt für die ganze nichtrelativistische Quantenmechanik eine fundamentale Rolle. Nur auf Grund dessen kann man den Begriff der Wellenfunktion einführen, der für den Apparat in dieser Theorie grundlegend ist. Tatsächlich hat die Wellenfunktion $\psi(q)$ folgende physikalische Bedeutung: Das Betragsquadrat der Wellenfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man bei einer Messung zu einem bestimmten Zeitpunkt das Elektron an dem betreffenden Ort vorfindet. Eine notwendige Voraussetzung, den Begriff einer solchen Wellenfunktion einführen zu können, ist offensichtlich die prinzipielle Möglichkeit, den Ort beliebig genau und schnell messen zu können; andernfalls würde dieser Begriff gegenstandslos und würde seinen physikalischen Sinn verlieren.

---

[1]) Wie in III, § 1 sprechen wir der Kürze halber von einem Elektron, denken dabei aber an ein beliebiges quantenmechanisches System.

[2]) In diesem Paragraphen verwenden wir normale Einheiten.

Die Existenz einer Grenzgeschwindigkeit (der Lichtgeschwindigkeit c) führt zu neuen prinzipiellen Einschränkungen der Möglichkeiten, verschiedene physikalische Größen zu messen (L. D. LANDAU, R. PEIERLS, 1930).

In III, § 44 haben wir die Beziehung

$$(v' - v)\,\Delta p\,\Delta t \sim \hbar \tag{1.1}$$

abgeleitet, die die Unschärfe Δp in der Impulsmessung an einem Elektron mit der Dauer Δt des Meßprozesses verknüpft; v und v' sind die Geschwindigkeiten des Elektrons vor und nach der Messung. Aus dieser Beziehung folgt: Man kann eine genügend genaue Impulsmessung in einer relativ kurzen Zeit (d. h. kleines Δp bei kleinem Δt) nur auf Kosten einer recht großen Geschwindigkeitsänderung während des Meßprozesses erreichen. In der nichtrelativistischen Theorie äußerte sich dieser Sachverhalt darin, daß eine Impulsmessung nicht nach kurzen Zeitintervallen reproduziert werden kann; in keiner Weise wird davon aber die prinzipielle Möglichkeit einer beliebig genauen Impulsmessung berührt, da die Differenz $v' - v$ immer beliebig groß gemacht werden konnte.

Die Existenz einer Grenzgeschwindigkeit ändert die Sachlage grundlegend. Die Differenz $v' - v$ kann wie die Geschwindigkeiten selbst jetzt nicht größer als c (genauer $2c$) sein. Ersetzen wir in (1.1) $v' - v$ durch c, dann erhalten wir die Beziehung

$$\Delta p\,\Delta t \sim \frac{\hbar}{c}. \tag{1.2}$$

Diese Beziehung bestimmt die beste, prinzipiell erreichbare Genauigkeit einer Impulsmessung bei gegebener Meßdauer Δt. In einer relativistischen Theorie ist es also prinzipiell unmöglich, den Impuls beliebig genau und beliebig schnell zu messen. Eine genaue Impulsmessung ($\Delta p \to 0$) ist nur im Grenzfall einer unendlich langen Meßzeit möglich.

Auch die Meßbarkeit des Ortes erfährt eine tiefgreifende Abänderung. In einer relativistischen Theorie ist der Ort nur bis zu einer gewissen Genauigkeit meßbar; eine bestimmte untere Grenze der Ortsunschärfe kann nicht unterschritten werden. Der Begriff der Lokalisierung eines Elektrons wird in seinem physikalischen Sinn weiter eingeschränkt.

Im mathematischen Formalismus der Theorie äußert sich diese Situation so, daß eine genaue Ortsmessung mit der Positivität der Energie eines freien Teilchens unvereinbar ist. Wie wir später noch sehen werden, enthält das vollständige System der Eigenfunktionen einer relativistischen Wellengleichung für ein freies Teilchen (neben Lösungen mit der „richtigen" Zeitabhängigkeit) auch Lösungen mit einer „negativen Frequenz". Diese Funktionen gehen im allgemeinen auch in die Entwicklung des Wellenpaketes ein, das einem in einem kleinen Raumgebiet lokalisierten Elektron entspricht.

Die Wellenfunktionen mit „negativer Frequenz" hängen, wie noch gezeigt wird, mit der Existenz von Antiteilchen — Positronen — zusammen. Das Auftreten dieser Funktionen in der Entwicklung eines Wellenpaketes ist der Ausdruck dafür, daß bei einer Ortsmessung für ein Elektron im allgemeinen unvermeidlich Elektron-Positron-Paare gebildet werden. Die durch den Prozeß selbst hervorgerufene, unkontrollierbare Erzeugung neuer Teilchen nimmt der Ortsmessung offensichtlich ihren Sinn.

Im Ruhsystem des Elektrons ist der minimale Fehler bei einer Ortsmessung

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}. \tag{1,3}$$

Diesem Wert (dem einzigen, der aus Dimensionsbetrachtungen heraus möglich ist) entspricht die Impulsunschärfe $\Delta p \sim mc$, die ihrerseits der kleinsten Schwellenenergie für die Paarerzeugung entspricht.

In einem Bezugssystem, in dem sich das Elektron mit der Energie ε bewegt, haben wir statt (1,3)

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\varepsilon}. \tag{1,4}$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall besteht zwischen Energie und Impuls die Beziehung $\varepsilon \approx cp$, und es ist dann speziell

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p}, \tag{1,5}$$

d. h., der Fehler Δq stimmt mit der DE BROGLIE-Wellenlänge des Teilchens überein.[1])

Für Photonen liegt immer der ultrarelativistische Fall vor, so daß der Ausdruck (1,5) gilt. Es hat demnach nur dann einen Sinn, von den Koordinaten eines Photons zu sprechen, wenn die charakteristischen Abmessungen des Problems groß gegenüber der Wellenlänge sind. Dann handelt es sich aber gerade um den „klassischen" Grenzfall, der der geometrischen Optik entspricht und in dem man von der Lichtausbreitung entlang bestimmter Bahnen — Strahlen — sprechen kann. Im quantenmechanischen Fall dagegen, wenn man die Wellenlänge nicht als klein ansehen kann, wird der Begriff der Koordinaten eines Photons gegenstandslos. Wir werden später (§ 4) sehen, daß sich die Unmöglichkeit der Messung von Photonenkoordinaten im mathematischen Formalismus der Theorie folgendermaßen äußert: Es ist unmöglich, aus der Wellenfunktion eines Photons eine Größe zu bilden, die die Rolle der Wahrscheinlichkeitsdichte spielen könnte und alle notwendigen Forderungen der relativistischen Invarianz erfüllt.

Man könnte daher denken, daß eine künftige Theorie von der Betrachtung des zeitlichen Ablaufs von Wechselwirkungsprozessen zwischen Teilchen ganz abgeht. Die Theorie zeigt, daß es bei diesen Prozessen keine genau definierten Charakteristika gibt (auch nicht in den Grenzen der üblichen quantenmechanischen Genauigkeit), so daß die Beschreibung des zeitlichen Ablaufs eines Prozesses genauso illusorisch wird wie eine klassische Bahnkurve in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Die einzigen beobachtbaren Größen werden die Charakteristika (Impulse, Polarisationen) freier Teilchen sein — der Teilchen, die miteinander in Wechselwirkung treten, und der Teilchen, die infolge des Prozesses entstehen (L. D. LANDAU, R. PEIERLS 1930).

Die charakteristische Problemstellung in der relativistischen Quantentheorie verlangt die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für Übergänge zwischen gegebenen Anfangs- und Endzuständen (d. h. für $t \to \mp\infty$) von Teilchensystemen.

---

[1]) Wir denken dabei an Messungen, bei denen man aus einem beliebigen Versuchsergebnis auf den Elektronenzustand schließen kann, d. h., wir sehen von Ortsmessungen durch Stöße ab, bei denen während der Beobachtungsdauer das Resultat nicht mit der Wahrscheinlichkeit 1 realisiert wird.

Die Gesamtheit dieser Amplituden zwischen allen möglichen Zuständen bildet die *Streumatrix* oder *S-Matrix*. Diese Matrix ist der Träger der gesamten, physikalisch sinnvollen und beobachtbaren Information über die Wechselwirkungsprozesse zwischen Teilchen (W. Heisenberg, 1938).

Gegenwärtig gibt es noch keine vollständige, logisch abgeschlossene relativistische Quantentheorie. Wir werden sehen, daß die vorhandene Theorie neue physikalische Aspekte in die Art der Beschreibung von Teilchenzuständen hineinbringt; diese neue Beschreibung erhält gewisse Züge der Feldtheorie (s. § 10). Sie wird aber weitgehend nach dem Vorbild und mit Hilfe der Begriffe der üblichen Quantenmechanik aufgebaut. Dieser Aufbau der Theorie führte auf dem Gebiet der Quantenelektrodynamik zum Erfolg. Das Fehlen einer vollständigen logischen Abgeschlossenheit äußert sich in dieser Theorie im Auftreten divergenter Ausdrücke bei der direkten Anwendung des mathematischen Apparates; zur Beseitigung dieser Divergenzen existieren aber eindeutige Verfahren. Trotzdem haben diese Verfahren weitgehend den Charakter halbempirischer Rezepte, und unsere Überzeugung von der Richtigkeit der auf diesem Wege erhaltenen Ergebnisse beruht letzten Endes auf ihrer hervorragenden Übereinstimmung mit dem Experiment, aber nicht auf der inneren Konsistenz und der logischen Klarheit der Grundprinzipien der Theorie.

I DAS PHOTON

§ 2. Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Unser Ziel ist, das elektromagnetische Feld als quantentheoretisches Objekt zu behandeln. Es ist dabei zweckmäßig, von derjenigen klassischen Beschreibung des Feldes auszugehen, bei der das Feld durch einen zwar unendlichen, aber diskreten Satz von Veränderlichen charakterisiert wird; diese Beschreibung erlaubt, unmittelbar den üblichen Apparat der Quantenmechanik anzuwenden. Dagegen ist die Darstellung des Feldes durch die in allen Raumpunkten vorgegebenen Potentiale ihrer Natur nach eine Beschreibung mit Hilfe einer stetigen Menge von Veränderlichen.

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ sei das Vektorpotential eines freien elektromagnetischen Feldes, das die „Transversalitätsbedingung“

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{2,1}$$

erfüllt. Dabei ist das skalare Potential $\Phi = 0$, und die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ werden gegeben als

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{2,2}$$

Die MAXWELLschen Gleichungen reduzieren sich auf die Wellengleichung für $\boldsymbol{A}$:

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2,3}$$

Bekanntlich (s. II, § 52) geht man in der klassischen Elektrodynamik zu einer Beschreibung mit Hilfe eines diskreten Satzes von Veränderlichen über, indem man das Feld in einem großen, aber endlichen Volumen V betrachtet.[1] Wir erinnern daran, wie man dabei vorgeht, lassen aber die Einzelheiten der Rechnungen weg.

Ein Feld in einem endlichen Volumen kann nach fortschreitenden ebenen Wellen entwickelt werden, und das Potential wird durch eine Reihe der Gestalt

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^{*} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}) \tag{2,4}$$

dargestellt, wobei die Koeffizienten $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ nach dem Gesetz

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} \propto e^{-i\omega t}, \qquad \omega = |\boldsymbol{k}| \tag{2,5}$$

von der Zeit abhängen. Infolge der Bedingung (2,1) stehen die komplexen Vektoren $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ senkrecht auf den zugehörigen Wellenzahlvektoren: $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = 0$.

Die Summation in (2,4) erfolgt über einen unendlichen diskreten Satz von Wellenzahlvektoren (seiner drei Komponenten k_x, k_y, k_z). Der Übergang zur Integration über

[1] Um die Formeln nicht unnötig aufzublähen, werden wir $V = 1$ setzen.