

Greiner

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{x}, \hat{p})$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

QUANTENMECHANIK

EINFÜHRUNG

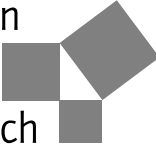

Edition
Harri 
Deutsch



Quantenmechanik

Einführung



Edition
Harri 
Deutsch 

Quantenmechanik

Einführung

von

Walter Greiner

6., überarbeitete und erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56344

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)
Johann Wolfgang Goethe-Universität
D-60438 Frankfurt am Main

6., überarbeitete und erweiterte Auflage 2005

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5634-4

ISBN 978-3-8085-5801-0 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2005 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnet und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

Der Band *Quantenmechanik – Einführung* zeigt, wie ausgehend von den experimentellen Befunden die abstrakte Theorie der Quantenmechanik formuliert wird und wie mithilfe dieses Formalismus physikalische Probleme gelöst werden können.

Vorwort zur 6. Auflage

Der vorliegende Band *Quantenmechanik – Einführung* ist aus meinen Vorlesungen über theoretische Physik für das vierte Studiensemester hervorgegangen. Diese Vorlesung schließt die Grundausbildung in theoretischer Physik vor dem Vordiplom an der Universität Frankfurt am Main ab. Während im ersten Semester eine allgemeine Einführung in die mathematischen und physikalischen Methoden der theoretischen Physik, im zweiten und dritten Semester ausgiebig die theoretische Mechanik bzw. die Elektrodynamik vorgestellt wurden, beschäftigen wir uns hier mit der Quantenmechanik.

Wir präsentieren auch diese Disziplin nach der induktiven Methode, die dem Vorgehen des forschenden Physikers am besten entspricht: Ausgehend von einigen Schlüsselexperimenten, die idealisiert werden, erfahren wir schrittweise die Grundgedanken – vor allem die Begriffe des Zustandes und des Eigenzustandes eines physikalischen Systems – und konstruieren die Grundgleichung, d. h. die Schrödinger-Gleichung. Dies führt uns über die historischen Beobachtungen der Quantelung physikalischer Größen und die Strahlungsgesetze zum Dualismus Welle-Korpuskel, den wir mit der Bornschen Idee des Führungsfeldes verstehen, d. h. das Schrödingersche Wellenfeld als Führungsfeld für die Partikel interpretieren. Wir verfolgen dann die Quantentheorie sowohl im Hinblick auf grundsätzliche Fragen (Unschärferelationen, Vielteilchensysteme, Spin, nichtrelativistische Wellengleichung mit Spin und die Linearisierung der Schrödingergleichung) und Anwendungen (Harmonischer Oszillator, Wasserstoffatom, Stern-Gerlach-, Einstein-de Haas- und Franck-Hertz-Versuch, zeitunabhängige und zeitabhängige Störungsrechnung, die Behandlung der Übergänge zwischen Kontinuumszuständen usw.) als auch in ihrem mathematischen Ausbau (formales Schema der Quantenmechanik mit der Behandlung u. a. des Hilbertraumes und der Axiome der Quantenmechanik, Eigendifferenziale und die Normierung von Eigenfunktionen kontinuierlicher Spektren, Elemente der Darstellungstheorie, Einführung der S-Matrix, Heisenberg-, Schrödinger- und Wechselwirkungsbild usw.).

Natürlich kann man in einer Einführungsvorlesung nicht die gesamte Quantentheorie vorstellen. Unsere Auswahl der Probleme ist nach physikalisch wichtigen, didaktischen und auch historischen Gesichtspunkten erfolgt.

Wir profitieren im 4. Semester von der gründlichen mathematischen Vorbereitung in den ersten Studienjahren. Dennoch müssen wir auch in dieser Vorlesung wieder neue mathematische Begriffe und Methoden vorstellen und ihre Handhabung kennenlernen. Dazu gehören vor allem die Lösung von speziellen Differenzialgleichungen, insbesondere der hypergeometrischen und konfluente hypergeome-

trischen Differenzialgleichung, die Erinnerung an die Grundlagen der Linearen Algebra, die Formulierung von Eigenwertproblemen, die Begründung der einfachen Störungsrechnung und – für die Quantenmechanik besonders wichtig – die elementare Theorie der Hilberträume. Wie bisher, wird all dies in enger Verbindung mit den auftretenden physikalischen Problemen behandelt. Dadurch wird beim Studenten das Gefühl des praktisch Nützlichen für die neuen mathematischen Methoden erzeugt.

Auch in diesem Band geben zahlreiche biografisch und geschichtliche Fußnoten einen Einblick in die historische Entwicklung der Quantenmechanik. Ein Kapitel über konzeptionelle und philosophische Probleme dieser Theorie wurde an den Schluss dieser Einführung gestellt.

Wir freuen uns über die große Beliebtheit der Vorlesungen zur Theoretischen Physik. Gerade die *Quantenmechanik – Einführung* ist auch in den englischen, französischen und chinesischen Auflagen auf großen Zuspruch gestoßen. Quantenmechanik, diese abstrakte Theorie, ist in den letzten Jahren durch die ungeheueren Fortschritte der Experimentiertechniken der Atomphysiker zu einem sehr aufregenden Gebiet geworden: Versuche, die noch vor nicht allzu langer Zeit als reine Gedankenexperimente formuliert worden sind, können heute dank ausgefeilter Techniken wie Atomfällen und Laserkühlung im Labor durchgeführt werden. Mit dem Gebiet des „Quantum Computing“ ist ein völlig neues Feld entstanden, das für die kommenden Jahre ein großes Potenzial verspricht. Die Auszeichnung der Arbeiten von Glauber, Hall und Hänsch zur theoretischen und angewandten Quantenoptik mit dem Nobelpreise für Physik des Jahres 2005 unterstreicht die herausragende Aktualität der Quantenphysik. Ich hoffe, dass auch dieser Band dazu beitragen kann, in jungen Physikerinnen und Physikern Interesse und Verständnis für diese abstrakte und den normalen Menschenverstand so provozierende Theorie zu wecken.

Herr Dr. Stefan Scherer hat mir bei der Gestaltung dieser 6. Auflage sehr geholfen. Ich danke ihm herzlich.

Oktober 2005
Frankfurt am Main

Walter Greiner

Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflagen haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

1. Auflage (1975)

Das ursprüngliche Manuskript der Vorlesungen wurde 1970 in Zusammenarbeit mit den damaligen Assistenten Dr. Burkhard Fricke* und Dr. Peter Antony-Spieß² von den Studenten P. Bergmann, H. Betz, M. Bundschuh, C. von Charzewski, J. Czarnecki, S. Erlenkämpfer, J. Hahn, H. H. Lustig, B. Müller,³ H. Müller, H. Peitz, J. Rafelski,[§] H. J. Scheefer und H. Sewerin erstellt. Die Neufassung erfolgte dann drei Jahre später durch W. Betz, J. Hofman, P. Kurowski, H. Leber, A. Mahn, J. Reinhardt, K. Stiebing und J. Wagner.

Über die rege Beteiligung dieser Studenten an der Gestaltung der Vorlesungen und ihrer Ausarbeitung waren wir besonders froh, weil dadurch die speziellen Verständnisschwierigkeiten der Erstsemester besondere Berücksichtigung fanden.

Die Damen M. Knolle, R. Lasarzig, B. Utschig und Herr G. Terlecki[¶] haben uns bei der Anfertigung des Manuskripts viel geholfen. Bei ihnen allen bedanken wir uns sehr.

2. Auflage (1978)

Bei der Neubearbeitung waren Frau M. Knolle, Frau R. Lasarzig und Frau B. Utschig eine ständige Hilfe. Herrn Dipl.-Phys. Heinrich Peitz sind wir für die sorgfältige Koordinierung und Überwachung der Verbesserungen besonders dankbar.

3. Auflage (1983)

Wir bedanken uns besonders bei Frau B. Utschig für die Gestaltung der Zeichnungen, bei Herrn Dipl.-Phys. P. Gärtner für seine Hilfe bei der Formulierung der konzeptionellen und philosophischen Probleme und vor allem bei Herrn Dipl.-Phys. M. Seiwert für die Überwachung der Drucklegung.

* jetzt Professor an der Universität Kassel

² jetzt bei der Kraftwerk Union AG Offenbach

³ jetzt Professor an der Duke University, North Carolina, USA

[§] jetzt Professor an der University of Arizona, USA

[¶] jetzt Professor an Fachhochschule Kaiserslautern

4. Auflage (1988)

Wir danken diesmal besonders Herrn Dipl.-Phys. A. Paulus für die sorgfältige Überwachung der neuen Drucklegung. Auch den Herren Dr. G. Stadt, Dipl.-Phys. T. Stahl, cand. phys. Ch. Hofmann und cand. phys. H.-J. Kampfenkel sowie Frau A. Steidl sei für ihre Hilfe herzlich gedankt.

5. Auflage (1991)

Herrn Dipl.-Phys. Andreas von Keitz sei für seine Hilfe bei der Drucklegung herzlich gedankt.

Inhaltsverzeichnis

I	Die Quantelung physikalischer Größen	1
1	Lichtquanten	1
2	Der photoelektrische Effekt	1
3	Der Compton-Effekt	4
4	Das Ritzsche Kombinationsprinzip	6
5	Der Franck-Hertz-Versuch	7
6	Der Stern-Gerlach-Versuch	8
II	Strahlungsgesetze	11
7	Vorbetrachtung über die Strahlung von Körpern	11
8	Was ist Hohlraumstrahlung?	12
9	Rayleigh-Jeanssches Strahlungsgesetz – Die Eigenschwingungen des Hohlraums	16
10	Das Plancksche Strahlungsgesetz	18
III	Der Wellenaspekt der Materie	33
11	Die de Broglieschen Wellen	33
12	Beugung von Materiestrahlen	38
13	Die statistische Deutung der Materiewellen	42
14	Mittelwerte in der Quantenmechanik	49
15	Das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik	53
16	Die Heisenbergsche Unschärferelation	55
IV	Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik I	71
17	Eigenschaften der Operatoren	71
18	Verknüpfung zweier Operatoren	72
19	Darstellung als Skalarprodukt	76
20	Eigenwerte und Eigenfunktionen	77
21	Gleichzeitige Messbarkeit verschiedener Größen	82
22	Orts- und Impulsoperatoren	84
23	Die Heisenbergschen Unschärferelationen für beliebige physikalische Größen	85
24	Drehimpulsoperator	87
25	Kinetische Energie	93
26	Gesamtenergie	94
V	Mathematische Ergänzung	111
27	Eigendifferenziale und die Normierung von Eigenfunktionen kontinuierlicher Spektren	111
28	Entwicklung nach Eigenfunktionen	119

VI	Die Schrödinger-Gleichung	121
	29 Herleitung der Schrödinger-Gleichung	121
	30 Die Erhaltung der Teilchenzahl in der Quantenmechanik	146
	31 Stationäre Zustände	148
	32 Eigenschaften der stationären Zustände	149
VII	Der harmonische Oszillator	157
	33 Der harmonische Oszillator in der Quantenmechanik	157
	34 Mathematische Ergänzung: Hypergeometrische Funktionen	159
	35 Die Lösung der Oszillatorgleichung	163
	36 Die Beschreibung des harmonischen Oszillators durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	174
	37 Eigenschaften von \hat{a} und \hat{a}^\dagger	175
	38 Bestimmung des Hamiltonoperators in \hat{a}^\dagger und \hat{a}	177
	39 Interpretation von \hat{a} und \hat{a}^\dagger	178
VIII	Der Übergang klassische Mechanik–Quantenmechanik	185
	40 Bewegung der Materie	185
	41 Ehrenfestsches Theorem	186
	42 Konstanten der Bewegung, Erhaltungssätze	187
	43 Die Quantisierung in krummlinigen Koordinaten	190
IX	Geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld	201
	44 Ankopplung des elektromagnetischen Feldes	201
X	Das Wasserstoffatom	219
	45 Die Wellenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom	219
	46 Die räumlichen Elektronendichten	226
	47 Das Spektrum des Wasserstoffatoms	229
	48 Ströme im Wasserstoffatom	240
	49 Das magnetische Moment	241
	50 Wasserstoffähnliche Atome	242
XI	Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik II	255
	51 Darstellungstheorie	255
	52 Darstellung von Operatoren	259
	53 Eigenwertproblem	268
	54 Unitäre Transformationen	270
	55 Die S-Matrix	272
	56 Die Schrödinger-Gleichung in Matrizenform	274
	57 Schrödinger-Bild	276
	58 Heisenberg-Bild	276
	59 Das Wechselwirkungsbild	278
XII	Störungsrechnung – Näherungsverfahren	279
	60 Stationäre Störungsrechnung	279
	61 Entartung	283
	62 Das Ritzsche Variationsprinzip	298
	63 Zeitabhängige Störungsrechnung	300
	64 Zeitunabhängige Störung	305

65	Übergänge zwischen Kontinuumszuständen	306
XIII	Der Spin	329
66	Der Stern-Gerlach-Versuch	330
67	Dubletttaufspaltung	330
68	Der Einstein-de Haas-Versuch	332
69	Die mathematische Beschreibung des Spins	334
70	Wellenfunktionen mit Spin	337
71	Die Pauli-Gleichung	340
XIV	Eine nichtrelativistische Wellengleichung mit Spin	353
72	Die Linearisierung der Schrödinger-Gleichung	353
73	Teilchen im äußeren Feld und das magnetische Moment	360
XV	Mehrkörperprobleme in der Quantenmechanik	365
74	Mehrkörperprobleme	365
75	Die Erhaltung des Gesamtimpulses eines Teilchensystems	368
76	Die Schwerpunktsbewegung eines Teilchensystems in der Quantenmechanik	370
77	Die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses	374
78	Schwingungen kleiner Amplitude in einem Vielteilchensystem	386
XVI	Identische Teilchen	403
79	Vertauschung von Teilchen und die Symmetrie der Wellenfunk- tion	403
80	Das Pauli-Prinzip	407
81	Austauschentartung	408
82	Die Slater-Determinante	410
XVII	Das formale Schema der Quantenmechanik	425
83	Zur mathematischen Vertiefung: Der Hilbert-Raum	425
84	Operatoren im Hilbert-Raum	427
85	Eigenwerte und Eigenvektoren	429
86	Operatoren mit kontinuierlichem bzw. diskret-kontinuierlichen (gemischten) Spektren	432
87	Funktionen von Operatoren	434
88	Unitäre Transformationen	436
89	Der direkte Produktraum	437
90	Die Axiome der Quantenmechanik	438
91	Freie Teilchen	441
92	Resümee der Störungstheorie	453
XVIII	Konzeptionelle und philosophische Probleme der Quantenme- chanik	457
93	Determinismus und Lokalität	457
94	Theorien verborgener Parameter	460
95	Das Bellsche Theorem	464
96	Theorien des Messprozesses	467
	Sachwortverzeichnis	479

Aufgaben und Beispiele

A 8.1	Zur Hohlraumstrahlung	14
B 10.1	Die Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes nach Planck	22
A 10.1	Strahlung eines schwarzen Körpers	25
A 10.2	Das Wiensche Verschiebungsgesetz	27
A 10.3	Emittierte Energien eines schwarzen Strahlers	28
B 10.2	Kosmische Schwarzkörperstrahlung (zur Vertiefung)	28
A 12.1	Beugungsbilder monochromatischer Röntgenstrahlung	40
A 12.2	Beugung von Elektronen und Neutronen	41
A 14.1	Erwartungswert der kinetischen Energie	52
B 15.1	Superposition ebener Wellen, Impulswahrscheinlichkeit	53
B 16.1	Ortsmessung am Spalt	58
B 16.2	Ortsmessung durch Einschluss im Kasten	59
B 16.3	Ortsmessung mit dem Mikroskop	60
B 16.4	Impulsmessung mit dem Beugungsgitter	60
B 16.5	Das Auflösungsvermögen eines Strichgitters	61
A 16.1	Eigenschaften eines Gaußschen Wellenpaketes	64
A 16.2	Normierung von Wellenfunktionen	66
A 16.3	Melone im Quantenland	67
A 16.4	Interferenz von Neutronenwellen	68
B 17.1	Hermitezität des Impulsoperators	72
B 18.1	Kommutator von Orts- und Impulsoperator	73
A 18.1	Rechenregeln für Kommutatoren	73
A 18.2	Eine Operator-Identität	74
B 20.1	Die Eigenfunktionen des Impulses	82
A 24.1	Der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten	91
A 26.1	Beweis einer Operatorenungleichung	94
A 26.2	Die Unschärferelation von Energie und Zeit	95
A 26.3	Entwicklung eines Operators	96
B 26.1	Legendre-Polynome	97
B 26.2	Die Kugelflächenfunktionen	104
B 26.3	Das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen	107
B 27.1	Normierung der Eigenfunktionen des Impulsoperators \hat{p}_x	114
B 27.2	Eine Darstellung der δ -Funktion	115
B 27.3	Cauchyscher Hauptwert	117
A 27.1	δ -Funktion als Grenzwert von Glockenkurven	118
A 29.1	Unendlich hoher Potenzialtopf	124

A 29.2	Teilchen im eindimensionalen Potenzialtopf	127
A 29.3	Das Delta-Potenzial	130
A 29.4	Verteilungsfunktionen in der Quantenstatistik	131
A 29.5	Fermigas	138
A 29.6	Ideales klassisches Gas	140
B 29.1	Ein Teilchen im Zweizentrenpotenzial	141
A 32.1	Stromdichte einer Kugelwelle	150
A 32.2	Teilchen im periodischen Potenzial	151
B 35.1	Mathematische Ergänzung: Über die Hermiteschen Polynome . . .	165
A 35.1	Rekursionsformeln für die Hermiteschen Polynome	167
A 39.1	Der dreidimensionale harmonische Oszillator	179
A 42.1	Vertauschungsrelationen	188
B 42.1	Der Virialsatz	189
B 43.1	Operator der kinetischen Energie in Kugelkoordinaten	195
A 43.1	Rückblick auf die Mechanik II (zur Wiederholung)	195
B 44.1	Die Hamiltonschen Gleichungen im elektromagnetischen Feld . .	205
A 44.1	Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens . . .	208
A 44.2	Geladenes Teilchen im konstanten Magnetfeld und Landau- Zustände	209
A 44.3	Unschärferelation für Landau-Zustände	215
B 47.1	Präzisionsmessungen der Rydberg-Konstanten	234
B 47.2	Rydberg-Atome	237
B 50.1	Der winkelabhängige Teil der Wasserstoffwellenfunktion	243
B 50.2	Spektrum eines zweiatomigen Moleküls	247
B 50.3	Die Jacobischen Koordinaten	251
B 51.1	Impulsverteilung des Wasserstoffgrundzustandes	258
B 52.1	Der Ortsoperator in Impulsdarstellung	263
B 52.2	Oszillator im Impulsraum	264
A 52.1	Wasserstoffatom im Impulsraum	266
B 61.1	Stark-Effekt	285
A 61.1	Vergleich Störungsrechnung – exakte Lösung	289
A 61.2	Niveaufkreuzungen	290
A 61.3	Harmonische Störung eines harmonischen Oszillators	293
A 61.4	Harmonischer Oszillator unter linearer Störung	294
A 61.5	Einfluss der endlichen Kernaushdehnung auf das niedrigste Energieniveau eines wasserstoffartigen Ions	296
B 62.1	Anwendung des Ritzschen Variationsprinzips: Harmonischer Oszillator	299
B 65.1	Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit – Fermis Goldene Regel . .	314
B 65.2	Elastische Streuung eines Elektrons an einem Atomkern	316
A 65.1	Grenzen des kleinen Impulsübertrags	323
A 65.2	Ein Beweis	324
A 65.3	Elementare Theorie der Dielektrizitätskonstanten	325
A 71.1	Präzession des Spins im homogenen Magnetfeld	344

B 71.1	Der Rabi-Versuch (Spinresonanz)	345
B 71.2	Der einfache Zeeman-Effekt	348
A 72.1	Vollständigkeit der Pauli-Matrizen	357
A 72.2	Eine Rechenregel für Pauli-Matrizen	358
A 72.3	Spinoren erfüllen die Schrödinger-Gleichung	360
B 77.1	Anomaler Zeeman-Effekt	382
A 77.1	Der Einfluss der Kernbewegung auf die Anregungsniveaus von Atomen	383
A 78.1	Der Einfluss eines äußeren Feldes auf die Bewegung ei- nes wechselwirkenden Zweiteilchensystems	392
A 78.2	Exakte Behandlung des Dreikörperproblems mit Oszillatorwech- selwirkung	396
B 82.1	Das Heliumatom	410
B 82.2	Das Wasserstoffmolekül	414
B 82.3	Die Van der Waals-Wechselwirkung	420
A 85.1	Darstellungsunabhängigkeit der Spur eines Operators	431
A 85.2	Ein Beweis zur Spur eines Operators	432
A 87.1	Zu den Operatorfunktionen	434
A 87.2	Potenzreihen- und Eigenwertmethode	435
A 91.1	Ortsoperator im Impulsraum	443
A 91.2	Propagator-Integral	447
B 91.1	Der eindimensionale Oszillator in verschiedenen Darstellungen . .	449

Historische Notizen

1	Philipp Lenard	2
2	Albert Einstein	3
3	Arthur Holly Compton	4
4	Petrus Josephus Wilhelmus Debye	4
5	Walther Ritz	6
6	James Franck	7
7	Gustav Hertz	8
8	Otto Stern	8
9	Walther Gerlach	9
10	John William Strutt Rayleigh	16
11	Sir James Hopwood Jeans	16
12	Max Planck	19
13	Wilhelm Wien	22
14	Louis-Victor Prinz von de Broglie	33
15	Clinton Joseph Davisson	38
16	Max von Laue	39
17	Max Born	43
18	David Hilbert	47
19	Werner Karl Heisenberg	56
20	Charles Hermite	72
21	Erhard Schmidt	81
22	Claus Hugo Hermann Weyl	81
23	Erwin Schrödinger	122
24	Heinrich Weber	158
25	Ernst Eduard Kummer	162
26	Paul Ehrenfest	187
27	Niels Hendrik David Bohr	225
28	Janne Robert Rydberg	229
29	Theodore Lyman	230
30	Johann Jakob Balmer	231
31	Friedrich Paschen	231
32	Frederick Sumner Brackett	231
33	Theodor Hänsch	237
34	Wladimir Alexandrowitsch Fock	244
35	Douglas Rayner Hartree	244
36	Johannes Stark	285