



Edition  
Harri   
Deutsch 

# Quantenmechanik

## Symmetrien

von

Walter Greiner  
Berndt Müller

**5., korrigierte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56382**

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner  
Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS)  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
D-60438 Frankfurt am Main

Prof. Dr. Berndt Müller  
Department of Physics  
Duke University  
Durham, NC 27708-0305, USA

5., korrigierte Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5639-9

ISBN 978-3-8085-5818-8 (E-Book)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2014 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

# Theoretische Physik

von Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner

Seit vielen Jahren zählen die Bände der Reihe *Theoretische Physik* zu den weltweit geschätzten und wegweisenden Lehrbüchern, mit denen Generationen von Studierenden ihre Physikausbildung erfolgreich gestaltet haben. Damit führt Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner die Tradition der klassischen Buchreihen von Sommerfeld, von Planck und von Landau und Lifschitz fort, einen zusammenhängenden Blick auf das große Wissenschaftsfeld der Physik zu geben. Englische, französische, japanische und chinesische Ausgaben untermauern die Bedeutung des Werkes *Theoretische Physik*.

Auf über 7 000 Seiten lehrt Walter Greiner, der Herausgeber und Hauptautor, Physik mit einem eigenständigen, didaktisch geschickten Konzept: Vermittlung der theoretischen Grundlagen und deren Anwendung anhand vieler ausführlicher Beispiele und Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen – insbesondere auch zu aktuellen Themen. Denn nichts ist für den Studierenden von größerer Bedeutung, als im Detail zu erleben, wie die theoretischen Konzepte und Werkzeuge auf konkrete Probleme angewandt werden, die für den arbeitenden Physiker von Interesse sind. Walter Greiner begleitet seine Ausführungen mit einer sorgfältigen Entwicklung der benötigten mathematischen Methoden. Biografisch und geschichtliche Notizen schlagen die Brücke zu den Wegbereitern der modernen Physik.

So entstand ein lebendiges Konzept von integrierten Lehr- und Übungsbüchern. Pragmatisch orientiert, aber ohne Abstriche an der theoretischen Grundlegung des Stoffes, gelingt es Walter Greiner, den Lernenden einen schnellen Zugang zum theoretisch-physikalischen Denken zu ebnet und sie für die physikalische Wissenschaft zu begeistern.

# Vorwort zur 5. Auflage

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen und so Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muss auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der Schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik, gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier die Symmetrien in der Quantenmechanik vor. Die Vorlesung ist so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir den Stoff so interessant wie möglich darzustellen. Dabei haben wir mit den Symmetrien in der Quantenmechanik ein besonders schönes Thema angesprochen.

Die getroffene Stoffauswahl ist unkonventionell, entspricht aber unserer Meinung nach der Bedeutung dieses Gebietes in der modernen Physik. Nach kurzer Vorstellung einiger Symmetrien in der klassischen Mechanik zeigen wir ihre Bedeutung

in der Quantenmechanik auf, besprechen ausführlich die Konsequenzen der Rotationssymmetrie und gelangen so zur allgemeinen Theorie der Lie-Gruppen. Die Isospingruppe, die Hyperladung, die  $SU(3)$ -Symmetrie und ihre Anwendung in der modernen Elementarteilchenphysik werden ausführlich besprochen.

Wichtige mathematische Sätze haben wir zunächst ohne Beweis zitiert und in ihrer Bedeutung heuristisch erläutert. Kapitel über die Permutationsgruppe, die Methode der Young-Tableaux und über Gruppencharaktere erläutern das Handwerkszeug für die Anwendung der Theorie der Symmetriegruppen. Mit der Behandlung von Charm und der  $SU(4)$ -Symmetrie gelangen wir zu einem immer noch sehr aktuellen Gebiet der Physik.

Eine größere mathematische Ergänzung über Wurzelvektoren und klassische Lie-Algebren vertieft das Gesagte, und je ein Kapitel über spezielle diskrete Symmetrien, dynamische Symmetrien, nicht-kompakte Lie-Gruppen und das wichtige Racah'sche Theorem runden die Vorlesung ab.

Dies alles sind Themen, die jüngere Physikerinnen und Physiker faszinieren, weil sie ihnen zeigen, dass man auch schon im 5. Semester ohne Niveauverlust an Fragen der Spitzenforschung herangeführt werden kann. Das in den letzten Jahren aktuell gewordene Thema der Supersymmetrie haben wir allerdings bewusst ausgelassen, um eine Überfrachtung zu vermeiden.

Die neue Auflage erscheint erstmals in der Edition Harri Deutsch des Verlags Europa-Lehrmittel.

Mai 2014  
Frankfurt am Main

Walter Greiner

# Die Mitarbeiter

An den bisherigen Auflage haben im Laufe der Jahre viele ehemalige Studierende, Doktoranden und Assistenten mitgearbeitet:

## **Verbesserter Nachdruck der 2. englischen Auflage (1994)**

Wir danken allen Kollegen und Studenten für ihre hilfreichen Kommentare, vor allem Prof. Dr. P. O. Hess (Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Mexico City) und Dr. U. Eichmann, der bei der Verbesserung mehrerer Übungen und Beispiele mitgeholfen und den Nachdruck vorbereitet hat.

## **2. englische Auflage (1994)**

Zahlreichen Kollegen und Lesern schulden wir Dank für ihre hilfreichen Kommentare, allen voran Herrn Prof. L. Wilets (Seattle), der uns eine ausführliche Liste von inhaltlichen Unzulänglichkeiten und Druckfehlern zur Verfügung gestellt hat. Zu großem Dank verpflichtete sind wir auch gegenüber Prof. P. O. Hess (Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Mexico City) für seine Korrekturen und wertvolles, ergänzendes Material zu Kapitel 12. Wir danken schließlich Herrn Dr. R. Mattiello, der die Vorbereitung der zweiten englischen Auflage überwacht hat.

## **1. englische Auflage (1989)**

Für die erste englische Auflage bedanken wir uns bei M. Berenguer, S. Butorac, C. Derreth, Dr. K. Geiger<sup>2</sup>, Dr. M. Grabiak, C. Greiner, C. Hartnack, Dr. R. Herrmann, R. Mattiello, D. Neubauer, J. Rau, W. Renner, D. Rischke, T. Schönfeld und Dr. S. Schramm für ihre Mitarbeit. Frau A. Steidl besorgte die Abbildungen. Allen sind wir zu aufrichtigem Dank verpflichtet. Wir danken ferner Herrn Dr. K. Langanke und Herrn R. Könning vom Fachbereich Physik der Universität Münster für ihre wertvollen Kommentare zur deutschen Auflage. Wir möchten insbesondere Herrn Dipl.-Phys. B. Waldhauser für seine vielfältige Hilfe danken. Seine organisatorischen Talente und seine Ratschläge in technischen Fragen haben wir sehr geschätzt.

## **4. Auflage (2004)**

Besonderen Dank schulden wir Frau Astrid Steidl für die Erfassung der Abbildungen in elektronischer Form sowie den Herren Dr. Rainer Kissener und Dr. Stefan Scherer für ihre sorgfältige Unterstützung bei der Erstellung der deutschen Neuaufgabe, der Aktualisierung des Textes und der Überwachung der Drucklegung.

### **3. Aufl ge (1989)**

Diesmal bedanken wir uns besonders bei Frau A. Steidl für die Gestaltung der Zeichnungen, bei Herrn Dipl.-Phys. T. Schönfeld für die Edition und bei den Herren Dr. R. Herrmann, Dr. V. Schneider, Dr. S. Schramm, den Herren Dipl.-Phys. K. Geiger<sup>2</sup>, C. Greiner, R. Heuer, L. Neise und bei den Herren K. Griepenkerl, M. Hafner, U. Katscher und K. Lutz für ihre Hilfe bei der Drucklegung sowie bei den Herren Dipl.-Phys. D. Rischke und T. Schönfeld für die Ausarbeitung einiger Übungsaufgaben. Unser besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. R. Maaß für die Ausarbeitung des Kapitels über Lie-Algebren nichtkompakter Lie-Gruppen.

### **2. Aufl ge (1985)**

Unser besonderer Dank gilt auch diesmal Frau B. Utschig, vor allem für das Anfertigen der zahlreichen Illustrationen. Weiterhin möchten wir uns bei den Studenten J. Fink, S. Graf, C. Greiner, C. Ionescu, L. Neise, A. Rosenhauer, C. Scheich, S. Schramm, C. Schweitzer und B. Waldhauser sowie bei Frau Ellen Pfiste für ihre unermüdliche Hilfe bei der Erstellung des Manuskripts bedanken. Unser Dank gilt ferner Herrn Dr. P. O. Hess für die Ausarbeitung des Kapitels über Gruppencharaktere, sowie Herrn Dr. U. Müller für die Betreuung der Drucklegung.

### **1. Aufl ge (1979)**

Wir bedanken uns bei Frau R. Lasarzig und Frau B. Utschig für ihre große Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts. Vor allem sei aber unseren Mitarbeitern Dr. H. Stock, Dr. J. Hofmann und Dr. P. O. Hess für ihre tatkräftige Unterstützung bei der Ausarbeitung der Vorlesung gedankt. Sie haben durch ihre Anregungen wesentlich zum Gelingen beigetragen.

---

<sup>2</sup> Wir gedenken besonders Herrn Dr. Klaus Kinder-Geiger, der am 2. September 1998 beim Absturz von Flug Swiss Air 111 vor Long Island ums Leben gekommen ist.





# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Symmetrien in der Quantenmechanik</b> . . . . .	1
1	Symmetrien in der klassischen Physik . . . . .	1
2	Raumverschiebungen in der Quantenmechanik . . . . .	17
3	Der unitäre Verschiebungsoperator . . . . .	18
4	Die Bewegungsgleichung für räumlich verschobene Zustände . . . . .	20
5	Symmetrie und Entartung von Zuständen . . . . .	22
6	Zeitverschiebungen in der Quantenmechanik . . . . .	29
7	Definition einer Gruppe . . . . .	32
8	Rotationen und ihre Gruppeneigenschaften . . . . .	34
9	Ein Isomorphismus der Rotationsgruppe . . . . .	37
10	Infinitesimal und endliche Drehungen . . . . .	39
11	Die Isotropie des Raumes . . . . .	41
12	Der Drehoperator für Vielteilchenzustände . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Drehimpulsalgebra und Darstellung der Drehimpulsoperatoren</b> . . . . .	53
13	Irreduzible Darstellungen der Rotationsgruppe . . . . .	53
14	Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren . . . . .	58
15	Die Addition von zwei Drehimpulsen . . . . .	66
16	Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffiziente . . . . .	70
17	Rekursionsformeln für Clebsch-Gordan-Koeffiziente . . . . .	71
18	Explizite Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffiziente . . . . .	72
<b>III</b>	<b>Mathematische Ergänzung: Elementares über Lie-Gruppen</b> . . . . .	81
19	Allgemeine Struktur von Lie-Gruppen . . . . .	81
20	Kommutatoren als verallgemeinerte Vektorprodukte . . . . .	91
21	Algebraische Begriffe . . . . .	93
22	Kompakte Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	100
23	Invariante Operatoren (Casimir-Operatoren) . . . . .	100
24	Racah'sches Theorem . . . . .	101
25	Erläuterungen zu Multipletts . . . . .	101
26	Invarianz unter einer Symmetriegruppe . . . . .	104
27	Konstruktion des invarianten Operators . . . . .	107
28	Casimir-Operatoren Abel'scher Lie-Gruppen . . . . .	109
29	Vollständigkeitsrelation für Casimir-Operatoren . . . . .	110
30	Zusammenstellung einiger Gruppen und ihrer Eigenschaften . . . . .	111
31	Koordinatentransformationen und Funktionstransformationen . . . . .	112

<b>IV</b>	<b>Symmetriegruppen und ihre physikalische Bedeutung</b> . . . . .	125
32	Symmetrien des Hamilton-Operators . . . . .	125
33	Multipllett-Struktur der Zustände . . . . .	127
34	Massenentartung innerhalb von Multipletts . . . . .	129
<b>V</b>	<b>Die Isospingruppe (Isobarensin)</b> . . . . .	131
35	Isospin als Eigenschaft der Nukleonen . . . . .	131
36	Isospin-Operatoren für ein Vielnukeonensystem . . . . .	137
37	Darstellungen einer Lie-Algebra – Allgemeines . . . . .	144
38	Reguläre (oder adjungierte) Darstellung einer Lie-Algebra . . . . .	145
39	Transformationsgesetz für Isospin-Vektoren . . . . .	149
40	Experimenteller Test der Isospin-Invarianz . . . . .	157
<b>VI</b>	<b>Die Hyperladung</b> . . . . .	173
41	Vom Isospin zur Hyperladung . . . . .	173
42	Isospin und Hyperladung von Antiteilchen . . . . .	179
<b>VII</b>	<b>Die SU(3)-Symmetrie</b> . . . . .	181
43	Die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ . . . . .	181
44	Die Generatoren der SU(3)-Gruppe . . . . .	185
45	Die Lie-Algebra der SU(3)-Gruppe . . . . .	187
46	Unteralgebren der SU(3) und Schiebeoperatoren . . . . .	196
47	Kopplung von $T$ -, $U$ - und $V$ -Multipletts . . . . .	198
48	Quantitative Abrundung unserer Schlussfolgerungen . . . . .	200
49	Geometrische Gestalt eines SU(3)-Multipletts . . . . .	202
50	Anzahl der Zustände auf Gitterpunkten innerer Schalen . . . . .	203
<b>VIII</b>	<b>Quarks und die Gruppe SU(3)</b> . . . . .	215
51	Quarks als kleinste nichttriviale Darstellung der SU(3) . . . . .	215
52	Suche nach Quarks . . . . .	218
53	Die Transformationseigenschaften der Quark-Zustände . . . . .	219
54	Konstruktion von SU(3)-Multipletts aus elementaren Darstellungen . . . . .	225
55	Aufbau der Darstellungen $D(p, q)$ aus Quarks und Antiquarks . . . . .	227
56	Mesonen-Multipletts . . . . .	231
57	Regeln für die Reduktion direkter Produkte von SU(3)-Multipletts . . . . .	243
58	$U$ -Spin-Invarianz . . . . .	247
59	Test der $U$ -Spin-Invarianz . . . . .	250
60	Die Gell-Mann-Okubo-Massenformel . . . . .	251
61	Die Clebsch-Gordan-Koeffiziente der SU(3) . . . . .	254
62	Quarkmodelle mit inneren Freiheitsgraden . . . . .	257
63	Die Massenformel in der SU(6) . . . . .	285
64	Magnetische Momente im Quarkmodell . . . . .	286
65	Angeregte mesonische und baryonische Zustände . . . . .	288
<b>IX</b>	<b>Darstellungen der Permutationsgruppe und Young-Tableaux</b> . . . . .	295
66	Die Permutationsgruppe und identische Teilchen . . . . .	295
67	Die Standard-Anordnung der Young-Tableaux . . . . .	299

68	Irreduzible Darstellungen der Permutationsgruppe $S_N$ . . . . .	302
69	Der Zusammenhang zwischen $SU(2)$ und $S_2$ . . . . .	311
70	Die irreduziblen Darstellungen der $SU(n)$ . . . . .	314
71	Bestimmung der Dimension . . . . .	320
72	Die $SU(n - 1)$ -Untergruppen von $SU(n)$ . . . . .	324
73	Zerlegung des Tensorproduktes zweier Multipletts . . . . .	326
<b>X</b>	<b>Mathematische Ergänzung: Gruppencharaktere</b> . . . . .	<b>331</b>
74	Definitio von Gruppencharakteren . . . . .	331
75	Die Schur'schen Lemmata . . . . .	332
76	Orthogonalitätsrelationen für Darstellungen diskreter Gruppen . . . . .	333
77	Äquivalenzklassen . . . . .	335
78	Orthogonalitätsrelationen der Gruppencharaktere . . . . .	337
79	Gruppencharaktere am Beispiel der Gruppe $D(3)$ . . . . .	338
80	Reduktion einer Darstellung . . . . .	339
81	Kriterium für Irreduzibilität . . . . .	340
82	Direktes Produkt von Darstellungen . . . . .	341
83	Erweiterung auf kontinuierliche kompakte Gruppen . . . . .	341
84	Mathematischer Exkurs: Gruppenintegration . . . . .	342
85	Unitäre Gruppen . . . . .	344
86	Der Übergang von $U(N)$ nach $SU(N)$ am Beispiel der $SU(3)$ . . . . .	345
87	Integration über unitäre Gruppen . . . . .	347
88	Gruppencharaktere der unitären Gruppen . . . . .	350
<b>XI</b>	<b>Charm und <math>SU(4)</math></b> . . . . .	<b>369</b>
89	Die Entdeckung des Charm-Quarks . . . . .	369
90	Teilchen mit Charm und die $SU(4)$ . . . . .	371
91	Die Gruppeneigenschaften der $SU(4)$ . . . . .	372
92	Strukturkonstanten $f_{ijk}$ und Koeffiziente $d_{ijk}$ für $SU(4)$ . . . . .	379
93	Multiplettstruktur der $SU(4)$ . . . . .	381
94	Zerfall der Mesonen mit verborgenem Charm . . . . .	390
95	Zerfall von Mesonen mit offenem Charm . . . . .	391
96	Baryonen-Multipletts . . . . .	392
97	Das Potentialmodell des Charmoniums . . . . .	401
98	Die $SU(4)$ [ $SU(8)$ ]-Massenformel . . . . .	409
99	Die $\Upsilon$ -Resonanzen . . . . .	412
100	Das Quark-Modell und das Top-Quark . . . . .	414
<b>XII</b>	<b>Mathematische Ergänzungen</b> . . . . .	<b>419</b>
101	Einführung . . . . .	419
102	Wurzelvektoren und klassische Lie-Algebren . . . . .	423
103	Skalarprodukte von Eigenwerten . . . . .	427
104	Cartan-Weyl-Normierung . . . . .	430
105	Graphische Darstellung der Wurzelvektoren . . . . .	431
106	Lie-Algebra vom Rang 1 . . . . .	432
107	Lie-Algebren vom Rang 2 . . . . .	432
108	Lie-Algebren vom Rang $l > 2$ . . . . .	434

109	Die besonderen Lie-Algebren . . . . .	435
110	Einfache Wurzeln und Dynkin-Diagramme . . . . .	435
111	Die Dynkin'sche Vorschrift . . . . .	437
112	Die Cartan'sche Matrix . . . . .	439
113	Bestimmung aller Wurzeln aus den einfachen Wurzeln . . . . .	440
114	Zwei einfache Lie-Algebren . . . . .	441
115	Die Darstellungen der klassischen Lie-Algebren . . . . .	443
<b>XIII</b>	<b>Spezielle diskrete Symmetrien . . . . .</b>	<b>449</b>
116	Raumspiegelung (Paritätstransformation) . . . . .	449
117	Gespiegelte Zustände und Operatoren . . . . .	451
118	Zeitumkehr . . . . .	452
119	Antiunitäre Operatoren . . . . .	454
120	Mehrteilchensysteme . . . . .	458
121	Reelle Eigenfunktionen . . . . .	459
<b>XIV</b>	<b>Dynamische Symmetrien . . . . .</b>	<b>461</b>
122	Das Wasserstoffatom . . . . .	461
123	Die Gruppe $SO(4)$ . . . . .	464
124	Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms . . . . .	465
125	Der klassische isotrope Oszillator . . . . .	466
126	Der quantenmechanische isotrope Oszillator . . . . .	467
<b>XV</b>	<b>Mathematische Ergänzung: Nichtkompakte Lie-Gruppen . . . . .</b>	<b>481</b>
127	Definition und Beispiele nichtkompakter Lie-Gruppen . . . . .	481
128	Die Lie-Gruppe $SO(2,1)$ . . . . .	488
129	Anwendung auf Streuprobleme . . . . .	492
<b>XVI</b>	<b>Beweis des Racah'schen Theorems . . . . .</b>	<b>495</b>
130	Racah'sches Theorem . . . . .	495
	<b>Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>503</b>

# Aufgaben und Beispiele

A 1.1	Drehimpulse in unterschiedlichen Bezugssystemen . . . . .	5
A 1.2	Erhaltungsgrößen bestimmter Felder . . . . .	6
B 1.1	Das Noether'sche Theorem (zur Vertiefung) . . . . .	8
A 1.3	Zeit-invariante Bewegungsgleichungen: Lagrange-Funktion und Erhaltungsgrößen . . . . .	11
A 1.4	Bedingungen für Translations-, Rotations- und Galilei-Invarianz . . . . .	11
A 1.5	Erhaltungssätze in homogenen elektromagnetischen Feldern . . . . .	14
B 5.1	Matrizelemente räumlich verschobener Zustände . . . . .	23
A 5.1	Die Relation $(i\hbar)^n \hat{B}(\mathbf{x})$ und Transformationsoperatoren . . . . .	23
A 5.2	Translation eines Operators $\hat{A}(\mathbf{x})$ . . . . .	26
A 5.3	Generatoren für Translationen in einem homogenen Feld . . . . .	26
B 11.1	Transformation von Vektorfeldern unter Rotationen . . . . .	42
B 11.2	Die Transformation von Zweier-Spinoren unter Rotationen . . . . .	46
A 11.1	Messung der Richtung von Elektronenspins . . . . .	49
A 14.1	Spezielle Darstellung der Spin-1-Operatoren . . . . .	60
B 18.1	Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffiziente für Spin-Bahn-Kopplung . . . . .	76
B 19.1	Lie-Algebra der Gruppe $SO(3)$ . . . . .	84
A 19.1	Rechnung mit komplexen $n \times n$ -Matrizen . . . . .	85
A 19.2	Beweis einer Kommutationsrelation . . . . .	86
A 19.3	Generatoren und Strukturkonstanten von eigentlichen Lorentz-Transformationen . . . . .	88
B 20.1	Algebra von $\hat{P}$ und $\hat{A}$ . . . . .	92
B 21.1	Translations-Rotations-Gruppe . . . . .	93
B 21.2	Einfache und halbeinfache Lie-Gruppen . . . . .	95
A 21.1	Reduktion von $\exp\{-\frac{1}{2}i\phi\vec{n} \cdot \hat{\sigma}\}$ . . . . .	96
B 21.3	Cartan'sches Kriterium für Halbeinfachheit . . . . .	97
B 21.4	Halbeinfachheit von $SO(3)$ . . . . .	99
B 25.1	Ein invarianter Unterraum der Rotationsgruppe . . . . .	102
B 25.2	Reduktion eines invarianten Unterraumes . . . . .	102
B 26.1	Casimir-Operator der Rotationsgruppe . . . . .	105
B 26.2	Einige Gruppen mit Rang 1 oder 2 . . . . .	106
B 29.1	Konstruktion des Hamilton-Operators aus den Casimir-Operatoren . . . . .	111
A 31.1	Transformationen mit $r$ Parametern in einem $n$ -dimensionalen Raum . . . . .	114
A 31.2	Generatoren und infinitesimal Operatoren von $SO(n)$ . . . . .	115

A 31.3	Matrixdarstellung für die Lie-Algebra mit Spin 1 . . . . .	116
A 31.4	Translationen im eindimensionalen Raum; die Euklidische Gruppe $E(3)$ in drei Dimensionen . . . . .	120
A 31.5	Homomorphismus und Isomorphismus von Gruppen und Algebren	122
A 31.6	Transformationen der Strukturkonstanten . . . . .	123
B 32.1	Erhaltungsgesetze bei Rotationssymmetrie und bei ladungsunabhängigen Kräften . . . . .	126
B 33.1	Energie-Entartung für verschiedene Symmetrien . . . . .	129
B 34.1	Entartung und Parität weiterer Symmetrien . . . . .	130
A 35.1	Additionsgesetz für infinitesimal $SU(2)$ -Transformationen . . . . .	135
B 36.1	Das Deuteron . . . . .	138
A 36.1	Die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte . . . . .	141
B 36.2	Das Pionen-Triplett . . . . .	142
A 38.1	Normierung der Gruppengeneratoren . . . . .	147
B 39.1	Die $G$ -Parität . . . . .	152
A 39.1	Darstellung einer Lie-Algebra, reguläre Darstellung der Algebra der Bahndrehimpulsoperatoren . . . . .	155
B 40.1	Das Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	159
B 40.2	Pionen-Produktion in der Proton-Deuteron-Streuung . . . . .	162
B 40.3	Produktion neutraler Pionen in der Deuteron-Deuteron-Streuung .	163
B 40.4	Pion-Nukleon-Streuung . . . . .	163
B 40.5	Zerfall des neutralen Rho-Mesons . . . . .	170
A 41.1	Hyperladung von Atomkernen . . . . .	174
B 41.1	Die Hyperladung der $\Delta$ -Resonanzen . . . . .	175
B 41.2	Die Baryonen . . . . .	175
A 41.2	Isospin und Hyperladung von Baryonen-Resonanzen . . . . .	176
B 42.1	Antibaryonen . . . . .	179
B 43.1	Die Lie-Algebra der $SU(2)$ -Gruppe . . . . .	184
A 44.1	Lineare Unabhängigkeit der Generatoren $\hat{A}_i$ . . . . .	186
A 45.1	Symmetrie der Koeffiziente $d_{ijk}$ . . . . .	189
A 45.2	Antisymmetrie der Strukturkonstanten $f_{ijk}$ . . . . .	190
A 45.3	Berechnung einiger $d_{ijk}$ -Koeffiziente und Strukturkonstanten . .	191
A 45.4	Relationen zwischen den Strukturkonstanten und den Koeffiziente $d_{ijk}$ . . . . .	193
A 45.5	Casimir-Operatoren der $SU(3)$ -Gruppe . . . . .	194
A 45.6	Nützliche Relationen für $SU(3)$ -Casimir-Operatoren . . . . .	195
B 50.1	Zunahme der Multiplizität von Zuständen auf den inneren Schalen von $SU(3)$ -Multipletts . . . . .	206
A 50.1	Teilchenzustände im Zentrum des Baryonen-Oktetts . . . . .	210
A 50.2	Bestimmung der Dimension der Darstellung $D(p, q)$ . . . . .	210
A 50.3	Der Casimir-Operator $\hat{C}_A = \sum_i \hat{H}_i^2$ als Funktion von $p$ und $q$ . . . . .	212
A 53.1	Die Generatoren der $SU(3)$ in der Darstellung [3] . . . . .	220
A 53.2	Transformationseigenschaften der Zustände des Antitripletts $[\bar{3}]$ .	223

A 53.3	Nicht-Äquivalenz der beiden fundamentalen Darstellungen von $SU(3)$ . . . . .	224
B 55.1	Das Gewicht eines Zustandes . . . . .	227
B 55.2	Das höchste Gewicht des Quark-Tripletts $[3]$ und des Antiquark-Tripletts $[\bar{3}]$ . . . . .	228
B 56.1	Die pseudoskalaren Mesonen . . . . .	232
B 56.2	Beispiel zur Vertiefung: Die $K^0$ - und $\bar{K}^0$ Mesonen und ihre Zerfälle	233
B 56.3	Die skalaren Mesonen . . . . .	240
B 56.4	Die Vektormesonen . . . . .	241
B 56.5	Die Tensormesonen . . . . .	242
B 56.6	Andere Resonanzen . . . . .	242
A 57.1	Reduktion von $SU(2)$ -Multipletts . . . . .	246
A 62.1	Konstruktion der Neutronen-Wellenfunktion aus der des Protons .	265
A 62.2	Konstruktion der Wellenfunktionen des Baryonen-Dekupletts . . .	268
A 62.3	Konstruktion der Spin-Flavour-Wellenfunktionen des Baryonen-Oktetts . . . . .	277
A 68.1	Basisfunktionen von $S_3$ . . . . .	304
A 68.2	Irreduzible Darstellungen der $S_4$ . . . . .	306
A 69.1	Multipletts eines Systems aus drei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen . . . . .	312
A 70.1	Multipletts eines Zweiteilchensystems in der Gruppe $SU(3)$ . . . .	315
A 70.2	Multipletts der $SU(3)$ , aufgebaut aus drei Teilchen . . . . .	317
A 71.1	Dimensionsformel für die $SU(3)$ . . . . .	323
A 73.1	Zerlegung eines Tensorproduktes . . . . .	328
B 73.1	Darstellungen der $SU(2)$ und Spin . . . . .	329
B 73.2	Trialität und Quark-Confinemen . . . . .	329
B 77.1	Die Gruppe $D_3$ . . . . .	335
B 77.2	Die Rotationsgruppe $O(3)$ . . . . .	336
B 88.1	Anwendung der Gruppencharaktere: Zustandssumme für das Quark-Gluon-Plasma mit exakter $SU(3)$ -Symmetrie . . . . .	357
B 88.2	Beweis der Rekursionsformel für die Dimensionen der $SU(n)$ -Darstellungen . . . . .	361
A 91.1	Antikommutatoren der Generatoren der $SU(N)$ . . . . .	373
A 91.2	Die Spur eines Generatorproduktes in der $SU(N)$ . . . . .	375
A 91.3	Die Vollständigkeitsrelation der $\hat{A}_a$ -Matrizen . . . . .	376
A 91.4	Der Eigenwert des Casimir-Operators $\hat{C}_1$ einer fundamentalen Darstellung der $SU(N)$ . . . . .	379
A 93.1	$SU(3)$ -Inhalt des $SU(4)$ -Mesonen-Multipletts . . . . .	389
A 96.1	Zerlegung des Produktes $[4] \otimes [4] \otimes [4]$ . . . . .	396
A 96.2	$SU(3)$ -Inhalt der $SU(4)$ -Baryonen-Multipletts . . . . .	397
B 96.1	Zerlegung und Dimension höherer $SU(4)$ -Multipletts . . . . .	399
B 97.1	Mathematische Ergänzung. Airy-Funktionen . . . . .	406
B 101.1	Gewichtoperatoren der $SU(4)$ -Algebra . . . . .	422
A 102.1	Beweis einer Beziehung für die Strukturkonstanten $C_{ikl}$ . . . . .	427
B 111.1	Dynkin-Diagramme für $B_l$ . . . . .	439

B 112.1	Die Cartan-Matrizen für SU(3), SU(4) und $G_2$ . . . . .	439
B 113.1	Bestimmung der Wurzeln von $G_2$ aus den zugehörigen einfachen Wurzeln . . . . .	441
B 115.1	Analyse der SU(3) . . . . .	445
A 119.1	Wirkung eines antiunitären Operators auf Matrixelemente von Wellenfunktionen . . . . .	454
A 119.2	Kommutationsrelationen zwischen $\hat{U}$ und $\hat{S}$ . . . . .	456
A 126.1	Energie und Drehimpuls des Wasserstoffatoms . . . . .	468
A 126.2	Der Runge-Lenz-Vektor . . . . .	469
A 126.3	Eigenschaften des Runge-Lenz-Vektors $\hat{M}$ . . . . .	470
A 126.4	Der Kommutator zwischen $\hat{M}$ und $\hat{H}$ . . . . .	470
A 126.5	Das Skalarprodukt $\hat{L} \cdot \hat{M}$ . . . . .	472
A 126.6	Bestimmung von $\hat{M}^2$ . . . . .	474
A 126.7	Beweis der Kommutationsrelation für $[\hat{M}_i, \hat{E}_j]$ . . . . .	475
A 126.8	Beweis der Kommutationsrelation für $[\hat{M}_i, \hat{M}_j]$ . . . . .	477
A 127.1	Darstellung von SU(2)-Matrizen . . . . .	482
A 127.2	Darstellung von SU(1,1)-Matrizen . . . . .	483
A 127.3	Nicht-Kompaktheit der Lorentz-Gruppe . . . . .	485
A 127.4	Generatoren der $SO(p, q)$ . . . . .	486
A 128.1	Casimir-Operator der $SO(2, 1)$ . . . . .	489
A 129.1	Koordinatendarstellung der $SO(2, 1)$ -Operatoren . . . . .	492
B 130.1	Der Eigenwert des Casimir-Operators zweiter Ordnung der SU(3) . . . . .	500



# Historische Notizen

1	Emmy Noether	8
2	Sophus Lie	37
3	Rudolf Friedrich Alfred Clebsch	67
4	Elie Cartan	97
5	Hendrik Brught Gerhard Casimir	101
6	Giulio Racah	101
7	Isai Schur	128
8	Eugene Paul Wigner	159
9	Carl Henry Eckart	159
10	Murray Gell-Mann	174
11	Kazuhiko Nishijima	174

# Tabellenverzeichnis

T 18.1	Struktur der Clebsch-Gordan-Matrix . . . . .	73
T 30.1	Gruppen, Generatoren und invariante Operatoren . . . . .	112
T 35.1	Eigenschaften von Proton und Neutron . . . . .	131
T 36.1	Eigenschaften der Pionen . . . . .	142
T 40.1	Clebsch-Gordan-Koeffiziente für die Kopplungen $1 \oplus \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$ . . . . .	158
T 40.2	Eigenschaften der Vektormesonen . . . . .	171
T 41.1	Eigenschaften der Oktett-Baryonen . . . . .	176
T 41.2	Eigenschaften der Baryonen-Resonanzen . . . . .	177
T 41.3	Isospin und Hyperladung der Baryonen-Resonanzen . . . . .	178
T 45.1	Strukturkonstanten und symmetrischen Koeffiziente von SU(3) . . . . .	188
T 56.1	Eigenschaften der pseudoskalaren Mesonen . . . . .	233
T 56.2	Eigenschaften der skalaren Mesonen . . . . .	240
T 56.3	Eigenschaften der Vektormesonen . . . . .	241
T 56.4	Eigenschaften der Tensormesonen . . . . .	242
T 56.5	Eigenschaften der Vektormesonen mit Charm . . . . .	243
T 60.1	Quantenzahlen der negativ geladenen Hadronen-Resonanzen . . . . .	253
T 61.1	Quantenzahlen der Quark- und Antiquark-Zustände . . . . .	255
T 61.2	Quark-Inhalt der pseudoskalaren Mesonen . . . . .	256
T 63.1	Gürsey-Radicati-Massenformel . . . . .	285
T 64.1	Magnetische Momente einiger Baryonen . . . . .	288
T 65.1	Zerlegung von SU(6)-Multipletts für $qqq\bar{A}$ . . . . .	289
T 65.2	Zerlegung von SU(6)-Multipletts für $qqqq\bar{A}$ . . . . .	290
T 65.3	Mesonen-Multipletts mit Drehimpuls. . . . .	292
T 70.1	Gewichte der Triplettzustände . . . . .	315
T 70.2	Gewichte der symmetrischen Sextettzustände . . . . .	316
T 70.3	Gewichte der antisymmetrischen Zustände des Zweiteilchen-Tripletts . . . . .	316
T 70.4	Gewichte der Dreiteilchen-Oktett-Zustände . . . . .	317
T 77.1	Multiplikationstabelle der Symmetriegruppe $D_3$ . . . . .	336
T 79.1	Irreduziblen Darstellungen der Gruppenelemente von $D_3$ . . . . .	339
T 79.2	Charaktertabelle der Gruppe $D_3$ . . . . .	339
T 89.1	Eigenschaften der Vektormesonen mit Charm . . . . .	370
T 92.1	Von null verschiedene Strukturkonstanten der SU(4) . . . . .	380
T 92.2	Von null verschiedene Strukturkoeffiziente der SU(4) . . . . .	381
T 93.1	Quantenzahlen des Quark-Quartetts . . . . .	382
T 93.2	Zerlegung von Produkten $[X] \otimes [A]$ der SU(4) . . . . .	384

---

T 93.3	Quantenzahlen von pseudoskalaren Mesonen und Vektormesonen	387
T 96.1	Quantenzahlen der Baryonen	394
T 97.1	Charmonium-Massen im Potentialmodell	403
T 97.2	Experimentell beobachtetes Charmonium-Spektrum	404
T 97.3	Mesonen mit offenem Charm	405
T 98.1	Baryonmassen für die SU(4)-Massenformel	410
T 98.2	SU(4)-Massenformel für Baryonen und Experiment	411
T 98.3	Massen von Vektormesonen für die SU(4)-Massenformel	411
T 98.4	SU(4)-Massenformel für Vektormesonen und Experiment	412
T 111.1	Dynkin-Diagramme der einfachen Lie-Algebren	438

