



Edition  
Harri   
Deutsch 

# Quantentheorie

## Spezielle Kapitel

von  
Walter Greiner

**3., überarbeitete Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56405**

Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Walter Greiner  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main

3., überarbeitete Auflage 1993  
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5640-5

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 1993, 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,  
42781 Haan-Gruiten  
[www.europa-lehrmittel.de](http://www.europa-lehrmittel.de)

Satz: André Paulus  
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald  
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

# Vorwort zur 1. und 2. Auflage

Die theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweißen; Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß natürlich auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die theoretische Physik in das erste Studiensemester verlegt. Darum werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungs- und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Eichtheorien, Theorie der Elementarteilchen usw.. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über die Theoretische Kernphysik bzw. die Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier mit den "Speziellen Kapiteln der Quantentheorie" eine besonders wichtige Ergänzungsvorlesung vor. Sie ist für das 5. Semester gedacht und so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir, den Stoff so interessant wie möglich darzustellen.

Wir bedienen uns fast ausschließlich des Formalismus der zweiten Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Moden), den wir ausgiebig erläutern und auch in seinem Zusammenhang mit der elementaren Quantenmechanik diskutieren. Die Vorlesung beginnt mit der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. Wir besprechen sowohl die Zustandsvektoren mit scharfer Photonenzahl, als auch die in der modernen Physik wichtigen kohärenten Zustände (Glauber-Vektoren). Die Emissions- und Absorptionsprozesse der Strahlung, die Bestimmung der Lebensdauer von angeregten Zuständen und der Linienbreite von Spektrallinien, das Selbstenergieproblem, die Photonenstreuung und die Theorie der Tscherenkow-Strahlung, zusammen mit vielen zur Vertiefung beitragenden Aufgaben (z.B. Zweiphotonenzerfall, Comptoneffekt, Photonen-Spektrum des schwarzen Körpers usw.) schmücken die ersten beiden Kapitel aus.

Das dritte Kapitel ist speziell der systematischen Diskussion der zweiten Quantisierung gewidmet. Dabei werden Fermi- und Bosestatistiken, das Spin-Statistik-Theorem und auch die Möglichkeit von Parastatistiken vorgestellt und ihr Zusammenhang mit der Art der Quantisierung (Antikommutatoren, Kommutatoren, Dreifachkommutatoren) aufgezeigt. Die Behandlung von Quantenfeldern mit Wechselwirkung wird allgemein vorgeführt und speziell auf die Probleme der Bremsstrahlung, der Rutherford-Streuung mit höheren Korrekturen und der Berechnung der Lebensdauer des  $2s$ -Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonenzerfall angewandt.

Die Unendlichkeiten der Quantenelektrodynamik sind das Thema des 5. Kapitels. Hierbei haben wir dem Casimireffekt, der Renormierung der Elektronenmasse und der Berechnung des Lambshift besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

In den beiden letzten Kapiteln werden die Methoden der Quantenfeldtheorie auf Fragestellungen aus dem Bereich der Festkörper- und Plasmaphysik angewandt: Quantengase, Superfluidität, Plasmonen und Photonen sind einige der diskutierten Phänomene.

Wir haben bei der Stoffauswahl bewußt moderne Themen aus verschiedenen Gebieten der Physik aufgegriffen (Glauber-Zustände, Zweiphotonenzerfall, Tscherenkow-Strahlung, Bremsstrahlung, Parastistik, Casimir-Effekt, Maxwell'scher Dämon, Superfluidität usw.). Damit soll jungen Physikern die vielfältige Anwendung der feldtheoretischen Methoden vor Augen geführt werden, ihre Begeisterung geweckt und gefördert und sie schließlich frühzeitig ohne Niveauverlust an moderne Forschungsgebiete herangeführt werden.

Wir bedanken uns bei den Damen A. Tüpker, B. Utschig, M. Knolle, E. Pfis-

ter, I. Heinz und G. Roth für ihre große Hilfe bei der technischen Anfertigung des Manuskriptes. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer wieder notwendigen Änderungen waren bewundernswert.

Den Herren Dr. Jürgen Hoffmann und cand. phys. Horst Schaaser gilt unser besonderer Dank für ihre außerordentliche Hilfe beim Ausarbeiten der Übungsaufgaben und Beispiele und bei der Überwachung der technischen Ausführung.

Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese "Vorlesung über spezielle Kapitel der Quantentheorie" viele Freunde finden möge.

Frankfurt am Main, im Mai 1980

Walter Greiner

## Vorwort zur 3. Auflage

Die Vorlesungen über Theoretische Physik haben viele Freunde gefunden, sodaß eine Neuauflage notwendig wurde. Dies gab uns Gelegenheit, zahlreiche Druck- und Flüchtigkeitsfehler der ersten Auflage zu eliminieren und gleichzeitig notwendig erscheinende didaktische und sachliche Verbesserungen vorzunehmen.

Besonders der Abschnitt über Superfluidität wurde erweitert. Aber auch gänzlich neue Kapitel wurden eingefügt; so z.B. die Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen, Grundelemente der Quantenstatistik, Struktur der Atome, elementare Struktur der Moleküle und schließlich Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Quantenmechanik. Dies sind zum Teil faszinierende und wichtige Themen, die angehende Physiker interessieren und die sie kennen sollten. Auch eine Reihe Übungsaufgaben und Beispiele wurden ausgetauscht bzw. neu aufgenommen. Wir hoffen, daß damit die Vorlesungen gewinnen.

Wir bedanken uns besonders bei Herrn Akademischen Oberrat Dr. J. Reinhardt für seine Verbesserungsvorschläge, bei den Herren Dr. G. Plunien und Dr. S. Schramm für die Ausarbeitung einiger Aufgaben und Beispiele und bei Herrn Dipl. Phys. A. Paulus für die Überwachung der Drucklegung. Für ihre Hilfe bei der Neugestaltung sei auch den Herren Dipl. Phys. V. Blum, Dipl. Phys. C. Greiner, Dipl. Phys. R. Heuer, C. Hofmann, Dipl. Phys. C. Ionescu, H.-J. Kampfenkel, U. Katscher, Dipl. Phys. G. Peilert, Dr. M. Rufa, Dipl. Phys. K. Rummrich, Dipl. Phys. A. Scherdin, Dipl. Phys. D. Schnabel, Dr. G. Staad und Dipl. Phys. T. Stahl herzlich gedankt; so auch Frau H. Steidle für die Gestaltung vieler Figuren.

Frankfurt am Main, im Januar 1989

Walter Greiner

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes</b>	<b>1</b>
Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	1
Ebene elektromagnetische Wellen . . . . .	3
Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes . . . . .	5
Zustandsvektoren des elektromagnetischen Feldes . . . . .	15
Kohärente Zustände (Glauber-Vektoren) des Strahlungsfeldes . . . . .	19
<b>2. Die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie</b>	<b>36</b>
Die Emission von Strahlung durch ein angeregtes Atom . . . . .	38
Die Lebensdauer eines angeregten Zustandes . . . . .	41
Absorption von Photonen . . . . .	56
Photonenstreuung an freien Elektronen . . . . .	64
Berechnung des totalen Photonen-Streuquerschnitts . . . . .	68
Die Tscherenkov-Strahlung eines Schrödingerschen Elektrons . . . . .	76
Die natürliche Linienbreite und Selbstenergie . . . . .	89
<b>3. Über die zweite Quantisierung</b>	<b>99</b>
Das Spin-Statistik-Theorem . . . . .	118
Zusammenhang der zweiten Quantisierung mit der elementaren Quantenmechanik . . . . .	119
<b>4. Quantenfelder mit Wechselwirkung</b>	<b>130</b>
<b>5. Die Unendlichkeiten in der Quantenelektrodynamik — Renormierungsprobleme</b>	<b>159</b>
Die Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund der Quantenfluktuation des Feldes (Casimir-Effekt) . . . . .	159
Die Renormierung der Elektronenmasse . . . . .	171
Die Aufspaltung der $2s_{1/2}$ - $2p_{3/2}$ -Zustände im Wasserstoff — die Lamb-Shift . . . . .	179
Was ist bei Bethe inkonsistent? . . . . .	189

Das anomale magnetische Moment des Elektrons im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik . . . . .	190
<b>6. Nichtrelativistische Quantenfeldtheorie wechselwirkender Teilchen und ihre Anwendung</b>	<b>197</b>
Quantengase . . . . .	202
Das fast-ideale, entartete Bose-Einstein-Gas . . . . .	214
<b>7. Die Superfluidität</b>	<b>235</b>
Grundgedanken einer mikroskopischen Theorie der Superfluidität . .	236
Landaus Theorie der Superfluidität . . . . .	249
<b>8. Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen</b>	<b>256</b>
Paar-Korrelationsfunktion für Fermionen . . . . .	256
Paar-Korrelationsfunktion für Bosonen . . . . .	262
Der Hanbury-Brown und Twiss-Effekt . . . . .	267
Cooper-Paare . . . . .	271
<b>9. Quasiteilchen in Plasmen und Metallen</b>	<b>289</b>
Plasmonen und Phononen . . . . .	296
<b>10. Grundelemente der Quantenstatistik</b>	<b>304</b>
Konzept der Quantenstatistik und Ensemble-Begriff . . . . .	304
Dichteoperator eines Vielteilchensystems . . . . .	305
Dynamik des quantenstatistischen Ensembles . . . . .	317
Geordnete und ungeordnete Systeme — Dichteoperator und Entropie . . . . .	321
Stationäre Ensembles . . . . .	324
<b>11. Struktur der Atome</b>	<b>330</b>
Das Zweielektronenatom . . . . .	330
Die Hartree-Näherung . . . . .	339
Die Thomas-Fermi-Näherung . . . . .	341
Das Hartree-Fock Verfahren . . . . .	346
Das Periodensystem der Elemente . . . . .	355
Die Aufspaltung der Konfiguration (orbitalen Zustands-Multipletts)	356
Die Spin-Bahn-Wechselwirkung . . . . .	364
Die Behandlung der Spin-Bahn-Aufspaltung im Hartree-Fock-Verfahren . . . . .	377
Der Zeemaneffekt . . . . .	380



<b>12.Elementare Struktur der Moleküle</b>	<b>386</b>
Die Born-Oppenheimer-Näherung . . . . .	388
Das $H_2^+$ -Ion als Beispiel . . . . .	392
Das Wasserstoffmolekül $H_2$ . . . . .	399
Elektronenpaarung . . . . .	404
Räumlich orientierte Orbitale . . . . .	407
Hybridisierung . . . . .	409
Kohlenwasserstoffe . . . . .	414
<b>13.Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Wellenmechanik</b>	<b>420</b>
Die Rolle der Hamiltonschen Wirkungsfunktion in der klassischen Mechanik und der Schrödingerschen Wellenmechanik . . . . .	421
Die Übergangsamplitude als Pfadintegral . . . . .	424
Die Pfadintegraldarstellung des Schrödinger-Propagators . . . . .	432
Eine alternative Herleitung der Schrödinger-Gleichung . . . . .	436

# Aufgaben und Beispiele

1.1	Aufgabe: Die Coulomb-Eichung . . . . .	4
1.2	Aufgabe: Die Berechnung der Magnetfeldanteile zur Energie des elektromagnetischen Feldes . . . . .	12
1.3	Aufgabe: Der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes . . .	17
1.4	Aufgabe: Matrixelemente mit kohärenten Zuständen . . . . .	23
1.5	Aufgabe: Das mittlere Schwankungsquadrat der elektrischen Feldstärke im kohärenten Zustand . . . . .	24
1.6	Beispiel zur Vertiefung: Der Bohm-Aharonov-Effekt . . . . .	25
2.1	Aufgabe: Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge . . . . .	46
2.2	Aufgabe: Die Lebensdauer des $2p$ -Zustandes mit $m = 0$ im H-Atom gegen Zerfall in den $1s$ -Zustand . . . . .	48
2.3	Aufgabe: Die Unmöglichkeit des Zerfalls des $2s$ -Zustands des H-Atoms bei $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung . . . . .	49
2.4	Aufgabe: Der Wechselwirkungsterm zwischen dem Spin des Elektrons und dem elektromagnetischem Feld im Hamiltonoperator . .	50
2.5	Aufgabe: Die Lebensdauer des Grundzustandsniveaus des H-Atoms bei Hyperfeinstrukturaufspaltung . . . . .	51
2.6	Aufgabe: Der Einphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms . . . . .	54
2.7	Aufgabe: Der differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die photoelektrische Emission eines Elektrons des H-Atoms (Dipolapproximation)	59
2.8	Beispiel: Das Photonenspektrum des schwarzen Körpers . . . . .	63
2.9	Aufgabe: Der Comptoneffekt . . . . .	71
2.10	Aufgabe: Der Zweiphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms . . . . .	72
2.11	Beispiel zur Vertiefung: Die Feldenergie in Medien mit Dispersion . . . . .	77
2.12	Aufgabe: Der Tscherenkov-Winkel . . . . .	89
2.13	Aufgabe: Die Plemjl-Formel . . . . .	96
3.1	Aufgabe: Wird die Poissonklammer-Algebra von Kommutatoren und Antikommutatoren erfüllt? . . . . .	104

3.2	Aufgabe: Dreifachkommutatoren bei der Entwicklung der Paraoperatoren . . . . .	106
3.3	Aufgabe: Zu den Paraoperatoren: Einführung des Operators $\hat{C}_{jk}$ . . . . .	108
3.4	Aufgabe: Besetzungszahlen von Para-Fermi-Zuständen . . . . .	110
3.5	Aufgabe: Zu den Bosonen-Vertauschungsrelationen . . . . .	115
3.6	Beispiel: Konsistenz der Phasenwahl für die Fermi-Zustände mit den Fermionen-Vertauschungsbeziehungen . . . . .	117
3.7	Aufgabe: Konstanz des Gesamtteilchenzahl-Operators . . . . .	123
4.1	Beispiel: Die nichtrelativistische Bremsstrahlung . . . . .	135
4.2	Aufgabe: Der Rutherford-Streuquerschnitt . . . . .	148
4.3	Aufgabe: Die Lebensdauer des 2s-Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonzerfall (in zweiter Quantisierung) . . . . .	150
4.4	Aufgabe: Korrekturen zweiter Ordnung zum Rutherford-Streuquerschnitt . . . . .	155
5.1	Aufgabe: Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund des Casimir-Effektes . . . . .	164
5.2	Beispiel: Die Messung des Casimir-Effektes . . . . .	168
5.3	Beispiel: Casimirs Versuch für ein Modell des Elektrons . . . . .	170
5.4	Ergänzung: Historische Zwischenbemerkung zur Masse des Elektrons . . . . .	173
5.5	Beispiel: Das Experiment von Lamb und Retherford . . . . .	181
5.6	Aufgabe: Die Lamb-Shift . . . . .	193
6.1	Aufgabe: Das feldtheoretische Vielteilchenproblem . . . . .	198
6.2	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung . . . . .	204
6.3	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der klassischen Boltzmann-Gleichung . . . . .	210
6.4	Aufgabe: Der Übergang von der Entropieformel des Bose-(Fermi-) Gases zur klassischen Entropieformel . . . . .	212
6.5	Aufgabe: Beweis des H-Theorems . . . . .	212
6.6	Beispiel zur Vertiefung: Die Entropie eines Quantengases . . . . .	222
6.7	Aufgabe: Die Verteilung von N Teilchen auf G Zustände, Anzahl der Kombinationen . . . . .	227
6.8	Aufgabe: Die Stirling-Formel . . . . .	228
6.9	Beispiel zur weiteren Vertiefung: Entropie und Information . . . . .	229

6.10	Beispiel: Der Maxwellsche Dämon . . . . .	233
7.1	Aufgabe: Koeffizientenwahl zur Bogoliubovtransformation . . . . .	244
7.2	Aufgabe: Hydrodynamische Analogie zur Superfluidität . . . . .	254
8.1	Beispiel: Die Paar-Korrelationsfunktion für einen Bosonenstrahl . . . . .	264
8.2	Aufgabe: Die Bosonenpaar-Korrelationsfunktion in Abhängigkeit des Quantisierungsvolumen . . . . .	266
8.3	Aufgabe: Die Debye-Frequenz . . . . .	280
8.4	Aufgabe: Die Korrelationslänge eines Cooper-Paares . . . . .	284
8.5	Aufgabe: Bestimmung der Kopplungsstärke eines gebundenen Cooper-Paares . . . . .	287
9.1	Aufgabe: Das elektrostatische Potential einer Ladung im Plasma . . . . .	299
9.2	Aufgabe: Die klassische Dielektrizitätsfunktion . . . . .	301
9.3	Aufgabe: Umformung der dielektrischen Funktion $\epsilon(q, \omega)$ . . . . .	302
10.1	Beispiel zur Vertiefung: Dichteoperatoren in zweiter Quantisierung . . . . .	308
10.2	Aufgabe: Transformationsgleichungen für Feldoperatoren . . . . .	313
10.3	Aufgabe: Vertauschungsrelationen für Fermionen-Feldoperatoren . . . . .	314
10.4	Aufgabe: Der Dichteoperator eines Gemisches . . . . .	319
10.5	Aufgabe: Konstruktion des Dichteoperators eines Systems von unpolarisierten Elektronen . . . . .	320
10.6	Beispiel zur Vertiefung: Systeme nichtwechselwirkender Fermionen und Bosonen . . . . .	327
11.1	Aufgabe: Berechnung einiger benötigter Integrale . . . . .	334
11.2	Aufgabe: Beweis einer Gleichung . . . . .	348
11.3	Aufgabe: Die Hartree-Fock-Gleichungen als nichtlokale Schrödingergleichungen . . . . .	350
11.4	Beispiel: Eine Approximation für den Hartree-Fock-Austauschterm . . . . .	354
11.5	Aufgabe: Anwendung der Hundschen Regel . . . . .	362
11.6	Beispiel: Das Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	366

11.7 Beispiel: Begründung der Spin-Bahn-Wechselwirkung . . . . .	370
11.8 Aufgabe: Umformung des Spin-Bahn-Kopplungsterms . . . . .	376
11.9 Aufgabe: Berechnung des Starkeffekts . . . . .	383
12.1 Aufgabe: Berechnung eines Überlappintegrals und einiger Matrix- elemente für das $H_2^+$ -Ion . . . . .	396
13.1 Aufgabe: Impuls und Energie am Endpunkt einer klassischen Tra- jektorie . . . . .	423
13.2 Aufgabe: Die Übergangsamplitude $K(b, a)$ für ein freies Teil- chen . . . . .	431
13.3 Aufgabe: Die Trotter-Produktregel . . . . .	434



# 1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes

Aus den Vorlesungen über klassische Elektrodynamik (Band III) kennen wir die Maxwell-Gleichungen als Grundgleichungen aller klassischen elektromagnetischen Phänomene. In der Quantenelektrodynamik geht es einerseits um die Quantisierung der Maxwell-Gleichungen, andererseits aber auch um die Quantisierung des Elektron-Positron-Feldes, des Pionenfeldes und anderer Felder und ihrer Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld (d.h. den quantisierten elektromagnetischen Wellen). Wir erinnern uns zunächst noch einmal kurz an die klassischen Maxwell-Gleichungen.

## Die Maxwell-Gleichungen

Maxwells Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld lauten im Gaußschen Maßsystem, das wir wie schon früher durchweg benutzen werden:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Kombiniert man die Divergenz der zweiten Gleichung mit der zeitlichen Ableitung der dritten, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrischen Ladungs- und Stromdichten  $\rho$  und  $\vec{j}$  folgern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Die elektrischen und magnetischen Feldstärken,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , lassen sich durch das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das skalare Potential  $\varphi$  ausdrücken

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3)$$

Die erste und dritte Gleichung (1) sind damit offensichtlich sofort identisch erfüllt. Die Potentiale  $\vec{A}$  und  $\varphi$  sind nicht eindeutig, denn man erhält dieselben Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auch mit den neuen Potentialen  $\vec{A}'$  und  $\varphi'$ , die durch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4)$$

gegeben sind.  $\chi(\vec{r}, t)$  ist dabei eine willkürliche Funktion des Ortes  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$ . Diese Änderung der Potentiale (4), die keine Änderungen für

die Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nach sich zieht, heißt *Eichtransformation*. Wir haben in den Vorlesungen über Quantenmechanik (vgl. Band IV) schon öfters nachgewiesen, daß bei minimaler Kopplung

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (5)$$

die Wellenfunktion  $\Psi$  bei einer Umeichung (4) durch

$$\Psi' = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right) \quad (6)$$

ersetzt werden muß; dann aber die Form der Wellengleichung (Schrödinger-Gleichung, Pauli-Gleichung etc.) unverändert bleibt. Die Transformationen (6) werden oft auch *Eichtransformationen erster Art*, und die Transformationen (4) *Eichtransformationen zweiter Art* genannt. Setzt man die Gleichungen (3) in die zweite und dritte Maxwell-Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \varphi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (7)$$

Falls der Vektor  $\vec{A}$  in orthogonalen Koordinaten geschrieben wird, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}. \quad (8)$$

Hierbei bedeutet der letzte Term  $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$  rechts einen Vektor, dessen einzelne Komponenten  $\Delta A_i$ , d.h. der Laplace-Operator angewandt auf die Komponenten  $A_i$  sind. Denkt man sich (8) in (7) eingesetzt, so lassen sich die entstehenden Gleichungen beträchtlich vereinfachen, wenn man eine Eichtransformation (4) zu den neuen Potentialen  $\vec{A}'$ ,  $\varphi'$  durchführt, die derart bestimmt sind, daß sie die *Lorentzbedingung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

erfüllen. Die Eichfunktion  $\chi$  kann aus der Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (10)$$

bestimmt werden. Die Gleichungen (7) lauten dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \vec{\nabla}^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (11)$$



## Ebene elektromagnetische Wellen

Wenn  $\vec{j} = 0$  und  $\varrho = 0$ , d.h. der Raum vollständig leer ist, läßt sich immer eine Eichfunktion  $\chi$  finden derart, daß

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) &= 0, \\ \varphi'(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

für alle  $\vec{r}$  und  $t$ . Das gilt in voller Allgemeinheit (vgl. Aufgabe 1.1). Die Eichung (12) heißt *Coulomb-Eichung*. Dann können transversale ebene Wellen als Lösungen für  $\vec{A}'$  (und daher auch für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ) gefunden werden. Lassen wir im folgenden die Striche bei  $\vec{A}'$  und  $\varphi'$  (was sowieso verschwindet) wieder weg, so erhalten wir anstelle von (9) und (11)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \\ \varphi &= 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Eine typische ebene Welle als Lösung von (13) ist durch ein reelles Vektorpotential  $\vec{A}$  mit dem Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  und dem reellen Polarisationsvektor  $\vec{\varepsilon}$  gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= 2\vec{\varepsilon}|\vec{A}_0| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.},\end{aligned}\tag{14}$$

wobei  $\vec{A}_0 = |\vec{A}_0| \vec{\varepsilon} e^{i\alpha}$  ist und c.c. nichts weiter als "complex conjugate" (das komplex Konjugierte) des vorangehenden Terms bedeuten soll. Man sieht sofort, daß der Ansatz (14) die erste der Gleichungen (13) erfüllt, falls

$$\omega = kc = |\vec{k}|c\tag{15}$$

ist, und die zweite der Gleichungen (13) erfüllt, wenn

$$\vec{A}_0 \perp \vec{k}\tag{16}$$

der Polarisationsvektor  $\vec{A}_0$  transversal ist, also senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor  $\vec{k}$  steht. Die elektrischen und magnetischen Felder, zum Vektor-

potential (14) gehörend, bestimmen sich aus (3) zu

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -2k\vec{\epsilon}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha), \\ \vec{B} &= -2k\times\vec{\epsilon}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha).\end{aligned}\quad (17)$$

Der *Poynting-Vektor*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\quad (18)$$

ist offensichtlich in der Richtung von  $\vec{k}$ . Im ladungs- und stromfreien Raum ist  $\vec{H} = \vec{B}$ . Nach Mittelung über eine Periode  $T = 2\pi/\omega$  der Oszillation ergibt sich sein Betrag zu

$$\bar{S} = \frac{\omega^2}{2\pi c}\bar{\epsilon}^2\quad (19)$$

wobei  $\bar{\epsilon}^2 = \vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon} = \vec{A}_0\cdot\vec{A}_0^*$  ist. Die Größe  $\bar{S}$  charakterisiert die Intensität der ebenen Welle.

### 1.1 Aufgabe: Die Coulomb-Eichung

Zeigen Sie, falls  $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$  und  $\rho = 0$  ist, daß die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen durch Potentiale  $\vec{A}'$  und  $\varphi'$  mit  $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$  und  $\varphi' = 0$  ausgedrückt werden kann (Coulomb-Eichung).

Lösung: Die beiden Bedingungen  $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$  und  $\rho' = 0$  zusammen sichern automatisch die Gültigkeit der Lorentzbedingung (9). Daher gelten auch die Gleichungen (11). Es entsteht aber nur dann kein Widerspruch zu den beiden Bedingungen, falls  $\rho = 0$  und  $\text{div}\vec{j} = 0$  ist. Für gegebenes  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\varphi(\vec{r}, t)$  findet man die zur Coulomb-eichung führende Eichfunktion  $\chi(\vec{r}, t)$  aus den aus (4) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\varphi(\vec{r}, t),\quad 1$$

$$\vec{\nabla}^2\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t).\quad 2$$

Aus 1 folgt

$$\chi(\vec{r}, t) = c\int\varphi(\vec{r}, t)dt + \text{const.}\quad 3$$

was zusammen mit 2

$$c\int dt\left[\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = 0\quad 4$$

ergibt. Dies ist als Konsistenzbedingung aufzufassen. Wir prüfen ihre Gültigkeit, indem wir von

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

ausgehen und weiterrechnen

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \right) = 4\pi \rho$$

oder

$$-\left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} - \vec{\nabla}^2 \varphi \right) = 4\pi \rho. \quad 5$$

Diese Gleichung ist von den Potentialen  $\vec{A}$  und  $\varphi$  als Lösungen der Maxwell-Gleichungen immer erfüllt. Wenn  $\rho = 0$  ist, folgt also automatisch die Gültigkeit von 4. Damit ist 3 die Eichfunktion und wir können die Coulomb-Eichung immer, ohne Verlust an Allgemeinheit, unter den gegebenen Bedingungen erreichen.

## Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Wir schreiben die Maxwell-Gleichungen für das Feld ohne Quellen noch einmal auf:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= +\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

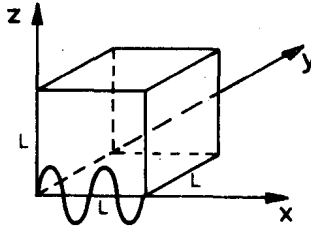
Wählt man die Coulomb-Eichung (13) - vgl. Aufgabe 1.1 -

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

so sind mit (3) die ersten drei Gleichungen (20) identisch erfüllt. Die letzte Gleichung (20) ergibt dann die Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

was aus (13) schon bekannt ist. Bei der Entwicklung der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes ist es vorteilhaft, das Feld durch einen Satz diskreter Variablen zu beschreiben. Wir sperren daher das elektromagnetische Feld in einen großen Kasten (Würfel) vom Volumen  $\Omega = L^3$  ein und diskretisieren damit die Normalmoden des Feldes. Das allgemeine  $\vec{A}$ -Feld wird dann nach den Normalmoden  $\vec{A}_{\vec{k}\sigma}$  entwickelt; die Fourierkoeffizienten  $a_{\vec{k}\sigma}(t)$



Der Würfel, in welchem das elektromagnetische Feld eingesperrt wird. Ein Wellenzug mit zwei vollen Wellenlängen entlang der  $x$ -Achse ist angedeutet.

sind dann die eigentlichen Feldvariablen, die die Dynamik beschreiben. Ihre Quantisierung werden wir anstreben.

Es erhebt sich die Frage nach den Randbedingungen des Feldes auf den Wänden des Kastens. Am bequemsten ist es, Periodizität von  $\vec{A}$  auf den Wänden zu fordern; was bedeutet, daß die Normalmoden dadurch bestimmt werden, daß volle Wellenlängen in den Kasten passen. Mathematisch lautet diese Forderung

$$\begin{aligned}\vec{A}(L, y, z, t) &= \vec{A}(0, y, z, t), \\ \vec{A}(x, L, z, t) &= \vec{A}(x, 0, z, t), \\ \vec{A}(x, y, L, t) &= \vec{A}(x, y, 0, t).\end{aligned}\quad (23)$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z) e^{i\omega t}\quad (24)$$

folgt aus (22)

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{A}(x, y, z) = 0.\quad (25)$$

Setzen wir

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \text{also } \omega_k^2 = c^2 k^2,\quad (26)$$

so ergibt sich

$$\vec{A}_{\vec{k}\sigma} = N_k \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \sigma = 1, 2,\quad (27)$$

wobei  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}1}$  und  $\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}$  zwei Polarisationsvektoren sind, die wegen der aus (21) und (27)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  folgenden Transversalitätsbedingung

$$\vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot \vec{k} = 0\quad (28)$$

senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  stehen müssen.