

Theoretische Physik

Band 4 A

Walter Greiner

**Quanten-
theorie**

Spezielle Kapitel



Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik
Band 4A
Walter Greiner
Quantentheorie:
Spezielle Kapitel

Walter Greiter

Theoretische Physik

Band 1: Mechanik, Teil 1

Band 2: Mechanik, Teil 2

Band 3: Elektrodynamik

Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung

Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien

Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen

Band 7: Quantenelektrodynamik

Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung

Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik

Band 10: Quantenchromodynamik

Ergänzungsbände

Band 2A: Hydrodynamik

Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie

Band 4A: Quantentheorie: Spezielle Kapitel

Band 7A: Feldquantisierung

In Vorbereitung

Physik der Elementarteilchen, Theoretische Grundlagen

Modelle der Elementarteilchen

Kernmodelle

Quantenstatistik

Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation

Theoretische Physik

Band 4A

Walter Greiner

Quantentheorie

Spezielle Kapitel

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

4., unveränderte Auflage 1993



Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. (02. 09.) Walter Greiner ist Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main.

© Walter Greiner, 1993. Printed in Germany.

ISBN 3-527-26931-7 (Hardcover) ISBN 3-527-26932-5 (Paperback)

Printed on acid-free paper. Printed in Germany.

Printed by the Universitäts- und Landesbibliothek Bonn.

Printed by the Universitäts- und Landesbibliothek Bonn.

Printed by the Universitäts- und Landesbibliothek Bonn.

Printed by the Universitäts- und Landesbibliothek Bonn.

Greiner, Walter:

Quantentheorie. spezielle Kapitel / Walter Greiner. - 4., unveränd. Aufl. -

Thun: Frankfurt am Main: Deutsch, 1993

(Theoretische Physik, Bd. 4A)

ISBN 3-527-26931-7

Bd. 4A, Greiner, Walter: Quantentheorie. - 4., unveränd. Aufl. - 1993

Dts Deutsche Bibliothek - CIP-Eintragsaufnahme

Theoretische Physik. - Thun: Frankfurt am Main: Deutsch

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung
des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in
irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für
Zwecke der Unterrichtsvermittlung, reproduziert oder einer Verwertung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© Verlag Harri Deutsch, Thun: Frankfurt am Main, 1993

Satz: André Pöschel

Herausgeber: Fischer-Verlagsanstalt

Printed in Germany

Vorwort zur 1. und 2. Auflage

Die theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mitteilen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen, Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß natürlich auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die theoretische Physik in das erste Studiensemester verlegt. Darin werden die Mechanik I und II, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie II, Statistische Mechanik und Thermodynamik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungs- und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, Klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Eichtheorien, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon, wie z.B. die zweisemestrigen Vorlesungen über die Theoretische Kernphysik bzw. die Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier mit den "Speziellen Kapiteln der Quantentheorie" eine besonders wichtige Ergänzungsvorlesung vor. Sie ist für das 5. Semester gedacht und so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeuges, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir, den Stoff so interessant wie möglich darzustellen.

Wir bedienen uns fast ausschließlich des Formalismus der zweiten Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Teilchen und Moden), den wir ausgiebig erläutern und auch in seinem Zusammenhang mit der elementaren Quantenmechanik diskutieren. Die Vorlesung beginnt mit der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. Wir besprechen sowohl die Zustandsvektoren mit scharfer Photonenzahl, als auch die in der modernen Physik wichtigen kohärenten Zustände (Glauber-Vektoren). Die Emissions- und Absorptionsprozesse der Strahlung, die Bestimmung der Lebensdauer von angeregten Zuständen und der Linienbreite von Spektrallinien, das Selbstenergieproblem, die Photonemstreuung und die Theorie der Tscherenkov-Strahlung, zusammen mit vielen zur Vertiefung beitragenden Aufgaben (z.B. Zweiphotonenzerfall, Comptoneffekt, Photonen-Spektrum des schwarzen Körpers usw.) schmücken die ersten beiden Kapitel aus.

Das dritte Kapitel ist speziell der systematischen Diskussion der zweiten Quantisierung gewidmet. Dabei werden Fermi- und Bosestatistiken, das Spin-Statistik-Theorem und auch die Möglichkeit von Parastatistiken vorgestellt und ihr Zusammenhang mit der Art der Quantisierung (Antikommutatoren, Kommutatoren, Dreifachkommutatoren) aufgezeigt. Die Behandlung von Quantenfeldern mit Wechselwirkung wird allgemein durchgeführt und speziell auf die Probleme der Bremsstrahlung, der Rutherford-Streuung mit höheren Korrekturen und der Berechnung der Lebensdauer des $2s$ -Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonenzerfall angewandt.

Die Unendlichkeiten der Quantenelektrodynamik sind das Thema des 5. Kapitels. Hierbei haben wir dem Casimireffekt, der Renormierung der Elektronenmasse und der Berechnung des Lambshift besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

In den beiden letzten Kapiteln werden die Methoden der Quantenfeldtheorie auf Fragestellungen aus dem Bereich der Festkörper- und Plasmaphysik angewandt. Quantengase, Superfluidität, Plasmonen und Photonen sind einige der diskutierten Phänomene.

Wir haben bei der Stoffauswahl bewußt moderne Themen aus verschiedenen Gebieten der Physik aufgegriffen (Glauber-Zustände, Zweiphotonenzerfall, Tscherenkov-Strahlung, Bremsstrahlung, Parastatistik, Casimir-Effekt, Maxwellcher Dämon, Superfluidität usw.). Damit soll jungen Physikern die vielfältige Anwendung der feldtheoretischen Methoden vor Augen geführt werden, ihre Begeisterung geweckt und gefordert und sie schließlich frühzeitig ohne Niveauverlust an moderne Forschunggebiete herangeführt werden.

Wir bedanken uns bei den Damen A. Tupker, B. Utschig, M. Knolle, E. Pfla-

ter, J. Heuss und G. Roth für ihre große Hilfe bei der technischen Anfertigung des Manuskriptes. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer wieder notwendigen Änderungen waren bewundernswert.

Den Herren Dr. Jürgen Hoffmann und cand. phys. Horst Schaefer gilt unser besonderer Dank für ihre außerordentliche Hilfe beim Ausarbeiten der Übungsaufgaben und Beispiele und bei der Überwachung der technischen Ausführung.

Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese "Vorlesung über spezielle Kapitel der Quantentheorie" viele Freunde finden möge.

Frankfurt am Main, im Mai 1980

Walter Greiner

Vorwort zur 3. Auflage

Die Vorlesungen über Theoretische Physik haben viele Freunde gefunden, sodaß eine Neuauflage notwendig wurde. Dies gab uns Gelegenheit, zahlreiche Druck- und Flüchtigkeitsfehler der ersten Auflage zu eliminieren und gleichzeitig notwendig erscheinende didaktische und sachliche Verbesserungen vorzunehmen.

Besonders der Abschnitt über Superfluidität wurde erweitert. Aber auch gänzlich neue Kapitel wurden eingefügt, so z.B. die Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen, Grundelemente der Quantenstatistik, Struktur der Atome, elementare Struktur der Moleküle und schließlich Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Quantenmechanik. Dies sind zum Teil faszinierende und wichtige Themen, die angehende Physiker interessieren und die sie kennen sollten. Auch eine Reihe Übungsaufgaben und Beispiele wurden ausgetauscht bzw. neu aufgenommen. Wir hoffen, daß damit die Vorlesungen gewinnen.

Wir bedanken uns besonders bei Herrn Akademischen Oberrat Dr. J. Reinhardt für seine Verbesserungsvorschläge, bei den Herren Dr. G. Plumien und Dr. S. Schramm für die Ausarbeitung einiger Aufgaben und Beispiele und bei Herrn Dipl. Phys. A. Paulus für die Überwachung der Drucklegung. Für ihre Hilfe bei der Neugestaltung sei auch den Herren Dipl. Phys. V. Blum, Dipl. Phys. C. Gröner, Dipl. Phys. B. Heuer, C. Hofmann, Dipl. Phys. C. Jönsson, H.-J. Kampfenkel, U. Katscher, Dipl. Phys. G. Peilert, Dr. M. Rufa, Dipl. Phys. K. Baumrich, Dipl. Phys. A. Scherlin, Dipl. Phys. D. Schinabel, Dr. G. Staad und Dipl. Phys. T. Stahl herzlich gedankt, so auch Frau H. Steidle für die Gestaltung vieler Figuren.

Frankfurt am Main, im Januar 1989

Walter Greiner

Inhaltsverzeichnis

1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes	1
Die Maxwell-Gleichungen	1
Ebene elektromagnetische Wellen	3
Die Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	5
Zustandsvektoren des elektromagnetischen Feldes	15
Kohärente Zustände (Glauber-Vektoren) des Strahlungsfeldes	19
2. Die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie	36
Die Emission von Strahlung durch ein angeregtes Atom	38
Die Lebensdauer eines angeregten Zustandes	41
Absorption von Photonen	50
Photonenstreuung an freien Elektronen	64
Berechnung des totalen Photonen-Streuquerschnitts	68
Die Thirlenskov-Strahlung eines Schrodingerischen Elektrons	76
Die natürliche Linienbreite und Selbstenergie	89
3. Über die zweite Quantisierung	99
Das Spin-Statistik-Theorem	118
Zusammenhang der zweiten Quantisierung mit der elementaren Quantenmechanik	119
4. Quantenfelder mit Wechselwirkung	130
5. Die Unendlichkeiten in der Quantenelektrodynamik — Renormierungsprobleme	159
Die Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund der Quantenfluktuation des Feldes (Casimir-Effekt)	159
Die Renormierung der Elektronenmasse	171
Die Aufspaltung der $2s_{1/2}$ - $2p_{3/2}$ -Zustände im Wasserstoff — die Lamb-Shift	179
Was ist bei HeHe inkonsistent?	189

Das anomale magnetische Moment des Elektrons im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik	190
6. Nichtrelativistische Quantenfeldtheorie wechselwirkender Teilchen und ihre Anwendung	197
Quantengase	202
Das fast-ideale, entartete Bose-Einstein-Gas	214
7. Die Superfluidität	235
Grundgedanken einer mikroskopischen Theorie der Superfluidität	236
Landaus Theorie der Superfluidität	249
8. Paar-Korrelationen bei Fermionen und Bosonen	256
Paar-Korrelationsfunktion für Fermionen	256
Paar-Korrelationsfunktion für Bosonen	262
Der Hanbury-Brown und Twiss-Effekt	267
Cooper-Paare	271
9. Quasiteilchen in Plasmen und Metallen	289
Plasmonen und Phononen	296
10. Grundelemente der Quantenstatistik	304
Konzept der Quantenstatistik und Ensemble-Begriff	304
Dichteoperator eines Vielteilchensystems	305
Dynamik des quantenstatistischen Ensembles	317
Geordnete und ungeordnete Systeme — Dichteoperator und Entropie	321
Stationäre Ensembles	324
11. Struktur der Atome	330
Das Zweielektronenatom	330
Die Hartree-Näherung	339
Die Thomas-Fermi-Näherung	341
Das Hartree-Fock Verfahren	346
Das Periodensystem der Elemente	355
Die Aufspaltung der Konfiguration (orbitalen Zustände-Multipletts)	356
Die Spin-Bahn-Wechselwirkung	364
Die Behandlung der Spin-Bahn-Aufspaltung im Hartree-Fock-Verfahren	377
Der Zeemaneffekt	380

12. Elementare Struktur der Moleküle	386
Die Born-Oppenheimer-Näherung	388
Das H_2^+ -Ion als Beispiel	392
Das Wasserstoffmolekül H_2	399
Elektronenpaarung	404
Räumlich orientierte Orbitale	407
Hybridisierung	409
Kohlenwasserstoffe	414
13. Feynmans Pfadintegralformulierung der Schrödingerschen Wellenmechanik	420
Die Rolle der Hamiltonschen Wirkungsfunktion in der klassischen Mechanik und der Schrödingerschen Wellenmechanik	421
Die Übergangsamplitude als Pfadintegral	424
Die Pfadintegraldarstellung des Schrödinger-Propagators	432
Eine alternative Herleitung der Schrödinger-Gleichung	436

Aufgaben und Beispiele

1.1	Aufgabe: Die Coulomb-Gleichung	4
1.2	Aufgabe: Die Berechnung der Magnetfeldanteile zur Energie des elektromagnetischen Feldes	12
1.3	Aufgabe: Der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes	17
1.4	Aufgabe: Matrixelemente mit kohärenten Zuständen	23
1.5	Aufgabe: Das mittlere Schwankungsquadrat der elektrischen Feldstärke im kohärenten Zustand	24
1.6	Beispiel zur Vertiefung: Der Bohm-Aharonov-Effekt	25
2.1	Aufgabe: Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge	46
2.2	Aufgabe: Die Lebensdauer des $2p$ -Zustandes mit $m = 0$ im H-Atom gegen Zerfall in den $1s$ -Zustand	48
2.3	Aufgabe: Die Unmöglichkeit des Zerfalls des $2s$ -Zustandes des H-Atoms bei $\vec{p} \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung	49
2.4	Aufgabe: Der Wechselwirkungsterm zwischen dem Spin des Elektrons und dem elektromagnetischen Feld im Hamiltonoperator	50
2.5	Aufgabe: Die Lebensdauer des Grundzustandsniveaus des H-Atoms bei Hyperfeinstrukturaufspaltung	51
2.6	Aufgabe: Der Einphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms	54
2.7	Aufgabe: Der differentielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die photoelektrische Emission eines Elektrons des H-Atoms (Dipolapproximation)	59
2.8	Beispiel: Das Photonenpektrum des schwarzen Körpers	63
2.9	Aufgabe: Der Comptoneffekt	71
2.10	Aufgabe: Der Zweiphotonenzerfall des $2s$ -Zustandes des H-Atoms	72
2.11	Beispiel zur Vertiefung: Die Feldenergie in Medien mit Dispersion	77
2.12	Aufgabe: Der Tschereukov-Winkel	89
2.13	Aufgabe: Die Planck-Formel	96
3.1	Aufgabe: Wirt die Poissonklammer-Algebra von Kommutatoren und Antikommutatoren erfüllt?	104

3.2	Aufgabe: Dreifachkommutatoren bei der Entwicklung der Paraoperatoren	106
3.3	Aufgabe: Zu den Paraoperatoren: Einführung des Operators \hat{C}_{jk}	108
3.4	Aufgabe: Besetzungszahlen von Para-Fermi-Zuständen	110
3.5	Aufgabe: Zu den Bosonen-Vertauschungsrelationen	115
3.6	Beispiel: Konsistenz der Phasenwahl für die Fermi-Zustände mit den Fermionen-Vertauschungsbeziehungen	117
3.7	Aufgabe: Konstanz des Gesamtteilchenzahl-Operators	123
4.1	Beispiel: Die nichtrelativistische Bremsstrahlung	133
4.2	Aufgabe: Der Rutherford-Streuquerschnitt	148
4.3	Aufgabe: Die Lebensdauer des 2s-Zustandes des H-Atoms gegen Zweiphotonenzerfall (in zweiter Quantisierung)	150
4.4	Aufgabe: Korrektur zweiten Ordnung zum Rutherford-Streuquerschnitt	155
5.1	Aufgabe: Anziehung paralleler, leitender Platten auf Grund des Casimir-Effektes	161
5.2	Beispiel: Die Messung des Casimir-Effektes	168
5.3	Beispiel: Casimirs Versuch für ein Modell des Elektrons	170
5.4	Ergänzung Historische Zwischenbemerkung zur Masse des Elektrons	173
5.5	Beispiel: Das Experiment von Lamb und Retherford	181
5.6	Aufgabe: Die Lamb-Shift	193
6.1	Aufgabe: Das feldtheoretische Vielteilchenproblem	198
6.2	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung	204
6.3	Aufgabe: Die Gleichgewichtslösung der klassischen Boltzmann-Gleichung	210
6.4	Aufgabe: Der Übergang von der Entropieformel des Bose-(Fermi-) Gases zur klassischen Entropieformel	212
6.5	Aufgabe: Beweis des H-Theorems	212
6.6	Beispiel zur Vertiefung: Die Entropie eines Quantengases	222
6.7	Aufgabe: Die Verteilung von N Teilchen auf G Zustände, Anzahl der Kombinationen	227
6.8	Aufgabe: Die Stirling-Formel	228
6.9	Beispiel zur weiteren Vertiefung: Entropie und Information	229

6.10	Beispiel: Der Maxwell'sche Dämon	233
7.1	Aufgabe: Koeffizientenwahl zur Bogoliubov-Transformation	244
7.2	Aufgabe: Hydrodynamische Analogie zur Superfluidität	254
8.1	Beispiel: Die Paar-Korrelationsfunktion für einen Bosonenstrahl	264
8.2	Aufgabe: Die Bosonenpaar-Korrelationsfunktion in Abhängigkeit des Quantisierungsvolumen	266
8.3	Aufgabe: Die Debye-Frequenz	280
8.4	Aufgabe: Die Korrelationslänge eines Cooper-Paares	284
8.5	Aufgabe: Bestimmung der Kopplungsstärke eines gebundenen Cooper-Paares	287
9.1	Aufgabe: Das elektrostatische Potential einer Ladung im Plasma	299
9.2	Aufgabe: Die klassische Dielektrizitätsfunktion	301
9.3	Aufgabe: Umformung der dielektrischen Funktion $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$	302
10.1	Beispiel zur Vertiefung: Dichteoperatoren in zweiter Quantisierung	308
10.2	Aufgabe: Transformationsgleichungen für Feldoperatoren	313
10.3	Aufgabe: Vertauschungsrelationen für Fermionen-Feldoperatoren	314
10.4	Aufgabe: Der Dichteoperator eines Gemisches	319
10.5	Aufgabe: Konstruktion des Dichteoperators eines Systems von unpolarisierten Elektronen	320
10.6	Beispiel zur Vertiefung: Systeme nichtwechselwirkender Fermionen und Bosonen	327
11.1	Aufgabe: Berechnung einiger benötigter Integrale	334
11.2	Aufgabe: Beweis einer Gleichung	348
11.3	Aufgabe: Die Hartree-Fock-Gleichungen als nichtlokale Schrödingergleichungen	350
11.4	Beispiel: Eine Approximation für den Hartree-Fock-Austauschterm	354
11.5	Aufgabe: Anwendung der Hund'schen Regel	362
11.6	Beispiel: Das Wigner-Eckart-Theorem	366

11.7 Beispiel: Begründung der Spin-Bahn-Wechselwirkung	370
11.8 Aufgabe: Umformung des Spin-Bahn-Kopplungsterms	376
11.9 Aufgabe: Berechnung des Starkeffekts	383
12.1 Aufgabe: Berechnung eines Überlappintegrals und einiger Matrixelemente für das H_2^+ -Ion	396
13.1 Aufgabe: Impuls und Energie am Endpunkt einer klassischen Trajektorie	423
13.2 Aufgabe: Die Übergangsamplitude $K(b, a)$ für ein freies Teilchen	431
13.3 Aufgabe: Die Trotter-Produktregel	434

1. Die Quantentheorie des freien elektromagnetischen Feldes

Aus den Vorlesungen über klassische Elektrodynamik (Band III) kennen wir die Maxwell-Gleichungen als Grundgleichungen aller klassischen elektromagnetischen Phänomene. In der Quantenelektrodynamik geht es einerseits um die Quantisierung der Maxwell-Gleichungen, andererseits aber auch um die Quantisierung des Elektron-Positron-Feldes, des Pionenfeldes und anderer Felder und ihrer Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld (d. h. den quantisierten elektromagnetischen Wellen). Wir erinnern uns zunächst noch einmal kurz an die klassischen Maxwell-Gleichungen.

Die Maxwell-Gleichungen

Maxwells Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld lauten im Gaußschen Maßsystem, das wir wie schon früher durchweg benutzen werden:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Kombiniert man die Divergenz der zweiten Gleichung mit der zeitlichen Ableitung der dritten, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrischen Ladungs- und Stromdichten ρ und \vec{j} folgern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Die elektrischen und magnetischen Feldstärken, \vec{E} und \vec{B} , lassen sich durch das Vektorpotential \vec{A} und das skalare Potential φ ausdrücken

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3)$$

Die erste und dritte Gleichung (1) sind damit offensichtlich sofort identisch erfüllt. Die Potentiale \vec{A} und φ sind nicht eindeutig, denn man erhält dieselben Felder \vec{E} und \vec{B} auch mit den neuen Potentialen \vec{A}' und φ' , die durch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4)$$

gegeben sind. $\chi(\vec{r}, t)$ ist dabei eine willkürliche Funktion des Ortes \vec{r} und der Zeit t . Diese Änderung der Potentiale (4), die keine Änderungen für

die Feldstärken \vec{E} und \vec{B} nach sich zieht, heißt *Eichtransformation*. Wir haben in den Vorlesungen über Quantenmechanik (vgl. Band IV) schon öfters nachgewiesen, daß bei minimaler Kopplung

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{\hbar}{c} \vec{A} \quad (5)$$

die Wellenfunktion Ψ bei einer Umeichung (4) durch

$$\Psi' = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right) \quad (6)$$

ersetzt werden muß, dann aber die Form der Wellengleichung (Schrödinger-Gleichung, Pauli-Gleichung etc.) unverändert bleibt. Die Transformationen (6) werden oft auch *Eichtransformationen erster Art*, und die Transformationen (4) *Eichtransformationen zweiter Art* genannt. Setzt man die Gleichungen (3) in die zweite und dritte Maxwell-Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \varphi &= -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (7)$$

Falls der Vektor \vec{A} in orthogonalen Koordinaten geschrieben wird, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}. \quad (8)$$

Hierbei bedeutet der letzte Term $\vec{\nabla}^2 \vec{A}$ rechts einen Vektor, dessen einzelne Komponenten ΔA_i , d. h. der Laplace-Operator angewandt auf die Komponenten A_i sind. Denkt man sich (8) in (7) eingesetzt, so lassen sich die entstehenden Gleichungen beträchtlich vereinfachen, wenn man eine Eichtransformation (4) zu den neuen Potentialen \vec{A}' , φ' durchführt, die derart bestimmt sind, daß sie die *Lorentzbedingung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

erfüllen. Die Eichfunktion χ kann aus der Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (10)$$

bestimmt werden. Die Gleichungen (7) lauten dann

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \vec{\nabla}^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} &= -4\pi \rho, \end{aligned} \quad (11)$$

Ebene elektromagnetische Wellen

Wenn $\vec{j} = 0$ und $\rho = 0$, d.h. der Raum vollständig leer ist, läßt sich immer eine Eichfunktion χ finden derart, daß

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \varphi(\vec{r}, t) &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

für alle \vec{r} und t . Das gilt in voller Allgemeinheit (vgl. Aufgabe 1.1). Die Eichung (12) heißt *Coulomb-Eichung*. Dann können transversale ebene Wellen als Lösungen für \vec{A} (und daher auch für \vec{E} und \vec{B}) gefunden werden. Lassen wir im folgenden die Striche bei \vec{A} und φ (was sowieso verschwindet) wieder weg, so erhalten wir anstelle von (9) und (11)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \\ \varphi &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Eine typische ebene Welle als Lösung von (13) ist durch ein reelles Vektorpotential \vec{A} mit dem Wellenzahlvektor \vec{k} und dem reellen Polarisationsvektor $\vec{\epsilon}$ gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= 2\epsilon |\vec{A}_0| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.,\end{aligned}\quad (14)$$

wobei $\vec{A}_0 = |\vec{A}_0| e^{i\alpha}$ ist und $c.c.$ nichts weiter als "complex conjugate" (das komplex Konjugierte) des vorangehenden Terms bedeuten soll. Man sieht sofort, daß der Ansatz (14) die erste der Gleichungen (13) erfüllt, falls

$$\omega = kc = |\vec{k}|c \quad (15)$$

ist, und die zweite der Gleichungen (13) erfüllt, wenn

$$\vec{A}_0 \perp \vec{k} \quad (16)$$

der Polarisationsvektor \vec{A}_0 transversal ist, also senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor \vec{k} steht. Die elektrischen und magnetischen Felder, zum Vektor

potential (14) gehörend, bestimmen sich aus (3) zu

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -2k\mathcal{E} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \\ \vec{B} &= -2k \times \vec{r} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (17)$$

Der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (18)$$

ist offensichtlich in der Richtung von \vec{k} . Im ladungs- und stromfreien Raum ist $\vec{H} = \vec{B}$. Nach Mittelung über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ der Oszillation ergibt sich sein Betrag zu

$$\bar{S} = \frac{\omega^2}{2\pi c} \mathcal{E}^2 \quad (19)$$

wobei $\mathcal{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{A}_0 \cdot \vec{A}_0$ ist. Die Größe \bar{S} charakterisiert die Intensität der ebenen Welle.

1.4 Aufgabe: Die Coulomb-Eichung

Zeigen Sie, falls $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ mit $\rho = 0$ ist, daß die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen durch Potentiale \vec{A} und φ mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ und $\varphi' = 0$ ausgedrückt werden kann (Coulomb-Eichung).

Lösung: Die beiden Bedingungen $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ und $\varphi' = 0$ zusammen sichern automatisch die Gültigkeit der Lorenz-Bedingung (9). Daher gelten auch die Gleichungen (11). Es entsteht aber nur dann kein Widerspruch zu den beiden Bedingungen, falls $\rho = 0$ und $\text{div } \vec{j} = 0$ ist. Für gegebenes $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\varphi(\vec{r}, t)$ findet man die zur Coulomb-Eichung führende Eichfunktion $\chi(\vec{r}, t)$ aus den aus (4) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = c\varphi(\vec{r}, t), \quad (1)$$

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2)$$

Aus 1 folgt

$$\chi(\vec{r}, t) = c \int \varphi(\vec{r}, t) dt + \text{const.} \quad (3)$$

was zusammen mit 2

$$c \int dt \left[\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (4)$$

ergibt. Dies ist als Konsistenzbedingung aufzufassen. Wir prüfen ihre Gültigkeit, indem wir von

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$