

Stöcker

**Taschenbuch
mathematischer
Formeln und
moderner Verfahren**



Mit CD-ROM
DeskTop Mathematik

Verlag
Harri
Deutsch



Funktion $f(x)$, Ableitung $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ und Stammfunktion $\int f(x) dx = F(x) + C$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	cx	e^x	e^x	e^x
1	x	$\frac{1}{2}x^2$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{1}{n+2}x^{n+2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{2}(\ln x)^2$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$
$\cos(ax)$	$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $
$\sin(ax)$	$-\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{2}\ln 1+x^2 $
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a}\ln \cos(ax) $	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{2}\ln 1+x^2 $
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-\cot(ax)$	$\frac{1}{a}\ln \sin(ax) $	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arccoth}(x)$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $
$\cos(ax)$	$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $
$\sin(ax)$	$-\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{2}\ln 1+x^2 $
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a}\ln \cos(ax) $	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{2}\ln 1+x^2 $
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-\cot(ax)$	$\frac{1}{a}\ln \sin(ax) $	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arccoth}(x)$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $

Differentiations- und Integrationsregeln

Konstante	$f' = \frac{d}{dx} c = 0$	Konstante	$\int c dx = \int c dx$
Summe	$\frac{d}{dx} (f + g) = f' + g'$	Produkt	$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
Differenz	$\frac{d}{dx} (f - g) = f' - g'$	Konstante	$\int c \cdot f dx = c \int f dx$
Summe	$\frac{d}{dx} (f \cdot g) = f'g + fg'$	Summe	$\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot g(x) + \int f(x) dx \cdot g'(x)$
Produkt	$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	partielle Integration	$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$
Kettenregel	$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \cdot g'(x)$	Substitution	$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$
Exponentialfunkt.	$\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$	logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$

Weitere Regeln

Quotient	$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	Integrale	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
Umkehrfunkt.	$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	Vertauschung	$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a -f(x) dx$
Leibniz	$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$	Integration	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
Leibniz	$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^h(x) f(t) dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$		

1	Zahlenrechnen (Arithmetik und Numerik)	1	⇒
2	Gleichungen und Ungleichungen (Algebra)	34	⇒
3	Geometrie und Trigonometrie der Ebene	54	⇒
4	Geometrie des Raumes	84	⇒
5	Funktionen	102	⇒
6	Vektorrechnung	291	⇒
7	Koordinatensysteme	307	⇒
8	Analytische Geometrie	331	⇒
9	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	358	⇒
10	Boolesche Algebra – Anwendung in der Schaltalgebra	413	⇒
11	Graphen und Algorithmen	425	⇒
12	Differentialrechnung	430	⇒
13	Differentialgeometrie	451	⇒
14	Unendliche Reihen	462	⇒
15	Integralrechnung	475	⇒
16	Vektoranalysis	509	⇒
17	Komplexe Variablen und Funktionen	526	⇒
18	Differentialgleichungen	552	⇒
19	Fourier-Transformation	588	⇒
20	Laplace- und z-Transformation	624	⇒
21	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	656	⇒
22	Fuzzy-Logik	719	⇒
23	Neuronale Netze	740	⇒
24	Nutzung von Computern	751	⇒
25	Integraltafeln	816	⇒
26	Sachwortverzeichnis	850	⇒

**Taschenbuch
mathematischer Formeln
und moderner Verfahren**

Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren

Herausgegeben von
Prof. Dr. Horst Stöcker

Nachdruck der 4., korrigierten Auflage

Verlag
Harri
Deutsch



Professor Dr. Horst Stöcker

Judah M. Eisenberg Professor Laureatus an der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main.

Direktor und Senior Fellow des FIAS (Frankfurt Institute for Advanced Studies),

Gründungsdirektor der FIGSS (Frankfurt International Graduate School of Sciences)

Seit August 2007 Wissenschaftlicher Geschäftsführer der GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung)

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1811-3 (Buch)

ISBN 978-3-8171-1812-0 (Buch mit CD-ROM)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von
Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages
in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren; auch nicht für Zwecke der Unter-
richtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, stored, trans-
missioniert, übertragen oder sonstwie für öffentliche Zwecke verwendet werden. Zitiert-
fassungen mit Angabe des Erstveröffentlichungsjahrs sind zulässig.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig revidiert. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag
für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Ver-
antwortung.

Nachdruck der 4. korrigierten Auflage 1999, 2003, 2007

© Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft GmbH, Frankfurt am Main, 2007

Name, Nameverteilung Dr. Naake, Brand-Erbstadt / www.naake-satz.de

Druck: Clausen & Boss, Jena

Printed in Germany

Koordinator (und die von ihm bestellten Kapitel)

Gesamtdurchsicht für die 4. Auflage

Prof. Dr.-Ing. **Holger Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Dipl.-Phys. **Jens Knopka**, Uni Frankfurt, (1 & 2) mit

Dr.-Ing. Dieter Zetsche, Mercedes-Benz AG, Stuttgart

Prof. Dr. Hermut Kuhse, Uni Homburg

Dr. **André Jahn**, Uni Frankfurt, (3 & 4) mit

Priv.-Doz. Dr. Hans Babovsky, Uni Kaiserslautern

Dipl.-Phys. Nina Flach, Dresden

Prof. Dr. Stefan Demmer, IIT Mannheim

Dr. **Christoph Hartmann**, Ecole IN Mers und Schwach Neuen, (5 & 16) mit

Dipl.-Phys. Soeren Haas, Uni Frankfurt

Prof. Dr.-Ing. Klaus Frenn, FH Rheinland-Phila, Abt. Kunststoffen

Dr. **Jürgen Schaffner**, Nils-Böhr Institut, Kognitivism, (6-8 & 12-15) mit

Dr. **Mario Vidovic**, Uni Frankfurt

Prof. Dr.-Ing. Holger Lutz, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr. **Horst Stücker**, Uni Frankfurt, (9) mit

Dr. Christian Hofmann, TU Braunschweig

Dipl.-Ing. Holger Kutz, Mauer AG, Oberndorf

Dr. **Klaus Rannich**, Uni Frankfurt, (10 & 24) mit

Dipl.-Inform. Ingo Rannich, Uni Frankfurt

Prof. Dr. Wilfried Richter, Uni GH Paderborn

Prof. Dr. **Stepfried Fuchs**, Dresden, (11 & 14) mit

Dr. **Raffaele Mattiello**, Uni Frankfurt

Prof. Dr. Georg Terstapski, FH Rheinland-Phila, Abt. Kunststoffen

Dr. **Dirk Rischke**, Columbia University, New York, (17) mit

Prof. Dr. Rudolf Pöhl, FH Frankfurt

Dr. **Thomas Schönfeld**, Uni Frankfurt, (18) mit

Prof. Dr. Wilhelm Wenzel, FH Heilbronn, Außenstelle Kempten

Dr. **Volker Blum**, Schwarzart & Partner, Köln, (19 & 20) mit

Dipl.-Phys. **Christoph Best**, Uni Frankfurt

Phys. Techn. Ass. Axel Smoll, NTA 1100

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Weinst, IHT-Garmisch

Prof. Dr. **Adolf Grauel**, Uni GH Paderborn, (22)

Dipl.-Phys. **Arnd Bischoff**, Uni Frankfurt, (23) mit

Prof. Dr. Bernd Schömann, Siemens AG

Dipl.-Phys. **Markus Hofmann**, Uni Frankfurt, (24) mit

Dipl.-Phys. Christian Späth, Uni Frankfurt

Prof. Dr. Günter Flöck, Dresden

Dipl.-Phys. **Luke Wöckelmann**, Uni Frankfurt, (25) mit

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Weitzel, FH der Techn. Obering.

Mitteilungen von

- Dipl. Phys. Thomas Achenbach, FTZ, Teichkorn, Darmstadt;
Prof. Dr. Jürgen Altmann, Mathematische Fachhochschule,
Prof. Dr. V. Baumgärtner, HTW des Saarlandes, Saarbrücken;
Dipl. Phys. Marcus Blücher, Uni Frankfurt;
Prof. Dr. Gertfried Brüche, Fachhochschule Lappe;
Dipl.-Ing. Gerd Brunkmann, Leipzig;
Dr. Gerd Buschold, Henschel AG;
Prof. Dr. H. Carl, FH Biberach;
Prof. Dr. A. Dobrinski, Rheinische FH Köln;
Dipl. Phys. Adrian Dümmler, Uni Frankfurt;
Dipl. Phys. Ulrich Eickmann, Uni Frankfurt;
Dr. Norbert Fleischer, Miskau;
Prof. Dr. W. Glaser, FH Jülich;
Prof. Günter Geil, FH Karlsruhe;
Dipl. Phys. Harald Geil, Uni Frankfurt;
Prof. E. Groth, FH Hamburg;
Prof. Dr. M. Herrmann, Uni Jena;
Prof. Dr. W. Hoyer, FH Ravensburg-Weingarten;
Dipl.-Ingenieur Jürgen Hölzer, TU München;
Dr. Kyong Ho Kong, Uni Frankfurt;
Prof. Dr. K. Kurow, FH Rheinland Pfalz;
Dr. Andreas von Krosigk, Uni Frankfurt;
Prof. Dr. H.-J. Kröcker, Humboldt-Uni Berlin;
Prof. Dr. E. Lenzke, TU Chemnitz;
Dr. E. Lohrer, TU Chemnitz;
Gerhard Meering, Hannover;
Prof. Dr. H.D. Metz, GH Wuppertal;
Dipl.-Ing. Robert Mitzel, Studienwerkern, Fuldbergstraße Oberursel;
Dr. Hans-Georg Reusch, Uni Münster;
Dipl. Phys. Matthias Rossmück, Uni Frankfurt;
Dr. Wolfgang Schäfer, Bosch Telegon, Frankfurt;
Dr. H.-J. Schell, TU Chemnitz;
Prof. Dr. Kh. Schillke, FH Krefeld;
Dr. Jani Stibnyak, JINR Dubna;
Prof. Dr. Peter Thaler, FH Flensburg;
Dr. Dirk Thümmel, Louisiana State University;
Prof. Dr. U. Wobal, TH Zwickau;

Was für wen?

Die Anwendung der Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften wird heute (auch im Hinblick auf Computer-Assistenten) in Ausbildung und Praxis werden daher die Methoden der analytischen Mathematik zunehmend durch numerische, computergestützte Rechenverfahren ergänzt.

Das **Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren** enthält von etablierten Hochschullehrern, Wissenschaftlern und in der Praxis arbeitenden Ingenieuren unter dessen Gesichtspunkt erarbeitet und zusammengestellt.

Das Taschenbuch umfasst:

- elementare Schulmathematik
- Basiswissen für Abmaturanten und Abmaturierende, Fachoberschüler und Studienräte im Einzelstudium
- Aufbauwissen für langjährige Studierende
- den mathematischen Background für alle Ingenieure und Wissenschaftleroberstufe

Wozu?

- komplettes **Nachschlagewerk** für die Berufspraxis
- als leicht verfügbare Informationsquelle für Klassen- und Prüfungen
- schneller Hilfenotruf beim Lösen von Problemen auf Übungsaufgaben

Was ist enthalten und wie wird es dargestellt?

- alle wesentlichen **Begriffe, Formeln, Regeln und Sätze**
- zahlreiche **Beispiele und praktische Anwendungen**
- Hinweise auf **Fehlerquellen**, wichtige **Trends und Querbeziehungen**
- analytische und **numerische Lösungsverfahren** im strikten Vergleich
- **Programmsequenzen** in **PASCAL, C++**

Struktur und Besonderheiten

Die Autoren gewannen die bestmögliche Informationsdichte und beschließen die benutzerfreundliche Gestaltung des Taschenbuchs:

- **strukturiertes Inhaltsverzeichnis**
- **Übersichten und häufige Lesereisen** für den schnellen Zugriff
- **umfassendes Stichwortverzeichnis**

Neuerungen und Überarbeitungen in der vierten Auflage

Graphen- und Bäume, Wellen, Fuzzy-Logik, Neuronale Netze, Betriebssysteme sowie die Programmiersprachen PASCAL, C, C++, FORTRAN und eine Einführung in die Computeralgebra mit MATHEMATICA und MAPLE.

Leserkontakt

Wir möchten auch Sie als Nutzer des Taschenbuchs hören: Vorschläge und Ergänzungen zu dem Werk sind willkommen.

Autoren und Verlag: Hanser, Deutscher
Christiane 43
D-60496 Frankfurt am Main
E-Mail: service@hanser.de
<http://www.hanser.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlenrechnen / Arithmetik und Numerik	1
1.1	Mengen	1
	Übersetzung von Mengen	1
	Mengenoperationen	2
	Gesetze der Mengenlehre	3
	Abbildung und Funktion	4
1.2	Zahlensysteme	6
	Dekadisches Zahlensystem	6
	Weitere Zahlensysteme	8
	Übersetzung in Rechner	8
	Homer-Scheitler zur Zahlensystemlehre	11
1.3	Natürliche Zahlen	12
	Vollständige Induktion	8
	Vektoren und Euklid. Normierung	9
	Rechnung mit natürlichen Zahlen	9
1.4	Ganze Zahlen	11
1.5	Rationale Zahlen / pythagoreische Zahlen	11
	Dezimalbrüche	11
	Brüche	12
	Rechnen mit Brüchen	13
1.6	Rechnen mit Quotienten	14
	Prozent	14
	Doppelt	15
1.7	Fünfstellige Rechen	16
	Pyramidenrechnung	16
	Zins- und Zinseszins	17
	Tilgungsrechnung	18
	Rabattrechnung	17
	Abschreibung	17
1.8	Irrationale Zahlen	18
1.9	Reelle Zahlen	19
1.10	Komplexe Zahlen	19
	Körper der komplexen Zahlen	20
1.11	Rechnen mit reellen Zahlen	20
	Vermischen und Mischen	20
	Ordnungssysteme	21
	Intervalle	21
	Runde und Abschneiden	21
	Rechnen mit Intervallen	22
	Klammerung	22
	Addition und Subtraktion	24
	Satzesummen	24
	Multiplikation und Division	25
	Produktsummen	25
	Potenzen und Wurzeln	25
	Exponential- und Logarithmen	26
1.12	Binomischer Satz	27
	Binomische Formeln	27
	Binomialkoeffizienten	27

	Planisches Dreieck	51
	Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	52
	Entwicklung von Potenzreihen	53
2	Gleichungen und Ungleichungen (Algebra)	54
2.1	Grundlegende algebraische Begriffe	54
	Nomenklatur	54
	Gruppen	55
	Ring	56
	Körper	56
	Vektorräume	56
	Algebra	57
2.2	Gleichungen mit einer Unbekannten	57
	Elementare Nullstellensatzformeln	57
	Übersicht der verschiedenen Gleichungsarten	58
2.3	Lineare Gleichungen	59
	Gewöhnliche lineare Gleichungen	59
	Lineare Gleichungen in gebrochener Form	59
	Lineare Gleichungen in ganzzahliger Form	59
2.4	Quadratische Gleichungen	59
	Quadratische Gleichungen in gebrochener Form	60
	Quadratische Gleichungen in ganzzahliger Form	60
2.5	Kubische Gleichungen	60
2.6	Gleichungen vierten Grades	61
	Algebraische Gleichung vierten Grades	62
	Binomische Gleichungen	62
	Systematische Gleichungen vierten Grades	62
2.7	Gleichungen beliebigen Grades	63
	Polynomdivision	63
2.8	Gebrochenrationale Gleichungen	64
2.9	Exponentiale Gleichungen	64
	Wurdegleichungen	64
	Permutationen	67
2.10	Transzendente Gleichungen	67
	Exponentialgleichungen	67
	Logarithmische Gleichungen	68
	Trigonometrische (goniometrische) Gleichungen	68
2.11	Gleichungen mit Dreiecken	68
	Übersicht mit einem Beträgsymbol	67
	Gleichungen mit mehreren Beträgsymbolen	67
2.12	Logikgleichungen	68
	Aussagenumformungen für Logikgleichungen	68
	Addition und Multiplikation von Logikgleichungen	68
2.13	Numerische Lösung von Gleichungen	68
	Grafische Lösung	68
	Iterative Näherung	70
	Dekamerverfahren und Regula Falsi	70
	Newton-Verfahren	71
	Newton-Raphson-Verfahren	72
3	Geometrie und Trigonometrie der Ebene	74
3.1	Geometrie	74
3.2	Grundformeln	75
	Streckenverhältnisse	75

4.10	Wärmekörper	99
	Ellipsoid	99
	Klotzmannsformel	99
	Rohmshypothese	99
	Ionen (Fest)	99
	Ionen (Ring)	99
4.11	Praktische Geometrie	99
	Mittelpunkt- und Schwerpunktsatz	99
	Kombination ebener und räumlicher Objekte	99
	Handwerk, Darstellung	99
	Cavalieri-Menge	100
	Koch-Kurve	100
	Kathische Schmelzflüsse	100
	Sierpinski-Dreieck	100
	Brotvermehring-Algorithmus	101
5	Funktionen	102
5.1	Folgen, Reihen und Funktionen	102
	Folgen und Reihen	102
	Eigenschaften von Folgen, Grenzwert	102
	Funktionen	104
	Kombination von Funktionen	106
	Grenzwert und Stetigkeit	107
5.2	Kontinuitätssätze	108
	Definitionsbereich	108
	Symmetrie	108
	Verhalten im Unendlichen	108
	Differenzierbarkeit und Umkehrfunktionen	108
	Werten	111
	Vollständige Induktion	111
	Steigungswinkel, Extrema	112
	Krümmung	113
	Wendepunkt	113
5.3	Stetigkeit der Funktionen	113
5.4	Kontinuierliche Funktionen	120
5.5	Springfunktionen	122
5.6	Druckfunktionen	123
5.7	Differentialrechnung	129
5.8	Qualitative Funktionentheorie: Kurvenlängen	131
5.9	Lineare Funktionen – Gerade	132
5.10	Quadratische Funktionen – Parabel	133
5.11	Kubische Funktionen	142
5.12	Polynomdivision, Teilweise Division	146
5.13	Polynomdivision, Teilweise Division	146
5.14	Darstellung von Polynomen und ungerade Polynome	148
	Normale und Produktform	151
	Trennungssatz	154
	Scheitelpunktform	155
	Scheitelpunktform	155
	Eigenschaften	155
	Basispolynom (1. Stufe)	155
	Spezielle Polynome	161
5.15	Hyperbel	167
5.16	Reelle und komplexe Funktionen	170

5.17	Potenzialfunktion mit negativer Exponenten	111
5.18	Quadrat einer Potenzfunktion	111
	Potenzfunktion und Potenzfunktionsgleichung	111
	Potenz-Approximation	111
5.19	Quadratwurzelfunktion	111
5.20	Wurzelfunktionen	111
5.21	Potenzfunktion mit gebrochenem Exponenten	111
5.22	Wurde von rationalen Funktionen	111
	Kugelfunktion	111
5.23	Logarithmusfunktion	111
5.24	Exponentialfunktion	111
5.25	Hyperbolicfunktionen von Potenzen	111
5.26	Hyperbolische Eikon- und Kosinusfunktion	111
5.27	Hyperbolische Tangens- und Cotangensfunktion	111
5.28	Schön hyperbolischer und Kosinus hyperbolischer	111
5.29	Arctangens hyperbolischer und Arctangens hyperbolischer	111
5.30	Arctangens hyperbolischer und Arctangens hyperbolischer	111
5.31	Arctangens hyperbolischer und Arctangens hyperbolischer	111
5.32	Sinus- und Kosinusfunktion	111
	Übertragung von Sinusfunktion	111
	Potenzielle Funktionen	111
5.33	Tangens und Cotangens	111
5.34	Schön und Kosinus	111
5.35	Arctangens und Arctangens	111
5.36	Arctangens und Arctangens	111
5.37	Arctangens und Arctangens	111
5.38	Arctangens und Arctangens	111
5.39	Arctangens und Arctangens	111
5.40	Arctangens und Arctangens	111
5.41	Arctangens und Arctangens	111
5.42	Arctangens und Arctangens	111
5.43	Arctangens und Arctangens	111
5.44	Arctangens und Arctangens	111
5.45	Arctangens und Arctangens	111
5.46	Arctangens und Arctangens	111
5.47	Arctangens und Arctangens	111
5.48	Arctangens und Arctangens	111
5.49	Arctangens und Arctangens	111
5.50	Arctangens und Arctangens	111
5.51	Arctangens und Arctangens	111
5.52	Arctangens und Arctangens	111
5.53	Arctangens und Arctangens	111
5.54	Arctangens und Arctangens	111
5.55	Arctangens und Arctangens	111
5.56	Arctangens und Arctangens	111
5.57	Arctangens und Arctangens	111
5.58	Arctangens und Arctangens	111
5.59	Arctangens und Arctangens	111
5.60	Arctangens und Arctangens	111
5.61	Arctangens und Arctangens	111
5.62	Arctangens und Arctangens	111
5.63	Arctangens und Arctangens	111
5.64	Arctangens und Arctangens	111
5.65	Arctangens und Arctangens	111
5.66	Arctangens und Arctangens	111
5.67	Arctangens und Arctangens	111
5.68	Arctangens und Arctangens	111
5.69	Arctangens und Arctangens	111
5.70	Arctangens und Arctangens	111
5.71	Arctangens und Arctangens	111
5.72	Arctangens und Arctangens	111
5.73	Arctangens und Arctangens	111
5.74	Arctangens und Arctangens	111
5.75	Arctangens und Arctangens	111
5.76	Arctangens und Arctangens	111
5.77	Arctangens und Arctangens	111
5.78	Arctangens und Arctangens	111
5.79	Arctangens und Arctangens	111
5.80	Arctangens und Arctangens	111
5.81	Arctangens und Arctangens	111
5.82	Arctangens und Arctangens	111
5.83	Arctangens und Arctangens	111
5.84	Arctangens und Arctangens	111
5.85	Arctangens und Arctangens	111
5.86	Arctangens und Arctangens	111
5.87	Arctangens und Arctangens	111
5.88	Arctangens und Arctangens	111
5.89	Arctangens und Arctangens	111
5.90	Arctangens und Arctangens	111
5.91	Arctangens und Arctangens	111
5.92	Arctangens und Arctangens	111
5.93	Arctangens und Arctangens	111
5.94	Arctangens und Arctangens	111
5.95	Arctangens und Arctangens	111
5.96	Arctangens und Arctangens	111
5.97	Arctangens und Arctangens	111
5.98	Arctangens und Arctangens	111
5.99	Arctangens und Arctangens	111
5.100	Arctangens und Arctangens	111

6. Vektorrechnung

6.1	Vektorgeometrie	111
	Vektoren und Matrizen	111
	Spezielle Vektoren	111
	Mengenoperationen von Vektoren und Matrizen	111
	Vektoraddition	111
	Vektorsubtraktion	111
	Skalarprodukt	111
	Längen (L ₁ / Abstände) von Vektoren	111
	Basis	111
6.2	Hermitesche Produkte (inner Product)	111
	Skalarprodukt	111
	Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts	111
	Orthogonalität von Vektoren	111
	Kreuzprodukt	111
	Anwendung des Kreuzprodukts (Hyperfläche)	111
6.3	Vektorprodukt zweier Vektoren	111
	Eigenschaften des Vektorprodukts	111
6.4	Mehrfachprodukte von Vektoren	111
	Spaltenprodukt	111

7	Koordinatensysteme	97
7.1	Koordinatensysteme in zwei Dimensionen	97
	Kartesische Koordinaten	97
	Polarkoordinaten	99
	Umwandlungen zwischen 2-D-Koordinatensystemen	99
7.2	2-D-Koordinatensystemrotation	99
	Parametrisierung (Translation)	99
	Drehung (Rotation)	99
	Spiegelung (Reflexion)	99
	Skalierung	101
7.3	Koordinatensysteme in drei Dimensionen	101
	Kartesische Koordinaten	101
	Zylinderkoordinaten	101
	Kugelkoordinaten	102
	Umwandlungen zwischen dreidimensionalen Koordinatensystemen	102
7.4	Koordinatentransformationen in drei Dimensionen	102
	Translation	102
	Drehung (Rotation)	103
7.5	Äquivalenz in der Computergrafik	104
7.6	Transformations	104
	Objektdefinition und Objektsuche	104
	Homogene Koordinaten	106
	2-D-Translation der homogenen Koordinaten	107
	2-D-Skalierung der homogenen Koordinaten	107
	2-D-Translation der homogenen Koordinaten	108
	2-D-Skalierung der homogenen Koordinaten	108
	2-D-Rotation von Punkten mit homogenen Koordinaten	108
	Positionierung eines Objekts im Raum	109
	Position von Objekten mit einer Sichtlinie-Achse im Raum	109
	Translation von Bewegungsflächen	110
	Skalierung	110
	Translation von Koordinatensystemen	110
	Translation eines Koordinatensystems	110
	Rotationen: Koordinatensysteme um eine Achse	111
7.7	Projektion	111
	Geometrische	111
	Projektionsmatrix	111
	Geometrische	111
	Allgemeine Projektierung von Polygonen	112
7.8	Weitere Vorgehen: Transformations	112
8	Analytische Geometrie	114
8.1	Erzeuge des Erzeug	114
	Abschnitt eines Punktes	114
	Teilung eines Strecke	114
	Flächen eines Dreiecks	114
	Einheitliche Karte	114
8.2	Geraden	114
	Gleichungssysteme der Geraden	114
	Parametrische Normalform	114
	Schnittpunkt von Geraden	114
	Winkel zwischen Geraden	114
	Parallelität und senkrechte Geraden	114

4.3	Kreis	155
	Kreisgleichungen	155
	Kreis und Gerade	156
	Kreisbogen	156
	Kreisbogenlänge	156
4.4	Ellipse	156
	Gleichungstypen der Ellipse	157
	Brennpunkteigenschaften der Ellipse	157
	Durchmesser der Ellipse	158
	Exzentrizität	158
	Kreisform der Normale der Ellipse	158
	Krümmung der Ellipse	158
	Ellipsenflächen und Ellipsenwinkel	158
4.5	Parabel	159
	Gleichungstypen der Parabel	159
	Brennpunkteigenschaften der Parabel	160
	Parabelachsen	160
	Exzentrizität	160
	Kreisform einer Parabel	161
	Parabelflächen und Parabelbogenlänge	161
	Parabel und Gerade	161
4.6	Hyperbel	161
	Gleichungstypen der Hyperbel	162
	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	162
	Exzentrizität	162
	Kreisform Hyperbels und Durchmesser	162
	Krümmung einer Hyperbel	162
	Flächen einer Hyperbel	162
	Hyperbel und Gerade	162
4.7	Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte	162
	Form der Kegelschnitte	162
	Asymptotenbestimmung	162
	Geometrische Konstruktion (Kegelschnitt)	162
	Leitstrahlensatz	162
	Polargleichung	162
4.8	Geraden im Raum	162
	Abstand zweier Punkte	162
	Abstand einer Strecke	162
	Abstand einer Ebene	162
4.9	Geraden im Raum	162
	Parametrisierung einer Geraden	162
	Schnittpunkt zweier Geraden	162
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden	162
	Winkel der Loten (Lotgerade)	162
	Winkel zwischen Punkt und Gerade	162
	Winkel zweier Geraden	162
4.10	Ebenen im Raum	162
	Parametrisierung der Ebene	162
	Koordinatendarstellung der Ebene	162
	Normalenvektor der Ebene	162
	Entfernung	162
	Abstand Punkt-Ebene	162
	Schnittwinkel Geraden-Ebene	162
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen	162
	Lotgerade (bei Loten (Lotgerade))	162

	Spezialfall	151
	Arbeitsblätter zusätzlicher Übungen	167
	Schrittweite einer Ebene	182
8.1	Flächen zweiter Ordnung in Normalform	187
	Ellipsoid	193
	Hyperboloid	193
	Kegel	194
	Paraboloid	194
	Zylinder	195
8.17	Allgemeine Fläche zweiter Ordnung	195
	Allgemeine Gleichung	195
	Hauptachsentransformation	196
	Gestalt einer Fläche zweiter Ordnung	196
9	Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme	198
9.1	Matrizen	198
	Zeilen- und Spaltenvektoren	199
9.2	Spezielle Matrizen	199
	Transponierte, äquivalente und aufsteigende Matrizen	199
	Quadratische Matrizen	201
	Diagonalmatrizen	201
	Blockdiagonalmatrizen	201
9.3	Operationen mit Matrizen	201
	Addition und Subtraktion von Matrizen	201
	Multiplikation einer Matrix mit Skalarem Faktor λ	202
	Multiplikation von Vektoren, Skalarprodukt	202
	Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	202
	Multiplikation von Matrizen	202
	Rechenregeln der Matrixmultiplikation	202
	Multiplikation mit einer Diagonalmatrix	203
	Matrixmultiplikation nach dem Fark-Schema	203
	Zeilensummen- und Spaltensummeneigenschaften	203
9.4	Determinanten	203
	Zweireihige Determinanten	203
	Allgemeines Rechenregeln für Determinanten	204
	Determinantenwert Null	205
	Dreireihige Determinanten	206
	Determinanten-Defizit (\pm oder 0)-Defizit	206
	Berechnung n -reihiger Determinanten	209
	Reguläre und inverse Matrix	210
	Berechnung der inversen Matrix mit Determinanten	210
	Ring einer Matrix	211
	Bestimmung des Ranges der Elementarmatrizen	212
9.5	Lineare Gleichungssysteme	212
	Systeme von zwei Gleichungen (mit zwei Variablen)	212
9.6	Numerische Lösungsverfahren	213
	Gaußscher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme	213
	Vorkonditionierung	213
	Präkonditionierung	213
	Row- und Column-Pivoting	214
	L.M. Zerlegung	215
	Linienfaktoren von $n \times n$ -Gleichungssystemen	215
	Gauß-Jordan-Verfahren von Matrizeninversion	215
	Beziehung der inversen Matrix A^{-1}	215

3.7	Strenge Lösung, innere Gleichgewichte	261
	Gauss-Jordan-Verfahren (Gauß)	266
	Elementarzeilenoperationen (Gauß-Seidel)	266
	Kovarianzmatrix für innere Verfahren	266
	Speicherung der Koeffizientenmatrix	266
3.8	Tabelle der Lösungsmethoden	60
3.9	Eigenwertgleichungen	401
4.10	Systeme von Differentialgleichungen und Lineare Optimierung	404
	Anfangswertprobleme	404
	Mathematische Modellierung	405
	Maximaler Ertragswert der inneren Optimierung	406
	Umformung von Differentialgleichungen in Gleichungen, Schopenhauer'sches	406
	System linearer Differentialgleichungen mit zwei Variablen, grafische Lösung	406
	Störansatzmethode, Störansatzgewinn	407
	Dualität in der inneren Optimierung	410
4.11	Erweiterung	410
	Bilanzrechnung für Transport	411
10	Lineare Algebra – Anwendung in der Schaltalgebra	413
10.1	Grundbegriffe	413
	Anfangs- und Wertensysteme	413
	Nullvektorsystem	413
10.2	Rekurrenz-Verfahren	414
	Nagel'sches Verfahren	414
	Kombination von und	414
	Differentialgleichungen	414
	Kombination	415
10.3	Rekurrenz-Verfahren	416
	Verfahren	417
10.4	Normalformen	418
	Differentialgleichungen	418
	Kombination Normalform	418
	Differentialgleichungen durch Normalform	418
10.5	Kombination von KV-Verfahren	420
	Anwendung von KV-Verfahren	420
	Erweiterung einer Funktion in ein KV-Verfahren	421
	Minimierung mit Hilfe von KV-Verfahren	421
10.6	Minimierung nach Quine mit McCluskey	421
11	Graphen und Algorithmen	425
11.1	Graphen	425
	Grundbegriffe	425
	Darstellung von Graphen	426
	Bäume	427
11.2	Suchalgorithmen	428
11.3	Netzwerke	428
	Fluss in Netzwerken	428
	Euklidischer Zug und Hamiltonsche Wege	428
12	Differentialrechnung	430
12.1	Ableitung einer Funktion	430
	Differential	430
	Differenzierbarkeit	431
12.2	Differentialrechnung	431

Ableitung zusammengesetzter Funktionen	412
Ableitung trigonometrischer Funktionen	417
Ableitung hyperbolischer Funktionen	422
Kettenregel	423
Potenzregel	423
Potenzgesetz	423
Summenregel	423
Produktregel	425
Quotientenregel	425
Kettenregel	428
Logarithmisches Ableitung von Funktionen	433
Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	437
Ableitung von Funktionen in Polarkoordinaten	437
Ableitung eines impliziten Funktios	438
Ableitung des Umkehrwertes	439
Tabelle der Differentiationsregeln	441
11.3 Mittelwertsatz	447
Satz von Rolle	448
Mittelwertsatz der Differentialrechnung	450
Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	454
11.4 Höhere Ableitungen	455
Steigungswinkel, Extremum	460
Konkavität	461
Wendepunkt	461
11.5 Notwendige Kriterien zur Differentiation	462
Glatte Differentiation	463
Nichtglatte Differentiation	462
11.6 Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	467
Partielle Ableitung	468
Totales Differential	469
Extrema von Funktionen in zwei Dimensionen	473
Extrema von Nebenbedingungen	480
11.7 Anwendungen der Differentialrechnung	483
Bestimmung unbekannter Annäherung	484
Kontingenzkoeffizient	484
Extremumprobleme	485
Fremderleitung	487
Nullstellenansätze nach Newton	489
12 Differentialgeometrie	491
12.1 Ebene Kurven	497
Darstellung von Kurven	497
Ableitung in impliziter Darstellung	497
Ableitung in Parameterdarstellung	497
Ableitung in Polarkoordinaten	497
Bogenlänge einer Kurve	501
Tangenten, Normale	507
Krümmung einer Kurve	515
Evoluten und Evoluten	519
Wendepunkte, Scheitel	523
Inhalt des Parabel	527
Arcuaten	530
Entwicklung einer Kurvenlinie	530
12.2 Raumkurven	537