Technische Mechanik

Band 1: Statik

EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Technische Mechanik

Band 1: Statik

von

Peter Hagedorn
Jörg Wallaschek

6., vollständig überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56887

Autoren:

Prof. Dr. Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Fach Technische Mechanik in Lehre und Forschung. Er hat jahrzehntelang Vorlesungen über Technische Mechanik und über Technische Schwingungslehre für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen gehalten.

Professor Dr.-Ing. Jörg Wallaschek ist Direktor des Institutes für Dynamik und Schwingungen an der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover und vertritt die Fächer Technische Mechanik und Maschinendynamik in der Fakultät für Maschinenbau.

6., vollständig überarbeitete Auflage 2014

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5689-4

http://www.europa-lehrmittel.de
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur fünften Auflage

Die drei Bände zur Technischen Mechanik von Peter Hagedorn haben inzwischen große Verbreitung als Lehrbücher an Universitäten und Fachhochschulen gefunden. Mit der vorliegenden 5. Auflage ist Jörg Wallaschek als Ko-Autor dazu gekommen.

Ein wesentlicher Teil der Überarbeitung der neuen Auflage durch den Erstautor erfolgte während Gastaufenthalten am Department of Mechanical Engineering der University of Canterbury, Christchurch, Neuseeland. Der Erstautor dankt dem Department für die freundliche Aufnahme und dafür, dass das Department die Infrastruktur zur Verfügung gestellt hat.

Das bewährte Konzept zur Einführung der Grundbegriffe und mathematischen Hilfsmittel wurde beibehalten. Text, Abbildungen und Aufgaben wurden behutsam überarbeitet und an einigen Stellen ergänzt, um das Buch noch besser auf die Anforderungen der Ingenieur-Ausbildung abzustimmen. Die Abbildungen wurden farbig gestaltet, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Bei der Erstellung der Zeichnungen und des druckfertigen Manuskripts wurden wir von Herrn M. Sc. Henrik Westermann und Herrn Dipl. Ing. Martin Zimmermann sowie Frau Parsamanesh, Frau Wiechens und Herrn Ohrdes tatkräftig unterstützt, wofür wir herzlich Dank sagen.

Dem Verlag Europa-Lehrmittel, der die Bände in der „Edition Harri Deutsch" weiterführt, danken wir für die gute Zusammenarbeit.

Darmstadt / Hannover, im August 2014

Peter Hagedorn
hagedorn@dyn.tu-darmstadt.de

Jörg Wallaschek
mechanik@wallaschek.eu

Vorwort zur vierten Auflage

Dieser Band entspricht dem ersten Teil einer dreisemestrigen Vorlesung, die ich seit zirka 30 Jahren für Hörer verschiedener Fachrichtungen an der Technischen Universität Darmstadt halte; zwei weitere Bände behandeln die *Festigkeitslehre* und die *Dynamik*. Niveau und Aufbau der drei Bücher orientieren sich an den Lehrveranstaltungen, wie sie besonders für Ingenieur-Studenten an praktisch allen Hochschulen angeboten werden.

Die unterschiedliche Vorbildung, die unsere Studenten von der Schule mitbringen, hat zur Folge, dass in den Vorlesungen für die Erstsemester Grundbegriffe und mathematische Hilfsmittel sehr elementar eingeführt werden müssen. Ich war in dem vorliegenden Buch bemüht, das Gebäude der Mechanik auf dem soliden Fundament dieser Grundlagen systematisch aufzubauen. Die freundliche Aufnahme des Buches, die sehr schnell Neuauflagen notwendig machte, zeigt mir, dass dies zumindest teilweise gelungen ist.

Dank des Einsatzes der Herren Dipl.-Ing. Daniel Hochlenert und Dipl.-Ing. Florian Fischer war es möglich, in den vergangenen Monaten die gesamte Reihe von Grund auf zu überarbeiten, sodass die drei Bände jetzt zeitgleich in einem neuen Layout erscheinen, wobei die Bände 1 und 2 nun in der 4. Auflage und der dritte Band in der 3. Auflage vorliegen. Dabei wurden in allen drei Bänden zahlreiche Verbesserungen, neue Beispiele und – bei der numerischen Behandlung von Aufgaben mittels MATLAB, insbesondere in den Bänden 1 und 3 – eine Reihe von Ergänzungen vorgenommen. Viele dieser Änderungen gehen direkt auf Anregungen der Herren Hochlenert und Fischer zurück, die auch die Erstellung der reproduktionsfähigen Vorlagen überwacht haben. Ich danke beiden für den unermüdlichen Einsatz, ohne sie wäre die Überarbeitung in dieser kurzen Zeit überhaupt nicht möglich gewesen. Manche Kollegen und viele Studenten haben mich in der Vergangenheit auf mögliche Verbesserungen hingewiesen, die hier eingearbeitet wurden. Ihnen allen sei an dieser Stelle gedankt.

Dem Verlag Harri Deutsch danke ich für die bewährt gute Zusammenarbeit.

Peter Hagedorn

Inhaltsverzeichnis

Die mit * gekennzeichneten Abschnitte können bei einer ersten Lektüre weggelassen werden.

1 Einleitung

1.1 Was ist Technische Mechanik?

Nach KIRCHHOFF[1] ist die Mechanik die *Lehre von den Bewegungen und den Kräften*; sie ist daher ein Teilgebiet der Physik. Die wichtigsten Grundbegriffe der Mechanik sind die physikalischen Begriffe *Kraft, Zeit* und *Masse*, von denen andere Begriffe wie z. B. *Impuls, Energie, Leistung, Drall* usw. abgeleitet werden. Mit diesen Begriffen werden wir uns noch ausführlich auseinander setzen.

Die KIRCHHOFFsche Definition (Mechanik als Lehre der Bewegungen und der Kräfte) legt eine erste Unterteilung der Mechanik nahe. Ein trivialer Sonderfall der Bewegung ist nämlich der der Ruhe und des Gleichgewichts. Der Teil der Mechanik, der sich mit diesem Sonderfall befasst, ist die *Statik*. Die Statik ist also eine *Lehre des Gleichgewichts von Kräften*; man kann sie auch als eine *Geometrie der Kräfte* bezeichnen.

Will man den Einfluss von Kräften auf die Bewegung von Körpern untersuchen, so setzt das voraus, dass man die Bewegungen beschreiben kann. Dies ist die Aufgabe der *Kinematik*: Die Kinematik beinhaltet die *Geometrie der Bewegung*. Der Teil der Mechanik schließlich, in dem man den Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungen behandelt, wird als *Kinetik* oder *Dynamik* bezeichnet. Obwohl Dynamik eigentlich „Lehre von den Kräften“ bedeutet, verwenden wir im folgenden diesen Ausdruck als Synonym für Kinetik, wobei wir uns dem internationalen Sprachgebrauch anschließen (engl.: „dynamics“). Damit liegt eine erste Gliederung der Mechanik in Statik, Kinematik und Dynamik vor.

In der Mechanik werden Körper untersucht, die fest, flüssig oder gasförmig sein können, und dies legt eine Gliederung der Mechanik nach dem Aggregatzustand der Körper nahe. Unter den festen Körpern unterscheiden wir zwischen den ideal unverformbaren, d. h. den starren, und den verformbaren Körpern (das vorliegende Buch behandelt mit wenigen Ausnahmen die *Statik starrer Körper*). Kräfte können feste Körper auf verschiedene Arten verformen, z. B. elastisch oder plastisch und eine entsprechende Gliederung der Mechanik bietet sich an. Eine Verformung wird als *elastisch* bezeichnet, wenn sie bei Zurücknahme der Kräfte wieder vollständig verschwindet, als *plastisch*, wenn sie auch nach Entfernung dieser Kräfte bestehen bleibt.

Ein mathematischer Aufbau der Mechanik, wie er in der *Theoretischen Mechanik* und in der *Analytischen Mechanik* angestrebt wird, wobei das ganze Gebäude der Mechanik mit mathematischer Strenge auf den durch die Grundgesetze oder

[1] Gustav Robert KIRCHHOFF, deutscher Physiker, *1824 in Königsberg, †1887 in Berlin.

Axiome gebildeten Fundamenten aufbaut, ist für den Ingenieur nicht unbedingt notwendig. Die *Technische Mechanik* hat zum Ziel, geeignete Verfahren für die Berechnung technischer Konstruktionen aufzuzeigen. Sie unterscheidet sich von der *Theoretischen Mechanik* in der Zielrichtung und auch in den Methoden; auf den streng mathematischen Aufbau wird dabei weniger Wert gelegt. So werden wir auch in diesem Buch Beweise gelegentlich nur skizzieren, wobei wir allerdings immer die logischen Zusammenhänge klären.

Betrachten wir z. B. die *Elastizitätstheorie*, also die Mechanik elastischer Körper. Sie kann als mathematische Disziplin angesehen werden. Zur Lösung technischer Probleme genügt oft eine stark vereinfachte *Elastomechanik*, die zwar nicht mehr in allen Punkten mathematisch widerspruchsfrei ist, jedoch bei sinnvoller Anwendung vernünftige Lösungen für technische Probleme liefert. Man bezeichnet diese vereinfachte, für Ingenieurprobleme geeignete Theorie auch als *Festigkeitslehre* (obwohl diese Bezeichnung wenig glücklich gewählt ist). Die Festigkeitslehre ist Gegenstand des zweiten Bandes (TM2) des vorliegenden Buches. Der dritte Band (TM3) behandelt die Dynamik.

Zu erwähnen ist noch die Abgrenzung der so genannten *Klassischen Mechanik*, die in der Regel für die Behandlung ingenieurmäßiger Probleme ausreicht, von der EINSTEINschen[2] *relativistischen Mechanik*, die für den Fall großer Geschwindigkeiten gilt (d. h. für Geschwindigkeiten, die nicht mehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind), und von der *Quantenmechanik*, die den Fall sehr kleiner Abmessungen und Teilchen behandelt (z. B. Unschärferelation).

Die Mechanik als Wissenschaft ist kaum älter als 300 Jahre: Erste wissenschaftliche Untersuchungen im modernen Sinn gehen auf GALILEI[3] zurück, der sich u. a. mit den Fallgesetzen und mit der Bewegung der Himmelskörper befasste. KEPLER[4] führte umfassende, systematische Beobachtungen der Planetenbewegungen durch, die sich in den bekannten KEPLER*schen Gesetzen* niederschlugen. NEWTON[5] gelang es u. a. diese von KEPLER gefundenen Gesetzmäßigkeiten auf einfache, allgemein gültige Naturgesetze zurückzuführen: Wir verdanken ihm nicht nur das *Gravitationsgesetz*, sondern er ist auch einer der Väter der modernen Differenzial- und Integralrechnung. Sein 1687 erschienenes Werk „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ ist ein Markstein in der Entwicklung der modernen Wissenschaften. Die Brüder Jacob[6] und Johann[7] BERNOULLI lösten eine Reihe wichtiger Grundprobleme der Mechanik, und mit den Arbeiten von EULER[8] waren wesentliche

[2] Albert EINSTEIN, deutscher Physiker, *1879 in Ulm, †1955 in Princeton.
[3] Galileo GALILEI, italienischer Mathematiker, Philosoph und Physiker, *1564 in Pisa, †1642 in Arceti bei Florenz.
[4] Johannes KEPLER, deutscher Astronom, *1571 in Weil (heute Weil der Stadt), †1630 in Regensburg.
[5] Sir Isaac NEWTON, britischer Physiker und Astronom, *1643 in Woolsthorpe, †1727 in Kensington (heute zu London gehörend).
[6] Jacob BERNOULLI, schweizer Mathematiker, *1655 in Basel, †1705 ebenda.
[7] Johann BERNOULLI, schweizer Mathematiker, *1667 in Basel, †1748 ebenda.
[8] Leonhard EULER, schweizer Mathematiker, *1707 in Basel, †1783 in St. Petersburg.

Teile der klassischen Mechanik starrer und auch verformbarer Körper abgeschlossen. Daniel Bernoulli[9] ist einer der Begründer der Hydromechanik; er löste auch das Problem der Stabknickung sowie Eigenwertprobleme der Schwingungslehre und der Elastizitätstheorie. D'Alembert[10] formulierte das nach ihm benannte Prinzip der Dynamik, das sich dann in voller Allgemeinheit in der „*Mécanique Analytique*" Lagranges[11] wiederfindet. In diesem 1788 erschienenen Werk gelang es Lagrange, die Mechanik der Punktmassen und der starren Körper in umfassender Weise mit mathematischer Strenge und Abstraktion darzustellen: Lagrange war stolz darauf, dass sein Buch keine einzige Abbildung enthielt!

In den Naturwissenschaften ist man bemüht, möglichst viele Phänomene auf einige wenige *Naturgesetze* zurückzuführen, und in der Mechanik gelang es relativ früh, solche Gesetze als mathematische Beziehungen zwischen den relevanten physikalischen Größen anzugeben. Damit war dann die Herleitung spezieller Ergebnisse oder die Berechnung bestimmter Bewegungen im wesentlichen ein mathematisches Problem, und deshalb haben sich viele Teilgebiete der Mathematik, wie z. B. die Differenzial- und Integralrechung parallel zur Mechanik entwickelt: Man benötigte sie zur Lösung mechanischer Aufgaben.

Einige der für den Ingenieur wichtigen Teilgebiete der Mechanik sind klassische und seit langem abgeschlossene Teilbereiche der Physik. Andere sind heute hochaktuelle Forschungsgebiete, dies gilt z. B. für das Turbulenzproblem der Strömungsmechanik, die Rissausbreitung und damit zusammenhängende Materialeigenschaften (in der Bruchmechanik), die Stabilität periodischer Bewegungen, oder allgemeiner, die geometrischen Eigenschaften der Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen (in der Dynamik) usw. Diese Liste ließe sich beliebig erweitern. Man erkennt unschwer, dass es sich bei diesen Themen um wichtige Probleme handelt.

Die besondere Bedeutung der Technischen Mechanik für den Maschinenbau- und den Bauingenieur ist offensichtlich: Maschinen, Fahrzeuge und Gebäude sind so zu konstruieren, dass sie den zu erwartenden Belastungen standhalten und bestimmte Bewegungsabläufe ausführen können. Darüber hinaus nimmt die Technische Mechanik in der Ingenieurausbildung eine *Mittlerrolle zwischen Mathematik und Technik* ein: In der Mechanik kann sowohl die Anwendung mathematischer Methoden als auch das für den Ingenieur so wichtige Erstellen von Rechenmodellen auf einsichtige und anschauliche Weise geübt werden.

In der Ausbildung der Ingenieure ist die Technische Mechanik meist auch das Fach in dem die Studierenden zum ersten Mal lernen, wie Theorien entwickelt werden. Basierend auf grundlegenden Modellannahmen werden Systembeschreibungen entwickelt, mit denen ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen untersucht werden können.

[9] Daniel Bernoulli, schweizer Mathematiker, Physiker und Mediziner, Sohn von Johann B., *1700 in Groningen, †1782 in Basel.

[10] Jean le Rond D'Alembert, französischer Mathematiker, Philosoph und Literat, *1717 in Paris, †1783 ebenda.

[11] Joseph Louis de Lagrange, Mathematiker, *1736 in Turin, †1813 in Paris.

Das typische Vorgehen bei der Lösung physikalisch-technischer Probleme lässt sich nach Magnus[12] in folgende Schritte gliedern:

1. Abgrenzung und Formulierung der Aufgabe.
2. Vereinfachung des Problems durch Fortlassen alles Unwesentlichen, d. h. „Idealisieren“. Gemeint ist hier das von Lord Bacon[13] beschriebene „dissecare naturam“, in dem *Ersatzmodelle* erstellt und Bedingungen formuliert werden, unter denen die Modelle gültig sind.
3. Anwendung physikalischer Gesetze; dies führt auf ein *mathematisches Modell.*
4. Lösung des mathematischen Problems (mit analytischen und/oder numerischen Verfahren).
5. Rückübertragung der mathematischen Lösung in den physikalischen Bereich.
6. Diskussion und Deutung der Ergebnisse.

Dieser Prozess wird normalerweise bei der Lösung eines technischen Problems mehrfach durchlaufen, wobei jeweils nach der Diskussion und Deutung der Ergebnisse überprüft wird, ob die zuvor für die Gültigkeit des Modells gemachten Annahmen erfüllt sind oder das Modell zu ändern ist.

Je nach Fragestellung führt dabei ein und dasselbe technische System zu unterschiedlichen Ersatzmodellen und auf verschiedene mathematische Probleme. Betrachten wir z. B. einen Eisenbahnwaggon: Fragen wir nach der Bewegung des Waggons oder des Zuges bei der Fahrt von Stuttgart nach München (Fahrplan), so liegt ein Problem der Kinematik vor. Es interessieren Ort und Geschwindigkeit als Funktionen der Zeit; der gesamte Zug kann durch das Ersatzmodell „Punkt“ beschrieben werden. Fragt man dagegen nach den Radlasten des stehenden Waggons, so ist dies ein Problem der Statik, genauer: der Elastostatik; ein geeignetes Ersatzmodell ist ein elastisch gelagerter, starrer Körper. Betrachtet man hingegen die Radlasten bei Kurvenfahrt, so ist eine Dynamikaufgabe zu lösen; das Ersatzmodell kann das gleiche wie zuvor sein. Ist man weiterhin nicht nur an den Radlasten, sondern vielleicht an Fahrverhalten und Laufruhe des Waggons interessiert, so ist ein komplizierteres Ersatzmodell zu erstellen, das zumindest aus einem starren Körper (dem Waggon), der Federung und den Radsätzen besteht. Fragt man nach dem Abrieb zwischen Rad und Schiene, so ist ein komplexes mechanisches Problem der Festkörpermechanik zu lösen usw.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Technische Mechanik eine zentrale Stellung in der Grundausbildung der Ingenieure einnimmt. Ihre Bedeutung im Hinblick auf direkte Anwendungen in der Technik und in anderen Gebieten nimmt laufend zu, da nicht nur verfeinerte Modellbildungen verlangt werden, sondern außer den klassischen Anwendungsbereichen auch ständig neue in Medizin, Meteorologie usw. hinzukommen.

---

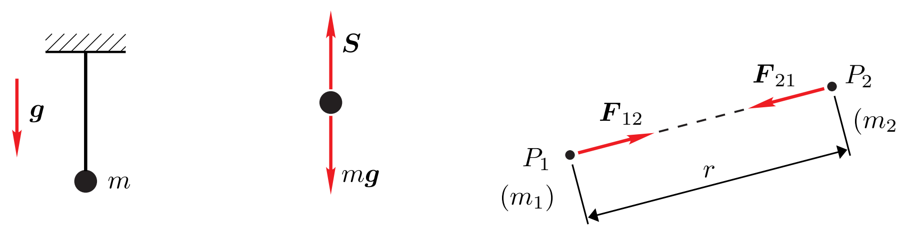
[12] Kurt Magnus, Professor für Mechanik in Stuttgart und München, *1912 in Magdeburg, †2003 in München.

[13] Lord Francis Bacon, Philosoph, *1561 in London, †1626 in Highgate.

1.2 Grundbegriffe

Neben den Begriffen der Geometrie spielt die physikalische Größe *Kraft* in der Statik die zentrale Rolle. Es handelt sich dabei um einen *Grundbegriff*, den wir nicht definieren, sondern anschaulich einführen. Wir geben jedoch im folgenden die wichtigsten Eigenschaften der Kräfte an, um so den Kraftbegriff zu verdeutlichen.

Aus der alltäglichen Erfahrung ist uns die Schwerkraft, d. h. das Gewicht der Körper vertraut. Galilei bezeichnete als Kraft jede physikalische Größe, die sich mit einer Gewichtskraft ins Gleichgewicht setzen bzw. sich mit ihr vergleichen lässt. Wir betrachten hierzu zunächst den kleinen (punktförmigen) Körper mit der Masse m in Abb. 1.1(a), der mittels eines dünnen Fadens lotrecht aufgehängt ist und sich in Ruhe befindet. Denken wir uns den Körper gemäß Abb. 1.1(b) losgelöst vom Faden („freigeschnitten"), wobei wir anstelle des Fadens die Fadenkraft $\boldsymbol{S}$ einzeichnen, d. h. die Wirkung, die der Faden auf den Körper ausübt, so erkennen wir: Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$ und Fadenkraft $\boldsymbol{S}$ sind gleich groß aber entgegengerichtet.



(a) Am Ende eines Fadens hängendes Gewicht **(b)** Gleichgewicht zwischen Gewichts- und Fadenkraft **(c)** Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten

1.1.: Zum Kraftbegriff

Offensichtlich ist die Kraft eine physikalische Größe, deren Wirkung von ihrem *Betrag*, ihrer *Richtung* und von ihrem *Richtungssinn* abhängt. Wir stellen Kräfte zeichnerisch durch Pfeile dar: Die Länge des Pfeiles entspricht dem Betrag, die Gerade, auf der der Pfeil liegt, entspricht der Richtung der Kraft, und die Pfeilspitze gibt deren Richtungssinn an. Es wird sich noch zeigen, dass Kräfte *vektorielle Größen* sind. Vektoren werden in diesem Buch durch fett gedruckte Buchstaben gekennzeichnet.

Körper, deren Abmessungen sehr klein gegenüber den anderen interessierenden Längen sind, stellt man idealisiert als *Massenpunkte* oder *Partikel* dar. Einen solchen Massenpunkt denkt man sich mit einer endlichen Masse behaftet, die in einem geometrischen Punkt konzentriert ist. Untersucht man z. B. die Bewegung eines Planeten um die Sonne, so kann man in recht guter Näherung beide Himmelskörper als Massenpunkte darstellen, da die Durchmesser der Sonne und des Planeten sehr viel kleiner sind als der Abstand dieser Körper voneinander. Zwischen den Himmelskörpern wirken – wie zwischen allen massebehafteten Körpern – *Gravitationskräfte*.

Das NEWTONsche *Gravitationsgesetz* besagt, dass zwischen zwei Massenpunkten längs ihrer Verbindungslinie Anziehungskräfte wirken, deren Betrag durch

$$|\boldsymbol{F}_{12}| = |\boldsymbol{F}_{21}| = \gamma\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.1}$$

gegeben ist (siehe Abb. 1.1(c)). In (1.1) sind m_1, m_2 die Massen der Partikel P_1, P_2. Deren Abstand voneinander ist r, γ (=„gamma“) ist die *Gravitationskonstante*. Dabei ist $\boldsymbol{F}_{12}$ die Kraft, die der Massenpunkt P_2 auf den Massenpunkt P_1 ausübt und $\boldsymbol{F}_{21}$ die Kraft, die P_1 auf P_2 ausübt. Der Begriff der *Masse* wird in der Statik eigentlich nicht benötigt. In der Dynamik (TM3) kennzeichnet die Masse die *Trägheit* eines Körpers. Wir haben die Masse jedoch schon hier eingeführt, da wir mit ihrer Hilfe den Kraftbegriff von verschiedenen Seiten beleuchten können.

Das Gravitationsgesetz (1.1) gilt nicht nur für punktförmige, sondern auch für Körper mit kugelsymmetrischer Massenverteilung, wobei dann r der Abstand der Kugelmittelpunkte voneinander ist. Gravitationskräfte wirken auch zwischen den einzelnen Teilen der Körper: Eigentlich sind also Gravitationskräfte, wie auch viele andere Kräfte, kontinuierlich über die Körper verteilt. Man kann diese verteilten Kräfte jedoch zumindest für bestimmte Betrachtungen durch eine *Einzelkraft* ersetzen.

Mit Ausnahme der Gewichtskraft (oder Schwerkraft) sind uns Gravitationskräfte aus dem täglichen Leben wenig vertraut, da sie meist sehr klein im Vergleich zu den anderen Kräften unserer Erfahrungswelt sind. Die Gewichtskraft, die lotrecht „nach unten“ wirkt, ist ein Sonderfall der NEWTONschen Gravitationskraft. Setzt man in (1.1) die Erdmasse M für m_1 und den mittleren Erdradius R für r, so ist die auf einen punktförmigen Körper der Masse m infolge der Erdmasse M wirkende Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche dem Betrage nach durch

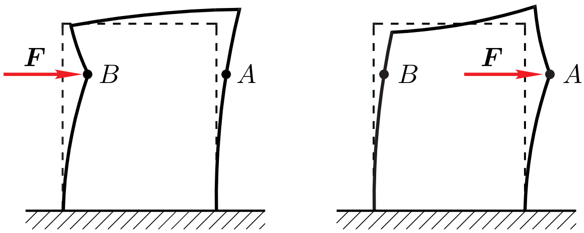
$$G = m\,\frac{\gamma M}{R^2} \tag{1.2}$$

gegeben, was man auch als

$$G = m\,g\,, \quad g := \gamma\,\frac{M}{R^2} \tag{1.3}$$

schreiben kann. Das Formelzeichen „:=“ bedeutet hier und im folgenden „ist definiert als“. Die mittlere Fallbeschleunigung g ist mit guter Näherung durch den Wert $g = 9,81\mathrm{m/s^2}$ gegeben und die Gravitationskonstante ist $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$. Mit dem Radius der Erdkugel $R = 6,371 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ ergibt sich dann die Masse der Erde zu $M = 5,974 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$. Bei dieser Rechnung werden einige Effekte, wie z. B. die Drehung der Erde um ihre Achse vernachlässigt. In Wirklichkeit hängt die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche noch vom Ort ab. In der Technik rechnet man aber üblicherweise mit dem konstanten Wert $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, was in etwa der Fallbeschleunigung auf dem 45. Breitengrad in Meereshöhe entspricht.

In Abb. 1.2 ist ein auf eine waagerechte Fläche aufgeklebter Quader dargestellt, auf den jeweils im Punkt A, bzw. im Punkt B eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirkt. Die Erfahrung sagt uns, dass der Quader, den wir uns aus einem verformbaren Material (z. B. Gummi) gefertigt denken, sich in beiden Fällen auf unterschiedliche Art verformt. Die Wirkung einer Kraft hängt also nicht nur von Betrag, Richtung und Richtungssinn, sondern auch von ihrem *Angriffspunkt* ab. Vektorielle Größen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man gelegentlich als *gebundene Vektoren*.

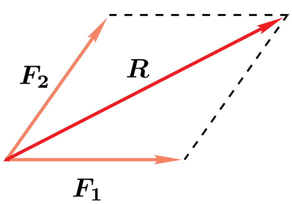


1.2.: Zur Abhängigkeit der Wirkung einer Kraft von ihrem Angriffspunkt

Oft wirken an ein und demselben Punkt gleichzeitig mehrere Kräfte. Das auf STEVIN[14] zurückgehende *Axiom vom Kräfteparallelogramm* sagt, wie diese Kräfte zu addieren sind:

> *Zwei Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ mit gleichem Angriffspunkt können nach der Parallelogrammregel zu $\boldsymbol{R}$ addiert werden* (siehe Abb. 1.3).

Dies entspricht der später in Abschnitt 1.3 erklärten Vektoraddition. Durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion kann man nicht nur zwei, sondern sogar beliebig viele Kräfte (mit gemeinsamem Angriffspunkt) addieren. Das gleiche Axiom erlaubt es übrigens auch, eine Kraft in Komponenten zu zerlegen.



1.3.: Die Addition zweier Kräfte mit der Parallelogrammregel

Um unser Verständnis des Kraftbegriffes abzurunden, geben wir noch die so genannten NEWTON*schen Gesetze* an. Auch hierbei treten Begriffe auf, die wir erst später benötigen und dann genauer definieren werden. Das erste Gesetz, auch **Trägheitsgesetz** genannt, besagt:

> *Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.*

[14] Simon STEVIN, genannt Simon von Brügge, niederländischer Mathematiker und Ingenieur, *1548 in Brügge, †1620 in Leiden oder Den Haag.

Das zweite Gesetz, auch Bewegungsgesetz oder **Grundgesetz der Dynamik** genannt, lautet:

> *Die auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körpers:*
>
> $$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}. \tag{1.4}$$

Dabei ist $\boldsymbol{a}$ der Vektor der *Beschleunigung*. Dieser Begriff gehört nicht in die Statik, dürfte aber jedem zumindest teilweise geläufig sein.

Das dritte Gesetz, auch Gegenwirkungsgesetz oder **Gesetz von actio & reactio** genannt, ist das folgende:

> *Kräfte treten immer paarweise auf. Die von einem Körper 1 auf einen Körper 2 ausgeübte Kraft $\boldsymbol{F}_{21}$ ist gleich groß und entgegengesetzt der Kraft $\boldsymbol{F}_{12}$, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt:*
>
> $$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{1.5}$$

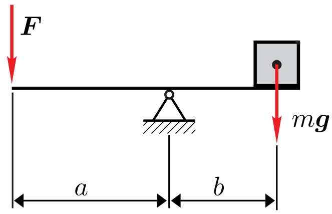
Da *actio* und *reactio* stets auf *verschiedene* Körper wirken, können sie nie an einem Körper im Gleichgewicht stehen. Offensichtlich sind die Gravitationskräfte aus Abb. 1.1c gerade ein solches Paar von Kraft und Gegenkraft. Es ist wichtig zu wissen, dass Kräfte grundsätzlich in diesem Sinne immer paarweise auftreten; dies gilt nicht nur in der Statik, sondern auch in der Dynamik. Man beachte, dass in dem Beispiel der Abb. 1.1 die Kräfte $m\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{S}$ *nicht* ein solches Paar bilden (Warum nicht? Welche ist die Gegenkraft zu $m\boldsymbol{g}$, welche die zu $\boldsymbol{S}$?)[15].

In den drei Grundgesetzen wurden die geometrischen Abmessungen der Körper vernachlässigt: Die Gesetze wurden hier für Massenpunkte formuliert. Auch ist bei der hier gewählten Formulierung das erste Gesetz im zweiten enthalten, da der Fall „Beschleunigung gleich Null“ genau der einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung ist. Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ ist eine kinematische Größe, die von der Bewegung des Beobachters, d. h. vom *Bezugssystem* abhängt. Eine präzise Formulierung des zweiten Gesetzes ist daher: „Es gibt (mindestens) ein Bezugssystem, in dem (1.4) gilt“. Ein solches Bezugssystem, das „absolut ruht“ und dessen Existenz in der klassischen Mechanik postuliert wird, bezeichnet man als *Inertialsystem*. Für die meisten technischen Anwendungen bildet die Erde ein Bezugssystem, das einem Inertialsystem hinreichend nahe kommt, d. h. in dem (1.4) gilt.

Erklärt man einen physikalischen Begriff – wie im vorliegenden Fall den Begriff „Kraft“ – so muss man immer auch eine *Messvorschrift* angeben. Wir müssen also überlegen, wie Kräfte zu messen sind. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen wir hier drei nennen. Die einfachste Möglichkeit, Kräfte zu messen, wurde schon erwähnt: Sie besteht darin, eine beliebige Kraft $\boldsymbol{F}$ mit einer bekannten Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$ zu vergleichen. Dies kann z. B. gemäß Abb. 1.4 mit einer Balkenwaage geschehen. Wie wir noch zeigen werden, gilt bei Gleichgewicht $|\boldsymbol{F}| = b/a\, m|\boldsymbol{g}|$.

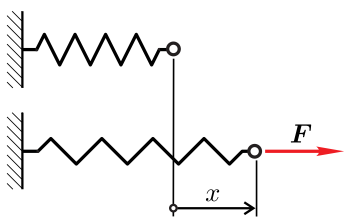
---

[15] Die *reactio* zu $m\boldsymbol{g}$ ist die Kraft, mit der der am Faden hängende Körper die Erde anzieht, die *reactio* zu $\boldsymbol{S}$ die Kraft, die er auf den Faden ausübt.

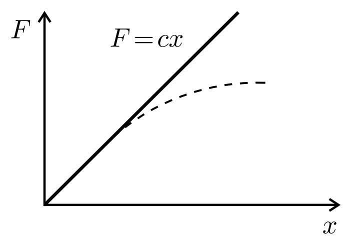


1.4.: Balkenwaage

Das Grundgesetz der Dynamik (1.4) liefert eine zweite Möglichkeit, Kräfte zu messen, die allerdings in der Statik nicht zu verwenden ist. Nach (1.4) braucht man ja lediglich die kinematische Größe $\boldsymbol{a}$ zu bestimmen und kann dann bei bekannter Masse m auf die Kraft $\boldsymbol{F}$ schließen. Damit ist auch klar, dass die Krafteinheit das Produkt aus der Beschleunigungseinheit (1 m/s^2) und der Masseneinheit (1 kg) ist; man definiert die *Krafteinheit* Newton als 1 N = 1 kg m/s^2. Das Gewicht einer Masse von 1 kg ist unter Normalbedingungen gleich 9,81 N $\approx$ 10 N.



(a) Verformung einer Feder infolge einer Zugkraft



(b) Lineare und nichtlineare Federkennlinien

1.5.: Zur Feder

Schließlich bietet es sich auch noch an, Kräfte durch die Verformungen zu messen, die sie z. B. an einer Feder hervorrufen (siehe Abb. 1.5(a)). Ist x die Verlängerung der Feder gegenüber ihrer „natürlichen Länge“ infolge der Kraft $\boldsymbol{F}$, so gilt bei einer idealen („linearen“) Feder $F = cx$, d. h. die Kraft F ist proportional zur Verlängerung x. Den Proportionalitätsfaktor c bezeichnet man als *Steifigkeit* der Feder. Der Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Verformung x wird oft durch die *Federkennlinie* ausgedrückt. In Abb. 1.5(b) ist außer der linearen Kennlinie auch noch eine nichtlineare Federkennlinie angegeben. Federverformungen sind in Wirklichkeit natürlich höchstens innerhalb gewisser Grenzen linear elastisch. Die Kennlinien sind immer begrenzt und können nicht beliebig fortgesetzt werden, da jede Feder bei hinreichend großer Belastung bricht. Schraubenfedern aus Stahl zeigen aber für nicht zu große Verformung ein in sehr guter Näherung lineares Verhalten.

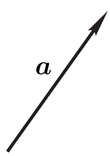
1.3 Elemente der Vektorrechnung

Wir beschränken uns im folgenden auf den dreidimensionalen EUKLIDschen[16] Vektorraum. In diesem dreidimensionalen Raum unserer Anschauung kann man sich einen Vektor $\boldsymbol{a}$ durch einen Pfeil repräsentiert denken, der durch drei Kennzeichen beschrieben wird (siehe Abb. 1.6):

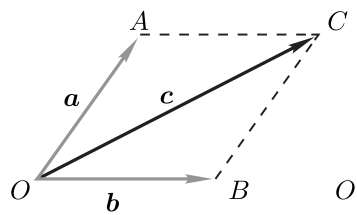
Betrag (Länge), Bezeichnung: $|\boldsymbol{a}|$,

Richtung (gegeben durch den Verlauf des Pfeils),

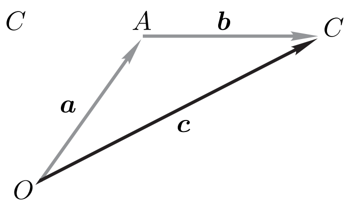
Richtungssinn (gegeben durch die Pfeilspitze).



1.6.: Geometrisches Bild eines Vektors



1.7.: Zur Parallelogrammregel



1.8.: Summe zweier Vektoren mittels des „Vektordreiecks“

Im folgenden betrachten wir Operationen zwischen Vektoren untereinander und zwischen Vektoren und skalaren Zahlen, die wir später benötigen.

1. Grundoperationen in einem linearen Vektorraum

a) Addition von Vektoren

Wir definieren die Addition von Vektoren

$$\boldsymbol{c} := \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

durch die *Parallelogrammregel* gemäß Abb. 1.7. Bei der zeichnerischen Vektoraddition genügt es natürlich, ein Dreieck (Abb. 1.8) anstelle des Parallelogramms zu zeichnen. Dann gilt:

i. Für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist die Summe $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ebenfalls ein Vektor.

ii. Die Kommutativität und Assoziativität der Vektoraddition folgt unmittelbar aus der Parallelogrammregel (Abb. 1.9):

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \tag{1.7}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}). \tag{1.8}$$

[16] Nach dem griechischen Mathematiker EUKLID, * 300 v. Chr. (nicht zu verwechseln mit Euklid von Megara).