



Edition  
Harri   
Deutsch 

# Technische Schwingungslehre

Schwingungen linearer diskreter mechanischer Systeme

von

Peter Hagedorn

Daniel Hochlenert

**2., überarbeitete Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56962**

**Autoren:**

Prof. Dr. Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Gebiet Dynamik und Schwingungen in Lehre und Forschung.

Dr.-Ing. Daniel Hochlenert ist in der Industrie und als Privatdozent an der Technischen Universität Berlin am Fachgebiet für Mechatronische Maschinendynamik tätig.

Die Autoren halten Vorlesungen über Technische Schwingungslehre, Technische Mechanik und über weitere Themen aus dem Gebiet Dynamik und Schwingungen.

2., überarbeitete Auflage 2015

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5697-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Medienhaus Plump GmbH, 53619 Rheinbreitbach

# Vorwort

Das vorliegende Buch entspricht in etwa dem heutigen Stand einer einsemestrigen Vorlesung über lineare Schwingungen diskreter mechanischer Systeme, wie sie an den meisten deutschen Technischen Universitäten regelmäßig gehalten wird. Es bildet die Nachfolge des 1987 beim Springer-Verlag erschienen Buches gleichen Titels von Hagedorn und Otterbein, unterscheidet sich jedoch von diesem wesentlich. Dies erkennt man schon am Umfang – die Seitenzahl hat sich in etwa halbiert – als auch an der Gliederung. Den heutigen Studenten und Ingenieuren stehen andere computergestützte Hilfsmittel zur Verfügung, als das vor 25 Jahren der Fall war, und dem wurde natürlich bei der Entwicklung der Vorlesung Rechnung getragen. Dementsprechend hat sich auch die Matrizen Schreibweise in der Technischen Schwingungslehre weiter durchgesetzt.

In den verschiedenen Abschnitten werden die Einflüsse der unterschiedlichen Terme in den Bewegungsgleichungen, die sich in Matrizen unterschiedlicher Bauart niederschlagen, im Detail untersucht und das Buch ist entsprechend gegliedert. Dies ermöglicht eine knappe und gleichzeitig übersichtliche Darstellung.

Am Ende eines jeden Kapitels ist jeweils eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben. Viele dieser Aufgaben stammen aus unseren Vorlesungen, andere sind neu und gelegentlich nicht ganz elementar.

Ein Anhang ist dem Aufstellen von Bewegungsgleichungen gewidmet. Dies soll dem Leser helfen, die Herleitung der Bewegungsgleichungen der Beispielsysteme in Kapitel 2 zu verstehen, auch wenn er diese Grundlagen nicht mehr parat hat. Natürlich soll dieser Anhang kein Lehrbuch der Technischen Mechanik ersetzen.

Die jetzt vorliegende zweite, korrigierte und erweiterte Auflage unterscheidet sich von der ersten durch die Einarbeitung neuer Ergebnisse über zirkulatorische Systeme sowie einige Korrekturen und Ergänzungen.

Wir danken den Mitarbeitern, die über die vielen Jahre an der Vorlesung mitgewirkt haben, ganz besonders Herrn Dr.-Ing. Gottfried Spelsberg-Korspeter. Der Erstautor hat einen Teil der Überarbeitung dieser Neuauflage während eines Gastaufenthaltes am Department of Mechanical Engineering der University of Canterbury at Christchurch, Neuseeland, durchgeführt. Er dankt dem Department für die freundliche Aufnahme und für die zur Verfügung gestellte Infrastruktur. Unser Dank gilt auch den Mitarbeitern des Verlages Europa-Lehrmittel, insbesondere Herrn Klaus Horn, für die gute Zusammenarbeit.

Darmstadt und Friedrichshafen, im Oktober 2014

Peter Hagedorn  
Daniel Hochlenert

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme</b>	<b>9</b>
2.1	Einfreiheitsgradsysteme . . . . .	9
2.1.1	Der Einmassenschwinger . . . . .	9
2.1.2	Mathematisches Pendel . . . . .	10
2.1.3	Ein Reibschwinger: Dämpfung infolge Reibung . . . . .	11
2.2	Mehrfreiheitsgradsysteme . . . . .	12
2.2.1	Schwingerkette . . . . .	12
2.2.2	Maschine auf Blockfundament mit Unwucherregung . . . . .	13
2.2.3	Rollendes Rad . . . . .	18
2.2.4	Doppelpendel mit Belastung . . . . .	21
2.2.5	Punktmasse auf rotierender Scheibe . . . . .	24
2.3	Aufgaben . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Freie Schwingungen linearer Einfreiheitsgradsysteme</b>	<b>31</b>
3.1	Das Eigenwertproblem . . . . .	31
3.2	Ungedämpfte Systeme . . . . .	32
3.3	Überkritisch gedämpfte Systeme . . . . .	34
3.4	Kritisch gedämpfte Systeme . . . . .	35
3.5	Unterkritisch gedämpfte Systeme . . . . .	35
3.6	Dimensionslose Darstellung . . . . .	37
3.7	Bestimmung des Dämpfungsgrads, logarithmisches Dekrement . . . . .	40
3.8	Aufgaben . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Erzwungene Schwingungen linearer Einfreiheitsgradsysteme</b>	<b>45</b>
4.1	Harmonische Erregung . . . . .	45
4.1.1	Harmonische Kraftanregung . . . . .	45
4.1.2	Leistung und Arbeit bei harmonischer Kraftanregung . . . . .	53
4.1.3	Andere Arten harmonischer Erregung . . . . .	58
4.1.4	Schwingungsisolierung . . . . .	62
4.1.5	Mechanische Impedanz . . . . .	65
4.1.6	Strukturdämpfung und andere Dämpfungsarten . . . . .	72

4.2	Periodische Erregung . . . . .	76
4.2.1	Behandlung im Zeitbereich . . . . .	76
4.2.2	Behandlung im Frequenzbereich . . . . .	79
4.3	Beliebige Erregung . . . . .	84
4.3.1	Sprungantwort . . . . .	84
4.3.2	Stoßantwort . . . . .	86
4.3.3	DUHAMEL-Integral . . . . .	89
4.3.4	Faltungsintegral . . . . .	93
4.3.5	FOURIER-Transformation . . . . .	96
4.4	Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	105
4.5	Aufgaben . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Freie Schwingungen linearer Mehrfreiheitsgradsysteme</b>	<b>109</b>
5.1	Das Eigenwertproblem . . . . .	109
5.1.1	Normierung der Eigenvektoren . . . . .	111
5.1.2	Allgemeine Lösung . . . . .	113
5.2	<b><math>M</math>-<math>K</math>-Systeme</b> . . . . .	115
5.2.1	Eigenschaften der Eigenwerte . . . . .	115
5.2.2	Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenvektoren . . . . .	116
5.2.3	Modale Koordinaten . . . . .	118
5.2.4	Allgemeine Lösung . . . . .	119
5.2.5	Eigenformen und Eigenschwingungen . . . . .	120
5.2.6	Energieintegral . . . . .	121
5.2.7	Zusammenfassung . . . . .	121
5.2.8	Der RAYLEIGHsche Quotient und der Satz von RAYLEIGH . . . . .	125
5.2.9	Die Formeln von DUNKERLEY und SOUTHWELL . . . . .	129
5.3	<b><math>M</math>-<math>D</math>-<math>K</math>-Systeme</b> . . . . .	133
5.3.1	Eigenschaften der Eigenwerte . . . . .	133
5.3.2	Allgemeine Lösung, Eigenformen und Eigenschwingungen . . . . .	134
5.3.3	Vollständige und durchdringende Dämpfung . . . . .	135
5.3.4	Modale Dämpfung . . . . .	137
5.3.5	Zusammenfassung . . . . .	142
5.4	<b><math>M</math>-<math>G</math>-<math>K</math>-Systeme</b> . . . . .	142
5.4.1	Eigenschaften der Eigenwerte . . . . .	143
5.4.2	Allgemeine Lösung, Eigenformen und Eigenschwingungen . . . . .	144
5.4.3	Gyroskopische Stabilisierung . . . . .	145
5.4.4	Gyroskopische Systeme mit Dämpfung . . . . .	147
5.4.5	Energieintegral . . . . .	148
5.4.6	Zusammenfassung . . . . .	148

5.5	<i>M-K-N</i> -Systeme . . . . .	149
5.5.1	Eigenschaften der Eigenwerte . . . . .	149
5.5.2	Allgemeine Lösung, Eigenformen und Eigenbewegungen . . .	151
5.5.3	Zusammenfassung . . . . .	151
5.6	<i>M-G-K-N</i> -Systeme . . . . .	155
5.6.1	Eigenschaften der Eigenwerte . . . . .	156
5.6.2	Allgemeine Lösung, Eigenformen und Eigenbewegungen . . .	157
5.6.3	Zusammenfassung . . . . .	157
5.7	<i>M-D-K-N</i> -Systeme . . . . .	157
5.7.1	Allgemeine Lösung, Eigenformen und Eigenbewegungen . . .	160
5.7.2	Zusammenfassung . . . . .	160
5.8	<i>M-D-G-K-N</i> -Systeme: Der allgemeine Fall . . . . .	160
5.9	Systeme mit halben Freiheitsgraden . . . . .	161
5.10	Aufgaben . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Erzwungene Schwingungen linearer Mehrfreiheitsgradsysteme</b>	<b>165</b>
6.1	Harmonische Erregung . . . . .	165
6.1.1	Resonanz und Scheinresonanz . . . . .	169
6.1.2	Tilgung . . . . .	174
6.2	Periodische Erregung . . . . .	179
6.3	Entkoppelbare Systeme . . . . .	179
6.4	Beliebige Erregung . . . . .	180
6.5	Theoretische Grundlagen der experimentellen Modalanalyse . . . . .	182
6.6	Aufgaben . . . . .	187
<b>A</b>	<b>Grundlagen zur Kinematik</b>	<b>189</b>
A.1	Vektoren . . . . .	189
A.1.1	Darstellung von Vektoren . . . . .	189
A.1.2	Vektorfunktionen . . . . .	191
A.1.3	Differentiation von Vektorfunktionen . . . . .	191
A.2	Dyadisches Produkt . . . . .	192
A.3	Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung . . . . .	193
A.4	Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	195
A.5	Geschwindigkeit und Beschleunigung beim starren Körper . . . . .	195
A.6	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	196
A.6.1	Holonome Zwangsbedingungen . . . . .	196
A.6.2	Verallgemeinerte Koordinaten und Geschwindigkeiten . . . . .	197
A.6.3	Nichtholonome Zwangsbedingungen . . . . .	197
A.7	Virtuelle Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten . . . . .	198

---

A.8	Skalarprodukt von Beschleunigung und virtueller Geschwindigkeit . . .	201
<b>B</b>	<b>Aufstellen von Bewegungsgleichungen</b>	<b>203</b>
B.1	NEWTON-EULERSche Gleichungen . . . . .	203
B.1.1	Schwerpunktsatz . . . . .	203
B.1.2	Impuls, Drall und Drallsatz . . . . .	204
B.2	Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten . . . . .	210
B.2.1	Zwangskräfte und Zwangsmomente . . . . .	210
B.2.2	Formulierung der Bewegungsgleichungen . . . . .	211
B.3	LAGRANGESche Gleichungen . . . . .	214
B.4	Lineare Bewegungsgleichungen . . . . .	219
B.4.1	Linearisierung . . . . .	220
B.4.2	Direktes Aufstellen linearer Bewegungsgleichungen . . . . .	222
B.4.3	Klassifizierung linearer Bewegungsgleichungen . . . . .	230
	<b>Weiterführende und ergänzende Literatur</b>	<b>233</b>
	<b>Index</b>	<b>235</b>

# 1 Einleitung

Schwingungen können wir in unserer Umwelt in vielfältiger Form beobachten, sowohl in der Natur als auch in der Technik. Zur Beschreibung und Berechnung der Schwingungen verwenden wir Ersatzsysteme (Modelle), die uns aus der Technischen Mechanik geläufig sind und die durch Vereinfachen und Idealisieren der Wirklichkeit entstehen. Diese Ersatzsysteme können dann durch Systemparameter (Längenabmessungen, Massen, Trägheitsmomente, Materialkennwerte und Federsteifigkeiten, elektrische Kenngrößen wie Induktivitäten, usw.) gekennzeichnet werden. Ihr jeweiliger Zustand wird durch Zustandsgrößen (Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Drücke, Temperaturen, elektrische Spannungen, Stromstärken, usw.) dargestellt. Charakteristisch für die Schwingungen ist dabei, dass die Zustandsgrößen im Laufe der Zeit ihre Werte stark ändern. Die Gesetzmäßigkeit, mit der diese Veränderung vor sich geht, ergibt sich durch die Anwendung von grundlegenden physikalischen Gesetzen auf die Ersatzsysteme, in der Mechanik aus den Grundgesetzen der Dynamik. Mit dieser Vorgehensweise erhält man schließlich ein mathematisches Modell des realen Geschehens.

In der Schwingungslehre besitzen die mathematischen Modelle meist die Form von Differentialgleichungen, in denen, neben den zeitunabhängigen Systemparametern, die Zustandsgrößen als gesuchte Zeitfunktionen auftreten. Dabei unterscheiden wir zunächst zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Bei diskreten Ersatzsystemen, d.h. bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden, wie sie ausschließlich in diesem Buch behandelt werden, ergeben sich Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Kontinuierliche Ersatzsysteme führen dagegen auf partielle Differentialgleichungen. Dabei verwenden wir den Begriff Freiheitsgrad, wie er aus der Technischen Mechanik bekannt ist. Als Zustandsgrößen verwendet man in der Mechanik häufig Koordinaten, bzw. „verallgemeinerte Koordinaten“ und ihre Zeitableitungen, so dass die Anzahl der Zustandsgrößen doppelt so groß wie die Anzahl der Freiheitsgrade ist.

Die Auswahl eines geeigneten Ersatzsystems bereitet dem Ingenieur oft große Schwierigkeiten und bildet einen kritischen Schritt in der Behandlung von Problemen (Zitat nach A. EDDINGTON<sup>1</sup>: „*Wenn das Modell stimmt, ist der Rest leicht*“). Das hängt damit zusammen, dass ein Ersatzsystem immer nur im Hinblick auf eine wohl

---

<sup>1</sup>Nach dem britischen Astronom und Physiker Sir Arthur Stanley EDDINGTON, \*1882 in Kendal, †1944 in Cambridge.



umrissene Problemstellung ausgewählt werden kann. Für einen einzelnen realen Gegenstand können also durchaus mehrere Ersatzsysteme herangezogen werden, die sich in der Anzahl der Freiheitsgrade wesentlich unterscheiden können. Ein klassisches Beispiel hierzu ist die Planetenbewegung: Ist man nur an der Bahnbewegung interessiert, so bietet sich als Ersatzsystem für den Himmelskörper der Massenpunkt an; will man aber beispielsweise erklären, warum der Mond der Erde stets dasselbe Gesicht zeigt, so kann man als Ersatzsystem den starren Körper heranziehen. Im ebenen Problem hat sich damit die Anzahl der Freiheitsgrade verdoppelt.

Im vorliegenden Buch gehen wir auf die Problematik der Modellbildung nicht weiter ein. Wir behandeln ausschließlich diskrete mechanische Systeme mit einer beliebigen endlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Die Dynamik dieser Systeme wird von Differentialgleichungen (den „Bewegungsgleichungen“) beschrieben. Die sind natürlich in der Regel zunächst nichtlinear und so einer analytischen Behandlung kaum zugänglich. Allerdings sind in vielen technischen Anwendungen die Verformungen so klein, dass die um eine Gleichgewichtslage linearisierten Differentialgleichungen wichtige Aspekte des Systemverhaltens richtig wiedergeben. In der Technischen Schwingungslehre, und auch in diesem Buch, werden daher ausschließlich lineare Schwingungen, d.h. Lösungen linearer Differentialgleichungen behandelt. Die Grundbegriffe der Schwingungslehre, wie Frequenz, Eigenfrequenz, Resonanz, usw. setzen wir dabei als aus der Technischen Mechanik bekannt voraus.

Die numerische Behandlung linearer Differentialgleichungen, d.h. hier im Wesentlichen die Lösung von Eigenwertproblemen und die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren, ist heute meist kein Problem mehr. Der Schwerpunkt des vorliegenden Buches ist dementsprechend ein anderer. Wir legen Wert darauf, die Einflüsse der verschiedenen Terme der Bewegungsgleichungen, wie sie in mechanischen Systemen auftreten, zu diskutieren. Das heißt, dass die Einflüsse der verschiedenen Matrizen auf das Eigenwertproblem getrennt behandelt werden (Massenmatrix  $M$ , Dämpfungsmatrix  $D$ , Matrix der gyrokopischen Terme  $G$ , Matrix der Rückstellkräfte  $K$  und Matrix der zirkulatorischen Terme  $N$ ). Dabei gehen wir systematisch vor und betrachten in unterschiedlichen Kapiteln jeweils Systeme vom Typ  $M-K$ , sowie solche der Typen  $M-D-K$ ,  $M-G-K$ ,  $M-K-N$ ,  $M-G-K-N$ ,  $M-D-K-N$  und schließlich Systeme des allgemeinen Typs  $M-D-G-K-N$ . Dies hilft oft, das qualitative Verhalten komplizierter mechanischer Systeme zu erkennen. Eigenwerte und Eigenvektoren sind in der Regel komplexwertig, und der Normierung komplexer Eigenvektoren wird mehr Aufmerksamkeit gewidmet als sonst üblich. Natürlich werden nicht nur freie sondern auch erzwungene Schwingungen behandelt und zwar sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich.

Um dem Leser zu vergegenwärtigen, durch welche physikalischen Effekte die unterschiedlichen Matrizen entstehen, ist das Kapitel 2 den Bewegungsgleichungen

mechanischer Systeme gewidmet. Dabei werden für eine Reihe unterschiedlicher Mehrfreiheitsgradsysteme die zunächst nichtlinearen Differentialgleichungen angegeben und zum Teil auch hergeleitet. Sie werden dann linearisiert, wobei man die Entstehung der verschiedenen Matrizen gut nachverfolgen kann. Auf die verschiedenen Beispielsysteme wird im gesamten Buch in den verschiedenen Kapiteln immer wieder Bezug genommen.

Im Anhang werden Grundlagen zur Kinematik und Verfahren zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen besprochen. Dieser Anhang ist eine Zusammenstellung der Grundlagen für Kapitel 2 und kann als Nachschlagewerk für Details der verwendeten Notation angesehen werden. Er lässt sich auch als eigenständige kompakte Einführung in die mathematischen sowie mechanischen Grundlagen verwenden und kann bei Bedarf vorab gelesen werden.

# 2 Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen einiger mechanischer Systeme unter Verwendung der Methoden aus Anhang B aufgestellt. In den folgenden Kapiteln werden wir immer wieder auf diese Beispiele zurückgreifen und die Bewegungsgleichungen dann im Detail analysieren.

## 2.1 Einfreiheitsgradsysteme

### 2.1.1 Der Einmassenschwinger

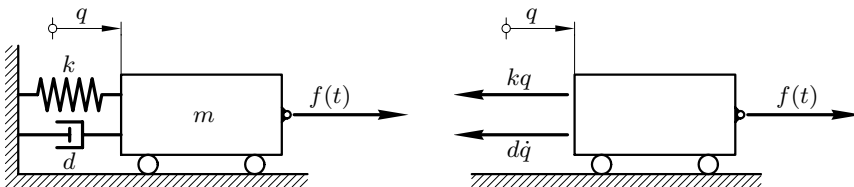
Als Prototyp des Einfreiheitsgradsystems wird sehr häufig der sogenannte „Einmassenschwinger“ aus Bild 2.1 herangezogen. Im Hinblick auf die Benennung der Mehrfreiheitsgradsysteme, sprechen wir vom  $m$ - $d$ - $k$ -System mit Kraftanregung. Die Bewegungsgleichung des Systems folgt unmittelbar aus dem Schwerpunktsatz. Ausgewertet in der horizontalen Richtung ergibt sich aus Bild 2.1

$$m\ddot{q} = f(t) - kq - d\dot{q} \tag{2.1}$$

und schließlich in der üblichen Anordnung der Terme

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = f(t). \tag{2.2}$$

Dabei gehen wir hier und im Folgenden stets davon aus, dass die gezeichneten Feder- bzw. Dämpfersymbole lineare Eigenschaften aufweisen, d.h. Kräfte bewirken, die mit den Proportionalitätsfaktoren  $k$  bzw.  $d$  linear in  $q$  bzw.  $\dot{q}$  sind.



**Bild 2.1:**  $m$ - $d$ - $k$ -System mit Kraftanregung: System (links) und Skizze für den Schwerpunktsatz (rechts)

### 2.1.2 Mathematisches Pendel

In Bild 2.2 ist ein mathematisches Pendel dargestellt. Die Bewegungsgleichung wird mit Hilfe der LAGRANGESchen<sup>1</sup> Gleichungen aufgestellt. Aus der Geschwindigkeit des Massenpunkts P im Inertialsystem  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}\vec{v}^P = -l\dot{q} \sin q \vec{n}_1 + l\dot{q} \cos q \vec{n}_2 \quad (2.3)$$

ergibt sich die kinetische Energie des Systems

$$T = \frac{1}{2} m \mathcal{N}\vec{v}^P \cdot \mathcal{N}\vec{v}^P = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 \quad (2.4)$$

und zusammen mit der potentiellen Energie des Systems

$$U = -mgl \cos q \quad (2.5)$$

folgt die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q. \quad (2.6)$$

Die Bewegungsgleichung erhält man mit der LAGRANGESchen Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (2.7)$$

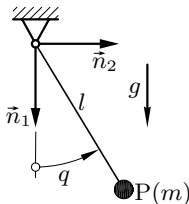
was schließlich auf

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \sin q = 0 \quad (2.8)$$

führt. Für kleine Bewegungen um die lotrecht hängende Position des Pendels ist

$$ml^2 \ddot{q} + mgl q = 0 \quad (2.9)$$

die entsprechende linearisierte Bewegungsgleichung. Dies hätte man mit (B.108) auch direkt aus den Energieausdrücken des Systems ablesen können.



**Bild 2.2:** Mathematisches Pendel

<sup>1</sup>Nach dem italienischen Mathematiker und Astronom Joseph-Louis LAGRANGE, \*1736 in Turin, †1813 in Paris.

### 2.1.3 Ein Reibschwinger: Dämpfung infolge Reibung

Das Bild 2.3 zeigt eine Punktmasse P (Masse  $m$ ), die sich in einer Führung auf einer rauhen Oberfläche (COULOMBSche<sup>2</sup> Reibung, Reibbeiwert  $\mu$ ) bewegt. Die Normalkraft zwischen der Punktmasse und der rauhen Oberfläche ist  $N$ . Die Punktmasse ist elastisch (Federsteifigkeit  $k$ ) in der mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  bewegten Führung gelagert.

Wir leiten die Bewegungsgleichung des Systems mit Hilfe des Schwerpunktsatzes sowie dem Freikörperbild (Bild 2.3, rechts) her und betrachten dazu lediglich die Kräfte in der  $\vec{n}_1$ - $\vec{n}_2$ -Ebene. Dort wirken auf die Punktmasse die Kraft  $Z$  (Zwangskraft infolge der bewegten Führung) in  $\vec{n}_1$ -Richtung, die Federkraft  $kq$  in negative  $\vec{n}_2$ -Richtung sowie die Reibkraft

$$\vec{R} = -\mu N \frac{{}^{\mathcal{N}}\vec{v}^P}{|{}^{\mathcal{N}}\vec{v}^P|}, \quad (2.10)$$

wobei

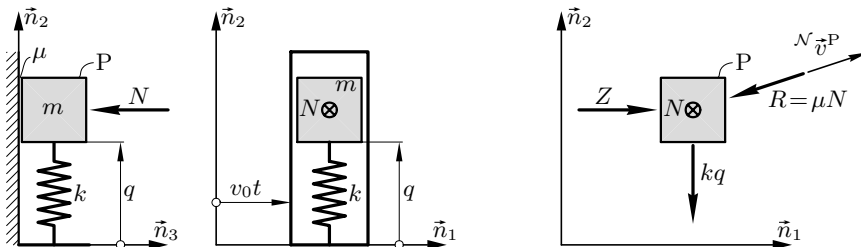
$${}^{\mathcal{N}}\vec{v}^P = v_0 \vec{n}_1 + \dot{q} \vec{n}_2 \quad (2.11)$$

die Geschwindigkeit der Punktmasse im Inertialsystem  $\mathcal{N}$  ist. Die Reibkraft wirkt also entgegen der Relativgeschwindigkeit der Reibpartner und hat gemäß COULOMB den Betrag  $\mu N$ . Mit der Beschleunigung von P in  $\mathcal{N}$

$${}^{\mathcal{N}}\vec{a}^P = \ddot{q} \vec{n}_2 \quad (2.12)$$

liefert der Schwerpunktsatz

$$m\ddot{q} \vec{n}_2 = Z \vec{n}_1 - kq \vec{n}_2 - \mu N \frac{v_0 \vec{n}_1 + \dot{q} \vec{n}_2}{|v_0 \vec{n}_1 + \dot{q} \vec{n}_2|} \quad (2.13)$$



**Bild 2.3:** Punktmasse in bewegter Führung auf rauher Unterlage: Seitenansicht und Draufsicht (links), Freikörperbild (rechts)

<sup>2</sup>Nach dem französischen Physiker Charles Augustin de COULOMB, \*1736 in Angoulême, †1806 in Paris.

die beiden skalaren Gleichungen

$$0 = Z - \mu N \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \dot{q}^2}}, \quad (2.14a)$$

$$m\ddot{q} = -kq - \mu N \frac{\dot{q}}{\sqrt{v_0^2 + \dot{q}^2}}. \quad (2.14b)$$

Die erste Gleichung liefert bei bekanntem  $\dot{q}$  die erforderliche Zwangskraft  $Z$ , um die Führung mit  $v_0$  in  $\vec{n}_1$ -Richtung zu bewegen. Die zweite Gleichung ist die nichtlineare Bewegungsgleichung des Systems. Linearisiert man für kleine  $\dot{q}$  folgt

$$m\ddot{q} + \frac{\mu N}{v_0} \dot{q} + kq = 0, \quad (2.15)$$

also ein „gewöhnliches“  $m$ - $d$ - $k$ -System, wobei die lineare Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten

$$d = \frac{\mu N}{v_0} \quad (2.16)$$

aus der COULOMBSchen Reibung resultiert. Dieser Effekt wird nur deshalb korrekt berücksichtigt, weil die Bewegungsgleichungen am ausgelenkten System formuliert wurden. In diesem Zusammenhang sei auf den Abschnitt B.4.2 und die dort gemachten Bemerkungen zum direkten Aufstellen linearer Bewegungsgleichungen verwiesen. Von praktischer Relevanz kann dieser Effekt in all solchen technischen Systemen sein, bei denen reibungsbehaftete Kontakte mit einer Vorzugsbewegungsrichtung (hier die  $\vec{n}_1$ -Richtung, gegeben durch  $v_0$ ) vorliegen und Schwingungen der Kontaktpartner quer zu dieser Vorzugsbewegungsrichtung auftreten. Wir werden auf dieses spezielle Beispiel eines  $m$ - $d$ - $k$ -Systems nicht explizit zurückkommen. Es soll uns in erster Linie zur Verdeutlichung des Effekts der linearen Dämpfung infolge Reibung dienen.

## 2.2 Mehrfreiheitsgradsysteme

### 2.2.1 Schwingerkette

Ähnlich wie das  $m$ - $d$ - $k$ -System mit einem Freiheitsgrad aus Bild 2.1 werden uns das  $M$ - $D$ - $K$ -System aus Bild 2.4 und Sonderfälle davon häufig als Grundlage für die

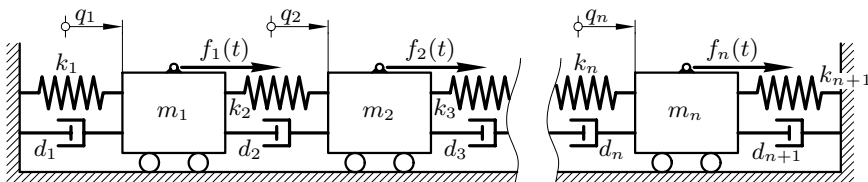
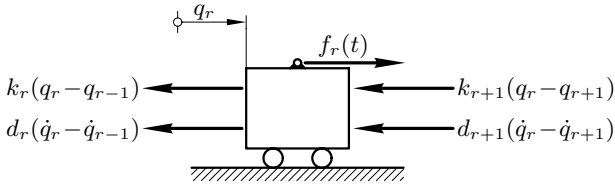


Bild 2.4: Schwingerkette mit  $n$  Freiheitsgraden



**Bild 2.5:** Skizze für den Schwerpunktsatz eines Körpers der Schwingerkette aus Bild 2.4

Veranschaulichung von Begriffen und Effekten dienen. Wir betrachten den  $r$ -ten Wagen aus der Kette und formulieren mit der Skizze aus Bild 2.5 den zugehörigen Schwerpunktsatz

$$m_r \ddot{q}_r = f_r(t) - k_r(q_r - q_{r-1}) - d_r(\dot{q}_r - \dot{q}_{r-1}) - k_{r+1}(q_r - q_{r+1}) - d_{r+1}(\dot{q}_r - \dot{q}_{r+1}). \quad (2.17)$$

Diese Gleichung gilt für  $r=1, \dots, n$ , wobei für  $r=1$  bzw.  $r=n$  aufgrund der Ränder  $q_0=0$  bzw.  $q_{n+1}=0$  zu setzen ist. Die Bewegungsgleichungen für die gesamte Kette können dann mit

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \mathbf{0} \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & m_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & & & \mathbf{0} \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & & \\ & -d_3 & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots & -d_n \\ & & & & -d_n & d_n + d_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \mathbf{0} \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k_n \\ \mathbf{0} & & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

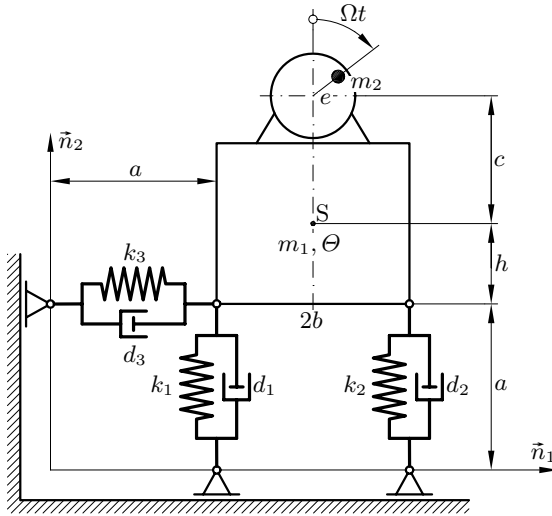
in der Form

$$M\ddot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (2.18)$$

geschrieben werden. Wir werden in den Kapiteln 5 und 6 immer wieder Sonderfälle und Abwandlungen dieser allgemeinen Schwingerkette untersuchen.

### 2.2.2 Maschine auf Blockfundament mit Unwuchterregung

In Bild 2.6 ist das mechanische Ersatzmodell einer Maschine mit Unwuchterregung auf einem Blockfundament dargestellt. Das Blockfundament ist über Federn und



**Bild 2.6:** Maschine auf Blockfundament mit Unwuchterregung

Dämpfer gelagert und kann nur Bewegungen in der Zeichenebene ausführen. Die Unwucht rotiert mit der Drehgeschwindigkeit  $\Omega$ . Alle Größen, Maße und Trägheitseigenschaften sind dem Bild zu entnehmen. Ergänzend zum Bild 2.6 sei angemerkt, dass die Federn und Dämpfer so befestigt sind, dass sie stets lotrecht bzw. waagrecht stehen, auch wenn sie Druckkräfte auf das Blockfundament ausüben. Wir werden nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der LAGRANGESchen Gleichungen aufstellen.

### Kinematik

Aus Bild 2.7 können wir die Ortsvektoren vom Ursprung O zum Schwerpunkt S des Systems mit Blockfundament (ohne die Unwucht der Masse  $m_2$ )

$$\vec{p}^{S/O} = (q_1 + a + b)\vec{n}_1 + (q_2 + a + h)\vec{n}_2, \quad (2.19)$$

vom Ursprung zu den Punkten  $P_1$  und  $P_2$

$$\vec{p}^{P_1/O} = \vec{p}^{S/O} - b\vec{b}_1 - h\vec{b}_2, \quad (2.20a)$$

$$\vec{p}^{P_2/O} = \vec{p}^{S/O} + b\vec{b}_1 - h\vec{b}_2 \quad (2.20b)$$

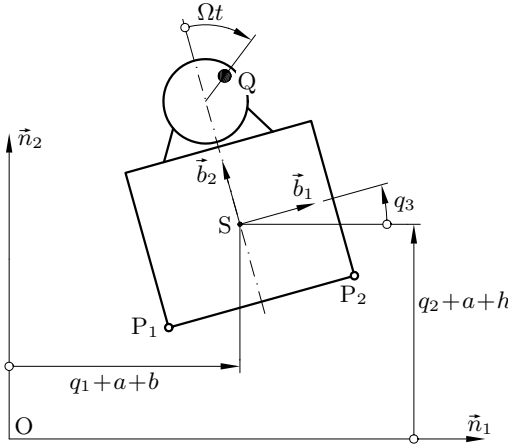
sowie vom Ursprung zur Unwucht Q

$$\vec{p}^{Q/O} = \vec{p}^{S/O} + e \sin \Omega t \vec{b}_1 + (c + e \cos \Omega t) \vec{b}_2 \quad (2.21)$$

ablesen. Zur Berechnung der kinetischen Energie benötigen wir die Geschwindigkeit von S in  $\mathcal{N}$

$${}^{\mathcal{N}}\vec{v}^S = \frac{\mathcal{N}d}{dt} \vec{p}^{S/O} = \dot{q}_1 \vec{n}_1 + \dot{q}_2 \vec{n}_2 \quad (2.22)$$





**Bild 2.7:** Kinematik zur Maschine auf Blockfundament mit Unwuchterregung aus Bild 2.6

und von Q in  $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\vec{v}^Q &= \frac{d}{dt} \vec{p}^{Q/O} = \mathcal{N}\vec{v}^S + e\Omega \cos \Omega t \vec{b}_1 - e\Omega \sin \Omega t \vec{b}_2 \\ &\quad + \mathcal{N}\vec{\omega}^B \times (e \sin \Omega t \vec{b}_1 + (c + e \cos \Omega t) \vec{b}_2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit von  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}\vec{\omega}^B = \dot{q}_3 \vec{n}_3 = \dot{q}_3 \vec{b}_3 \quad (2.24)$$

und dem Zusammenhang der Basisvektoren

$$\vec{n}_1 = \cos q_3 \vec{b}_1 - \sin q_3 \vec{b}_2, \quad (2.25a)$$

$$\vec{n}_2 = \sin q_3 \vec{b}_1 + \cos q_3 \vec{b}_2 \quad (2.25b)$$

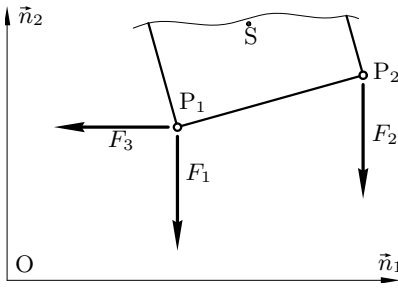
folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\vec{v}^Q &= (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3 - \dot{q}_3(c + e \cos \Omega t) + e\Omega \cos \Omega t) \vec{b}_1 \\ &\quad + (\dot{q}_2 \cos q_3 - \dot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 e \sin \Omega t - e\Omega \sin \Omega t) \vec{b}_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Um die Dämpferkräfte selbst sowie deren verallgemeinerten Kräfte anzugeben, berechnen wir noch die Geschwindigkeiten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\vec{v}^{P_1} &= \mathcal{N}\vec{v}^S + \mathcal{N}\vec{\omega}^B \times (-b \vec{b}_1 - h \vec{b}_2) \\ &= (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3 + \dot{q}_3 h) \vec{b}_1 + (\dot{q}_2 \cos q_3 - \dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_3 b) \vec{b}_2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\vec{v}^{P_2} &= \mathcal{N}\vec{v}^S + \mathcal{N}\vec{\omega}^B \times (b \vec{b}_1 - h \vec{b}_2) \\ &= (\dot{q}_1 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3 + \dot{q}_3 h) \vec{b}_1 + (\dot{q}_2 \cos q_3 - \dot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 b) \vec{b}_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$



**Bild 2.8:** Kräfte in der Lagerung zur Maschine auf Blockfundament mit Unwuchterregung aus Bild 2.6

Daraus folgt dann (vgl. Abschnitt A.7)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}\vec{u}_1^{P_1} &= \cos q_3 \vec{b}_1 - \sin q_3 \vec{b}_2, & \mathcal{N}\vec{u}_1^{P_2} &= \cos q_3 \vec{b}_1 - \sin q_3 \vec{b}_2, \\
 \mathcal{N}\vec{u}_2^{P_1} &= \sin q_3 \vec{b}_1 + \cos q_3 \vec{b}_2, & \mathcal{N}\vec{u}_2^{P_2} &= \sin q_3 \vec{b}_1 + \cos q_3 \vec{b}_2, \\
 \mathcal{N}\vec{u}_3^{P_1} &= h \vec{b}_1 - b \vec{b}_2, & \mathcal{N}\vec{u}_3^{P_2} &= h \vec{b}_1 + b \vec{b}_2.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

### Feder- und Dämpferkräfte

Mit Hilfe der Skizze aus Bild 2.8 und unter Verwendung der üblichen linearen Feder- und Dämpfergesetze berechnen sich die Kräfte der Lagerung aus

$$\vec{F}_1 = - \left[ \left( k_1 (\vec{p}^{P_1/O} - a \vec{n}_1 - a \vec{n}_2) + d_1 \mathcal{N}\vec{v}^{P_1} \right) \cdot \vec{n}_2 \right] \vec{n}_2, \tag{2.30a}$$

$$\vec{F}_2 = - \left[ \left( k_2 (\vec{p}^{P_2/O} - (a + 2b) \vec{n}_1 - a \vec{n}_2) + d_2 \mathcal{N}\vec{v}^{P_2} \right) \cdot \vec{n}_2 \right] \vec{n}_2, \tag{2.30b}$$

$$\vec{F}_3 = - \left[ \left( k_3 (\vec{p}^{P_3/O} - a \vec{n}_1 - a \vec{n}_2) + d_3 \mathcal{N}\vec{v}^{P_3} \right) \cdot \vec{n}_1 \right] \vec{n}_1. \tag{2.30c}$$

### Kinetische Energie und generalisierte Kräfte

Die kinetische Energie des Systems setzt sich aus den kinetischen Energien von Maschine mit Blockfundament (Masse  $m_1$ ) und Unwucht (Masse  $m_2$ )

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathcal{N}\vec{v}^S \cdot \mathcal{N}\vec{v}^S + \frac{1}{2} \Theta \mathcal{N}\vec{\omega}^B \cdot \mathcal{N}\vec{\omega}^B + \frac{1}{2} m_2 \mathcal{N}\vec{v}^Q \cdot \mathcal{N}\vec{v}^Q \tag{2.31}$$

zusammen. Natürlich kann man die Federkräfte in der potentiellen Energie des Systems berücksichtigen, wir wählen aber hier den Weg, sowohl Feder- als auch Dämpferkräfte über die generalisierten Kräfte

$$Q_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \mathcal{N}\vec{u}_1^{P_1} + \vec{F}_2 \cdot \mathcal{N}\vec{u}_1^{P_2}, \tag{2.32a}$$

$$Q_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \mathcal{N}\vec{u}_2^{P_1} + \vec{F}_2 \cdot \mathcal{N}\vec{u}_2^{P_2}, \tag{2.32b}$$

$$Q_3 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) \cdot \mathcal{N}\vec{u}_3^{P_1} + \vec{F}_2 \cdot \mathcal{N}\vec{u}_3^{P_2}. \tag{2.32c}$$

einzu beziehen.

### Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen des Systems folgen mit Hilfe der LAGRANGESchen Gleichungen im vorliegenden Fall (keine potentielle Energie) aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.33)$$

Die nichtlinearen Gleichungen sind recht lang. Wir wollen sie deshalb nicht angeben, sondern kümmern uns um die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2(c + e \cos \Omega t)\ddot{q}_3 + d_3\dot{q}_1 + (hd_3 + 2m_2e\Omega \sin \Omega t)\dot{q}_3 + k_3q_1 + (hk_3 + m_2e\Omega^2 \cos \Omega t)q_3 = m_2e\Omega^2 \sin \Omega t, \quad (2.34a)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_2 + m_2e \sin \Omega t \ddot{q}_3 + (d_1 + d_2)\dot{q}_2 + (b(d_2 - d_1) + 2m_2e\Omega \cos \Omega t)\dot{q}_3 + (k_1 + k_2)q_2 + (b(k_2 - k_1) - m_2e\Omega^2 \sin \Omega t)q_3 = m_2e\Omega^2 \cos \Omega t, \quad (2.34b)$$

$$\begin{aligned} & -m_2(c + e \cos \Omega t)\ddot{q}_1 + m_2e \sin \Omega t \ddot{q}_2 + (\Theta + m_2(e^2 + c^2 + 2ce \sin \Omega t))\ddot{q}_3 \\ & + hd_3\dot{q}_1 + b(d_2 - d_1)\dot{q}_2 + (b^2(d_1 + d_2) + h^2d_3 - 2m_2ce\Omega \sin \Omega t)\dot{q}_3 \\ & + hk_3q_1 + b(k_2 + k_1)q_2 + (b^2(k_1 + k_2) + h^2k_3)q_3 = -m_2ce\Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (2.34c)$$

Anzumerken ist, dass die Unwucht in allen drei Gleichungen sowohl als zeitabhängiger Koeffizient und auch als harmonische Erregung in Erscheinung tritt.

Wird die Drehbewegung der Maschine beispielsweise durch eine Führung unterbunden, vereinfachen sich die ersten beiden Bewegungsgleichungen zu

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + d_3\dot{q}_1 + k_3q_1 = m_2e\Omega^2 \sin \Omega t, \quad (2.35a)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_2 + (d_1 + d_2)\dot{q}_2 + (k_1 + k_2)q_2 = m_2e\Omega^2 \cos \Omega t, \quad (2.35b)$$

die auch mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}(t) = m_2e\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$$

in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (2.36)$$

geschrieben werden können. Die Unwucht tritt nun ausschließlich in der harmonischen Erregung auf und alle Koeffizienten sind konstant.

Als weiteren Sonderfall unterbinden wir noch zusätzlich die horizontale Bewegung. Mit  $k = k_1 + k_2$ ,  $d = d_1 + d_2$  und  $q_2(t) = q(t)$  folgt dann

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + d\dot{q} + kq = m_2 e \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (2.37)$$

Dieses System mit einem Freiheitsgrad werden wir in Abschnitt 4.1.4 genauer untersuchen. Dabei wird es insbesondere darum gehen, die von der Maschine in den Boden eingeleitete Kraft

$$f_Z(t) = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{n}_1 = kq(t) + d\dot{q}(t) \quad (2.38)$$

möglichst klein zu halten.

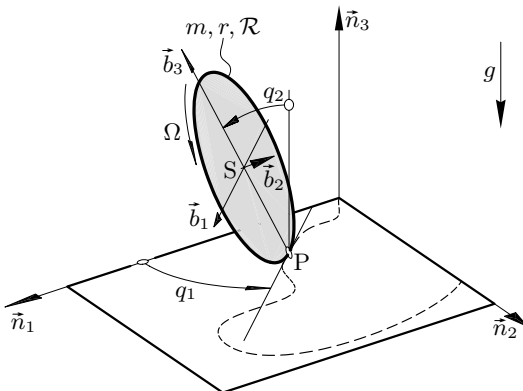
### 2.2.3 Rollendes Rad

Das Bild 2.9 zeigt eine homogene Kreisscheibe (Masse  $m$ , Radius  $r$ , körperfestes Bezugssystem  $\mathcal{R}$ ), die auf der waagerechten  $\vec{n}_1$ - $\vec{n}_2$ -Ebene rollt. Die Fallbeschleunigung  $g$  wirkt entlang der negativen  $\vec{n}_3$ -Achse. Das Bezugssystem  $\mathcal{B}$  geht aus dem Inertialsystem  $\mathcal{N}$  durch zwei aufeinander folgende Drehungen um  $\vec{n}_3$  mit dem Winkel  $q_1$  und um  $\vec{b}_1$  mit dem Winkel  $q_2$  hervor. Die Scheibe selbst dreht sich in  $\mathcal{B}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega \vec{b}_2$ , wobei  $\Omega = \text{konst.}$  gilt. Das Bezugssystem  $\mathcal{B}$  ist also nicht körperfest mit der Scheibe verbunden. Aufgrund ihrer Rotationssymmetrie, ist  $\mathcal{B}$  dennoch ein Hauptachsensystem der Scheibe. Wir leiten die Bewegungsgleichungen des rollenden Rads nun mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten her.

#### Kinematik

Aus Bild 2.9 können wir die Winkelgeschwindigkeit des scheibenfesten Bezugssystems  $\mathcal{R}$  im Inertialsystem  $\mathcal{N}$

$${}^{\mathcal{N}}\vec{\omega}^{\mathcal{R}} = \dot{q}_1 \vec{n}_3 + \dot{q}_2 \vec{b}_1 + \Omega \vec{b}_2 \quad (2.39)$$



**Bild 2.9:** Rollendes Rad