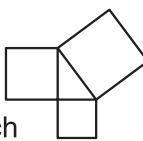


Übungen zur
Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Schließenden Statistik

Peter M. Schulze
Verena Dexheimer

Übungen zur Wahrscheinlichkeits- rechnung und Schließenden Statistik

Aufgaben und Lösungen

Verlag
Harri
Deutsch 

Peter M. Schulze, Studium der Volkswirtschaftslehre an den Universitäten Mainz, Genf und Hamburg. 1971 Promotion, 1975 Habilitation mit *venia legendi* für Statistik, Ökonometrie und Regionalwirtschaftslehre. Seit 1980 Lehrstuhlinhaber und Leiter des Instituts für Statistik und Ökonometrie der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
Arbeitsschwerpunkte: Statistisch-ökonomische Anwendungen im (regional-) wirtschaftlichen Bereich, Bevölkerungsstatistik.

Verena Dexheimer, 1997–2002 Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Mainz mit den Schwerpunkten Statistik und Ökonometrie, Marketing und Finanzwirtschaft. 2002–2006 wissenschaftliche Mitarbeiterin im Statistischen Bundesamt in Wiesbaden. Seit 2006 wissenschaftliche Mitarbeiterin und Promotionsstudentin am Institut für Statistik und Ökonometrie der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
Arbeitsschwerpunkte: Hedonische Preismessung, ökonomische Zählmethodenansätze.

Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
Fax: (069) 77015869
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
<http://www.harri-deutsch.de>

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN-10 **3-8171-1795-7**
ISBN-13 **978-3-8171-1795-6**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.
Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

1. Auflage 2006
© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2006
Druck: fgb • freiburger graphische betriebe www.fgb.de
Printed in Germany

VORWORT

Dieses Übungsbuch entstand aus den Arbeitsunterlagen des Verfassers zur Grundstudiumsvorlesung „Statistik II: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik“ für Wirtschaftswissenschaftler an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Es lehnt sich an die Vorlesung an, indem es die dort vermittelten Sachverhalte durch zusätzliche Übungsaufgaben erweitert. Die Arbeitsunterlagen zu dieser Vorlesung, die den formalen Rahmen dieser Veranstaltung darstellen, können auf www.statoek.de heruntergeladen werden. Als Begleittexte, die den Aufgabenstoff behandeln, sei beispielhaft verwiesen auf Bleymüller, J. / Gehlert, G. / Gülicher, H., *Statistik für Wirtschaftswissenschaftler*, 14. überarb. Aufl., München (Vahlen) 2004 und Kohler, H., *Statistics for Business and Economics*, Singapore usw. (Thomson Learning) 2002.

Um statistische Methoden zu beherrschen, sollten sie möglichst intensiv eingeübt werden. Ziel dieses Übungsbuches ist es, sowohl Aufgaben zum vorlesungsbegleitenden Üben, zum Vor- und Nachbereiten von Vorlesungen, als auch zur Klausurvorbereitung zur Verfügung zu stellen. Mit dieser Publikation soll einerseits das eigenständige Arbeiten allein und andererseits das Üben in studentischen Gruppen und Tutorien gefördert werden. All dies wird durch ausführlich erläuterte Lösungen erleichtert.

In Kapitel 9 wurden beispielhaft Aufgaben aufgenommen, die mit der Statistik-Software SPSS zu lösen sind. Diese sind durch Screenshots ergänzt, so dass auch mit SPSS wenig Geübte die Lösungen gut nachvollziehen und ihr Nutzungsspektrum von SPSS erweitern können. Die Dateien, die zur Anwendung im SPSS notwendig sind, können ebenfalls auf www.statoek.de heruntergeladen werden (siehe Datenverzeichnis auf Seite 193).

Natürlich schleichen sich bei einer solchen Zahl von Aufgaben und Lösungen auch Druckfehler ein. Für Hinweise auf solche Fehler sind wir immer dankbar.

E-Mail bitte an: info@statoek.de.

Es sind zahlreiche Aufgaben aus Übungen und Klausuren einiger „Generationen“ von wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern eingeflossen. Ihnen sei an dieser Stelle für ihre Beiträge gedankt. Ebenso danken wir Herrn Horn und Frau Cirksena vom Verlag Harri Deutsch für die Aufnahme dieses Buches in das Verlagsprogramm und die angenehme Zusammenarbeit.

Mainz, im Oktober 2006

Peter M. Schulze

Verena Dexheimer

Inhaltsverzeichnis

AUFGABEN: LÖSUNGEN:

| | | |
|--|----------------|------------|
| 1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung | 3 | 47 |
| 1.1 Begriffe | 3 | 47 |
| 1.2 Mengenoperationen | 4 | 49 |
| 1.3 Theoreme | 4 | 52 |
| 1.4 Kombinatorik | 7 | 61 |
| 2 Eindimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilungen | 11 | 71 |
| 2.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter und stetiger Zufallsvariablen | 11 | 71 |
| 2.2 Parameter der Verteilung einer Zufallsvariablen | 12 | 79 |
| 3 Spezielle eindimensionale Wahrscheinlichkeits- verteilungen..... | 15 | 85 |
| 3.1 Binomialverteilung..... | 15 | 85 |
| 3.2 Hypergeometrische Verteilung..... | 16 | 87 |
| 3.3 Poissonverteilung..... | 16 | 88 |
| 3.4 Exponentialverteilung..... | 16 | 89 |
| 3.5 Normalverteilung..... | 17 | 93 |
| 3.6 Ansatzübungen und Approximation von Verteilungen | 19 | 97 |
| 4 Mehrdimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilung..... | 21 | 101 |
| 5 Elemente der Stichprobentheorie | 25 | 109 |
| 6 Schätzmethodik | 27 | 115 |
| 6.1 Eigenschaften von Schätzfunktionen..... | 27 | 115 |
| 6.2 Punkt- und Intervallschätzungen..... | 27 | 116 |
| 7 Testverfahren..... | 33 | 131 |
| 7.1 Grundbegriffe..... | 33 | 131 |
| 7.2 Spezielle Tests..... | 34 | 132 |
| 8 Regression | 39 | 147 |
| 9 SPSS- Anwendungen | 43 | 155 |
| Tabellenanhang | 179 | |
| Datenverzeichnis..... | 193 | |

Aufgabenteil

1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Begriffe

Aufgabe 1.1-1

- Bestimmen Sie für den Zufallsvorgang „Werfen von drei Münzen“ die möglichen Elementarereignisse e_i und den Stichprobenraum (Ereignisraum) S dieses Zufallsvorganges.
- Erläutern Sie die Begriffe „Ereignis“, „sicheres Ereignis“, „unmögliches Ereignis“, „komplementäres Ereignis“, „disjunkte Ereignisse“ und „Durchschnitt zweier Ereignisse“. Bilden Sie zu jedem Begriff ein Beispiel aus dem Zufallsvorgang in a).

Aufgabe 1.1-2

Erläutern Sie die drei häufig benutzten Wahrscheinlichkeitsbegriffe anhand selbst gewählter Beispiele.

Aufgabe 1.1-3

Ein Zeuge eines Verkehrsunfalls kann sich nur noch an Teile des Kfz-Kennzeichens des Unfallflüchtigen erinnern: Es bestand aus dem Ortskennbuchstaben M, der Buchstaben-Gruppe EU, EV oder EY sowie drei Ziffern, von denen die erste die 3 und unter den anderen noch mindestens eine 4 war. Gehen Sie davon aus, dass die noch möglichen Kfz-Kennzeichen gleichwahrscheinlich vorliegen können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_i ($i = 1 \dots 6$), dass

- A_1 : die Buchstaben-Gruppe EY vorliegt,
- A_2 : die beiden ersten Ziffern 34 ergeben,
- A_3 : die letzten beiden Ziffern 47 lauten,
- A_4 : die letzte Ziffer 4 ist,
- A_5 : unter den drei Ziffern die 0 vorkommt,
- A_6 : die letzte Ziffer größer ist als die beiden anderen?

Geben Sie jeweils den relevanten Stichprobenraum S und die Menge der Elementarereignisse, die zum gesuchten Ereignis A_i gehören, an.

1.2 Mengenoperationen

Aufgabe 1.2-1

Bestätigen Sie folgende mengentheoretischen Beziehungen:

- $(A \cup B) \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup B$
- $(A \cap B) \cup (C \cap A) = A \cap (B \cup C)$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

Aufgabe 1.2-2

In einem Stichprobenraum $S = \{a,b,c,d,e,f\}$ seien folgende Ereignisse $A = \{a,b,d\}$, $B = \{b,d\}$ und $C = \{d,e,f\}$ definiert. Bestimmen Sie: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} , $C \setminus B$ (Differenzereignis), $B \setminus A$, $A \cup \overline{C}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{\overline{A \cup C}}$.

Aufgabe 1.2-3

Ein Einzelhändler hat drei Videorecorder einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionstüchtigkeit, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne nun A_i ($i = 1,2,3$) das Ereignis, dass beim i -ten Videogerät ein Defekt festgestellt wird. Beschreiben Sie mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und passenden Mengenoperationen die Ereignisse

- alle Videorecorder sind defekt,
- mindestens ein Recorder ist defekt,
- höchstens ein Recorder ist defekt,
- alle Recorder sind intakt,
- der erste Recorder ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler,
- genau zwei Videorecorder sind defekt.

1.3 Theoreme

Aufgabe 1.3-1

A und B seien Ereignisse mit $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,7$; $P(A \cap B) = 0,25$.

Berechnen Sie: $P(A \cup B)$, $P(\overline{B})$, $P(A \cap \overline{B})$ und $P(A \cup \overline{B})$.

Aufgabe 1.3-2

Ein Assistent geht an 8 von 20 Arbeitstagen am frühen Nachmittag Squash oder Tennis spielen, denn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Chef versucht, ihn in dieser Zeit aufzusuchen oder anzurufen, beträgt nur 10%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Chef ihn an einem bestimmten Nachmittag erreichen möchte und ihn auch tatsächlich antrifft? Welche Annahmen müssen Sie treffen? An wie vielen von 20 Arbeitstagen darf er nachmittags spielen gehen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht angetroffen zu werden, höchstens 1% betragen soll?

Aufgabe 1.3-3

Ein Zufallsvorgang bestehe aus dem Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel!

Sind die Ereignisse H (Herz) und K (König) stochastisch unabhängig?

Aufgabe 1.3-4

Eine Analyse erfolgreicher Hochschulabsolventen in der Bundesrepublik Deutschland ergab folgendes Bild: 60% der Kandidaten, die eine Abschlussprüfung bestehen sind Männer, 40% sind Frauen. 7% **dieser** Frauen erwerben anschließend einen Dokortitel. Der Anteil der Absolventen, die männlich sind **und** im Anschluss an ihr Studium promovieren, beträgt 12%.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem erfolgreich abgeschlossenen Studium ein Dokortitel erworben wird?
- Es wurde ein Dokortitel verliehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an eine Frau verliehen wurde?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Absolvent männlich ist und nicht promoviert?

Aufgabe 1.3-5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einem Würfelspiel mit einem „fairen“ Würfel

- nach drei Würfeln noch keine „6“ gewürfelt zu haben,
- erst im dritten Wurf eine „6“ gewürfelt zu haben,
- nach drei Würfeln genau einmal eine „6“ gewürfelt zu haben,
- nach drei Würfeln mindestens einmal eine „6“ gewürfelt zu haben?

Aufgabe 1.3-6

In einem Korb liegen 10 gleich aussehende Pralinen. Drei davon sind mit Senf (S) und 7 mit Likör (L) gefüllt. Man nehme nun viermal hintereinander zufällig eine Praline aus dem Korb heraus (ohne Zurücklegen!). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, viermal eine Likörpraline zu greifen?

Aufgabe 1.3-7

In einer Schraubenfabrik stellen die Maschinen I, II je 25% und Maschine III 50% der gesamten Produktion her. Aus Erfahrung weiß man, dass 6% (5% bzw. 4%) der von den Maschinen I, II und III gefertigten Schrauben Ausschuss sind. Aus der Gesamtproduktion wird eine Schraube entnommen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Schraube fehlerhaft?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube, bei der ein Defekt vorliegt, auf Maschine I (II bzw. III) gefertigt wurde?

Aufgabe 1.3-8

In einem Betrieb stellen 3 Maschinen die Gesamtproduktion in einer bestimmten Zeiteinheit her. Die erste Maschine produziert 2000, die zweite 3000 und die dritte 5000 Stück. Dabei verursacht Maschine I 5%, Maschine II 4% und Maschine III 2% Ausschuss. Die Produktion wird auf ein Lager genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- ein zufällig aus dem Lager ausgewähltes Stück defekt ist?
- ein im Lager zufällig in die Hand genommenes defektes Stück von der zweiten Maschine stammt?

Aufgabe 1.3-9

Von den erwachsenen Einwohnern lesen 25% nur Zeitung 1 und nicht Zeitung 2. Dagegen lesen 40% nur Zeitung 2 und nicht Zeitung 1. Des Weiteren ist bekannt, dass 55% der Einwohner Zeitung 1 nicht lesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- eine zufällig ausgewählte Person beide Zeitungen liest?
- eine aus dem Kreis der Leser von Zeitung 2 zufällig ausgewählte Person, auch gleichzeitig Zeitung 1 liest?

Aufgabe 1.3-10

Ein Weinkeller enthält Weine der Qualitätsstufen Qualitätswein, Kabinett und Spätlese im Verhältnis 5 : 3 : 2. Der Weißweinanteil beträgt bei den Qualitätsweinen $1/5$, bei den Kabinettweinen $1/4$ und bei den Spätlesen 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- bei einer zufälligen Flaschenentnahme keinen Weißwein zu entnehmen?
- dass eine zufällig ausgewählte Flasche Weißwein Qualitätswein ist?

1.4 Kombinatorik

Aufgabe 1.4-1

Ansatzübung: Welche Formel müsste zur Berechnung benutzt werden? Geben Sie auch jeweils N und n an.

- Anzahl der möglichen Lottozahlen bei 6 aus 49,
- Anzahl der theoretisch möglichen Postleitzahlen,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, 5 Autos auf 10 Parkplätze zu stellen,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, 5 Autos auf 5 Parkplätze zu stellen,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, 10 Spielkarten auf der Hand zu sortieren,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, Tanzpaare aus einer Gruppe von 10 Frauen und 10 Männern zu bilden,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, eine 3-stellige Zahl aus den Ziffern 5, 8, 9, 3, 2 zu bilden,
- Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, eine Geldbörse mit 20 Münzen zu füllen, wobei die Münzsorten 20 Cent, 50 Cent, 1,- € und 2,- € zur Verfügung stehen.

Aufgabe 1.4-2

Berechnen Sie:

- P_0, P_9, P_{22}
- $V_4^{(2)}, V_3^{(1)}, V_8^{(5)}$ jeweils mit und ohne Wiederholung
- $C_{12}^{(5)}, C_{13}^{(12)}, C_{10}^{(2)}$ jeweils mit und ohne Wiederholung
- $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, (1!+0!), \sum_{n=0}^3 \begin{bmatrix} 3 \\ n \end{bmatrix}$

Aufgabe 1.4-3

V. Ergesslich möchte seine Freundin anrufen, die eine 5-stellige Telefonnummer hat.

- a) Er weiß jedoch nur noch, dass die Rufnummer aus den Ziffern 2, 7, 9, 3 und 4 bestand. Wie viele Rufnummern lassen sich aus diesen Ziffern bilden?
- b) Er weiß jedoch nur noch, dass keine 0 und keine der Ziffern mehrmals vorkam.
 - ba) Wie viele verschiedene Ziffernkombinationen (Reihenfolge ist egal) sind möglich?
 - bb) Wie viele Rufnummern lassen sich bilden?
- c) Er weiß jedoch nur noch, dass keine 0 vorkam.
 - ca) Wie viele verschiedene Ziffernkombinationen sind möglich?
 - cb) Wie viele Rufnummern lassen sich bilden?

Aufgabe 1.4-4

Für welche $N \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt:

- a) Die Permutation P_N ist gleich der Variation ohne Wiederholung $V_N^{(n)}$.
- b) Die Kombination ohne Wiederholung $C_N^{(n)}$ ist gleich der Variation ohne Wiederholung $V_N^{(n)}$.

Aufgabe 1.4-5

- a) Wie viele 4-ziffrige Telefonnummern lassen sich aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 bilden?
- b) Wie viele Möglichkeiten für die Belegung der ersten drei Plätze gibt es bei einem Pferderennen, wenn 8 Pferde am Start sind?
- c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, studentische Arbeitsgemeinschaften zu 6 Personen aus 49 StudentInnen zu bilden?
- d) Man hat vier verschiedene Sorten Bonbons. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Tüte mit 10 Bonbons zu füllen?
- e) Während einer Examensklausur sitzen die Studenten A. Pathisch, U.N. Vorbereitet, S. Pickzettel und N. Ullbock in einer Reihe. Wie viele mögliche Sitzanordnungen gibt es?

Aufgabe 1.4-6

- a) Beim Bridgespiel werden 52 verschiedene Karten auf 4 Spieler verteilt. Jeder erhält 13 Karten (ein Blatt). Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Karten auf die Spieler zu verteilen?

- b) Ein Spieler erhält als erster seine 13 Karten verdeckt ausgeteilt. Die erste Karte, die er aufnimmt, ist die Kreuz-Dame (im Spiel gibt es insgesamt vier Damen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter seinen restlichen 12 verdeckt auf dem Tisch liegenden Karten keine weitere Dame befindet?

Aufgabe 1.4-7

Es soll eine parlamentarische Arbeitsgruppe aus 8 Experten gebildet werden. Dabei kommen 10 Mitglieder der Regierungsparteien und 8 der Opposition in Frage. Wie viele Möglichkeiten, den Ausschuss zu besetzen, gibt es, wenn

- je 4 Regierungspartei- und 4 Oppositions- Abgeordnete,
- mehr Regierungspartei- als Oppositions- Abgeordnete,
- mindestens 2 Oppositions- Abgeordnete im Ausschuss vertreten sein sollen?

Aufgabe 1.4-8

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts verband eine Schmalspurbahn 19 Ortschaften. An jeder Station konnte man nach allen übrigen Stationen Karten der Klassen I, II oder III lösen. Wie viele verschiedene Kartenarten musste die Direktion drucken lassen?

Aufgabe 1.4-9

Am 1. Juli 1993 wurde das Postleitzahlensystem in Deutschland von vierstelligen auf fünfstelligen Zahlen umgestellt.

- Wie viele Postleitzahlen könnten theoretisch nach dem alten Postleitzahlensystem vergeben werden, wenn Sie berücksichtigen, dass im alten vierstelligen Postleitzahlensystem die erste Ziffer keine Null sein durfte?
- Wie viele Postleitzahlen könnten theoretisch nach dem neuen Postleitzahlensystem vergeben werden, wenn Sie berücksichtigen, dass im neuen Postleitzahlensystem laut Postleitzahlenbuch die Zifferkombinationen 00, 11, 43 und 62 für die ersten beiden Stellen nicht vergeben wurden?

2 Eindimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilung

2.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter und stetiger Zufallsvariablen (ZV)

Aufgabe 2.1-1

Erklären Sie die Begriffe „Zufallsvariable (ZV)“, „Elementarereignis“ und „Realisation der ZV“ anhand von Beispielen aus dem Bereich des Zufallsvorganges „Werfen von 3 Würfeln“.

Aufgabe 2.1-2

Ein Spieler wirft zwei verschiedenfarbige „faire“ Würfel. Sind beide Augenzahlen gleich und gerade, erhält er einen Gewinn von 5 €. Sind die Augenzahlen aber gleich und ungerade, muss der Spieler 5 € an die Bank zahlen. Sind die Augenzahlen beider Würfel ungleich und stellt ihre Summe eine ungerade Zahl dar, verliert der Spieler 2 €. Ansonsten (ungleiche Augenzahl bei gerader Summe) beträgt sein Gewinn 2 €.

Wählen Sie eine zweckmäßige Zufallsvariable X aus, und erstellen Sie eine geeignete Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Aufgabe 2.1-3

Zufallsvorgang: Dreimaliges Werfen einer Münze

Zufallsvariable: „Eintreffen von Wappen“ (X)

Leiten Sie aus diesen Angaben die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X ab, und stellen Sie die Funktionen graphisch dar.

Aufgabe 2.1-4

Gegeben sei folgende Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} x & \text{für } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Leiten Sie die Verteilungsfunktion her!
- Stellen Sie die Dichte- und Verteilungsfunktion graphisch dar!

Aufgabe 2.1-5

Die stetige Zufallsvariable X sei die Verspätung einer U-Bahn an einer bestimmten Haltestelle und habe die folgende Dichtefunktion (Dimension: Minuten):

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 - 0,125x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass die angegebene Dichtefunktion tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
- Bestimmen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die U-Bahn ein bis zwei Minuten verspätet?

Aufgabe 2.1-6

Ein Würfel ist so gefälscht, dass die Wahrscheinlichkeit Augenzahl i zu würfeln, proportional zu i ist (d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 doppelt so hoch ist wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine 3 gewürfelt wird).

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsvariable „Augenzahl beim einmaligen Wurf“.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Summe der Augenzahlen beim zweimaligen Würfeln mit dem „falschen Würfel“ bei 11 und weniger?

2.2 Parameter der Verteilung einer Zufallsvariablen

Aufgabe 2.2-1

Eine Versicherungsgesellschaft versichert den Sportstar B gegen Tod und Invalidität. Die mit einer Police verbundene (und von der Versicherungsgesellschaft zu leistende) Zahlung X habe folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X = 0) = 0,970 ; P(X = 10^5) = 0,025 ; P(X = 10^6) = 0,005.$$

- Welche Prämie z muss eine Versicherungsgesellschaft als Preis für den von ihr gewährten Versicherungsschutz kalkulieren, wenn sie sich am Erwartungswertprinzip mit einem 20-prozentigen Zuschlag, d.h. an $z = 1,2 E(X)$ orientiert?