

# Vorkurs der Ingenieurmathematik





Edition  
Harri   
Deutsch 

# Vorkurs der Ingenieurmathematik

von

Jürgen Wendeler

**4., erweiterte Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 57327**

**Autor:**

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler war Professor an der ehemaligen Fachhochschule der Telekom, Dieburg

4., erweiterte Auflage

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5791-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

# Vorwort

Dieses Buch dient der Vorbereitung auf ein Ingenieurstudium. Es entstand aus einer Reihe von Aufsätzen, die der Autor in den Unterrichtsblättern der Deutschen Telekom AG veröffentlicht hat und deren methodische Gestaltung Anerkennung fand. Bei der Zusammenfassung der Aufsätze zum vorliegenden Buch wurden dem gesteckten Ziel entsprechend wesentliche Ergänzungen und Erweiterungen vorgenommen.

Behandelt werden Rechenoperationen bis zum Logarithmieren, Funktionen einschließlich der trigonometrischen Funktionen und der algebraisch rationalen Funktionen, Gleichungen, Berechnungen am Dreieck, Vieleck und Kreis, Körperberechnungen und Grundlagen der Vektorrechnung.

Die vorliegende vierte Auflage wurde um zwei ausführliche Kapitel über die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung erweitert, deren Beherrschung mittlerweile zur Vorbereitung auf ein Hochschulstudium gehört. Damit ist im wesentlichen das Gebiet der Elementarmathematik erfasst, und das Buch erhält für alle, die diesen Bereich der Mathematik wiederholen und festigen wollen, eine eigenständige Bedeutung.

Der Autor hat besonders auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit des Lehrstoffs geachtet und am Anfang eine etwas breitere Darstellung gewählt, denn sichere Kenntnisse und Fertigkeiten in der Arithmetik sind eine unentbehrliche Grundlage für das weitere Studium.

Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und Abbildungen unterstützen das methodische Anliegen des Buches. Die große Zahl von Aufgaben einschließlich Lösungen dient der Festigung des Lehrstoffs, seiner sicheren Anwendung sowie der notwendigen Selbstkontrolle für den Leser.

Das Buch ist zum Gebrauch neben Lehrveranstaltungen, aber auch in vollem Umfang zum Selbststudium geeignet. Der Autor dankt dem Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Dieburg, im Sommer 2016

J. Wendeler

## Leserkontakt

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel  
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselderger Str. 23  
42781 Haan-Gruiten  
lektorat@europa-lehrmittel.de  
<http://www.europa-lehrmittel.de>



# Inhaltsverzeichnis

## I Grundlagen

<b>1</b>	<b>Bestimmte und allgemeine Zahlen</b>	16
1.1	Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme	16
1.1.1	Geschichtliches	16
1.1.2	Zahldarstellung	16
1.1.3	Zahlensysteme	17
1.2	Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen	18
1.2.1	Bestimmte Zahlen	18
1.2.2	Allgemeine Zahlen	19
1.3	Grundrechenarten für ganze Zahlen	20
1.3.1	Die Addition	20
1.3.2	Die Subtraktion	20
1.3.3	Die Multiplikation	21
1.3.4	Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff	21
1.3.5	Die Division	22
1.4	Brüche	23
1.4.1	Bruchrechnung	23
1.4.2	Dezimalbrüche	26
1.5	Proportionen	28
1.5.1	Definition und Eigenschaften	28
1.5.2	Direkte und indirekte Proportionalität	30
1.5.3	Prozentrechnung	32
1.6	Aufgaben	33
<b>2</b>	<b>Klammern, Terme, Summen</b>	36
2.1	Klammern	36
2.1.1	Einführung in die Klammerrechnung	36
2.1.2	Mehrere Klammern, Schachtelungen	37
2.2	Terme, Summen	37
2.2.1	Definition des Begriffes Term	37
2.2.2	Erklärung der Summe, Summanden	38
2.2.3	Addition und Subtraktion zweier Summen	39
2.2.4	Multiplikation einer Summe mit einer Zahl, Ausklammern eines Faktors	40
2.2.5	Multiplikation zweier Summen	40
2.2.6	Binomische Formeln	41
2.2.7	Division einer Summe durch eine Zahl, Kürzen	47

2.2.8	Division einer Summe durch eine Summe, Bruchterme, Zerlegen in Faktoren . . . . .	48
2.3	Aufgaben . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Mengen</b> . . . . .	56
3.1	Definition . . . . .	56
3.2	Relationen und Operationen mit Mengen . . . . .	57
3.3	Aussagen und Aussageformen . . . . .	60
3.4	Aufgaben . . . . .	61
 <b>II Funktionen und Gleichungen</b>		
<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungen, Determinanten</b> . . . . .	64
4.1	Gleichungen . . . . .	64
4.1.1	Definition . . . . .	64
4.1.2	Bedeutung der Gleichung . . . . .	64
4.1.3	Geschichtliches . . . . .	65
4.1.4	Einteilung der Gleichungen . . . . .	65
4.1.4.1	Identische Gleichungen . . . . .	65
4.1.4.2	Funktionsgleichungen . . . . .	66
4.1.4.3	Bestimmungsgleichungen . . . . .	66
4.2	Das Lösen von Bestimmungsgleichungen . . . . .	67
4.2.1	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	68
4.2.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	70
4.2.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	72
4.2.4	$n$ lineare Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . .	74
4.3	Gleichungssysteme und Determinanten . . . . .	75
4.3.1	Zweireihige Determinanten, Cramer-Regel . . . . .	75
4.3.2	Dreireihige Determinanten, Regel von Sarrus . . . . .	79
4.3.3	Determinantengesetze . . . . .	81
4.3.4	$n$ -reihige Determinanten . . . . .	85
4.4	Ungleichungen . . . . .	85
4.4.1	Definitionen . . . . .	85
4.4.2	Rechengesetze für Ungleichungen . . . . .	86
4.4.3	Intervalle . . . . .	87
4.4.4	Lineare Ungleichungen . . . . .	88
4.4.4.1	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	88
4.4.4.2	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen . . . . .	88
4.4.4.3	Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen . . . . .	90
4.5	Aufgaben . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Funktionen</b> . . . . .	96
5.1	Definition und Darstellung von Funktionen . . . . .	96
5.1.1	Der Funktionsbegriff . . . . .	96
5.1.2	Darstellung von Funktionen . . . . .	97
5.1.2.1	Die Funktionstafel . . . . .	97
5.1.2.2	Die Funktionsgleichung . . . . .	99
5.1.2.3	Die Funktionskurve . . . . .	102



5.2	Die lineare Funktion . . . . .	104
5.2.1	Definition und grafische Darstellung . . . . .	104
5.2.2	Grafische Lösung einer linearen Gleichung . . . . .	111
5.2.3	Grafische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten . . . . .	113
5.2.4	Anwendungsbezogene Beispiele . . . . .	116
5.3	Die Umkehrfunktion . . . . .	121
5.4	Aufgaben . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Potenzrechnung, die Potenzfunktion . . . . .</b>	<b>124</b>
6.1	Einführung . . . . .	124
6.1.1	Begriff der Potenz, Definitionen . . . . .	124
6.1.2	Geschichtliches . . . . .	125
6.2	Potenzgesetze (Rechengesetze der Potenzen) . . . . .	125
6.2.1	Addition/Subtraktion von Potenzen . . . . .	125
6.2.2	Multiplikation von Potenzen . . . . .	126
6.2.2.1	Potenzen mit gleichen Exponenten . . . . .	126
6.2.2.2	Potenzen mit gleichen Basen . . . . .	126
6.2.3	Division von Potenzen . . . . .	126
6.2.3.1	Potenzen mit gleichen Exponenten . . . . .	126
6.2.3.2	Potenzen mit gleichen Basen . . . . .	126
6.2.4	Potenzieren einer Potenz . . . . .	127
6.3	Anwendungen . . . . .	128
6.4	Die Potenzfunktion . . . . .	130
6.4.1	Definition . . . . .	130
6.4.2	Graphen der Potenzfunktionen . . . . .	131
6.4.2.1	Parabeln . . . . .	131
6.4.2.2	Hyperbeln . . . . .	139
6.4.3	Anwendungen . . . . .	141
6.5	Aufgaben . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Wurzelrechnung, Wurzelfunktionen . . . . .</b>	<b>146</b>
7.1	Einführung . . . . .	146
7.1.1	Grundbegriffe und Definitionen . . . . .	146
7.1.2	Quadratwurzel . . . . .	148
7.1.3	Kubikwurzel . . . . .	149
7.1.4	Rationale und irrationale Zahlen . . . . .	150
7.1.5	Geschichtliches . . . . .	151
7.2	Rechengesetze für Wurzeln . . . . .	152
7.2.1	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten . . . . .	152
7.2.2	Addition und Subtraktion von Wurzeln . . . . .	153
7.2.3	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten . . . . .	154
7.2.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten . . . . .	155
7.2.5	Radizieren von Potenzen . . . . .	156
7.2.6	Radizieren von Wurzeln . . . . .	156
7.2.7	Wurzeln mit verschiedenen Exponenten . . . . .	157
7.3	Rationalmachen des Nenners . . . . .	158
7.4	Wurzelfunktionen . . . . .	160
7.5	Aufgaben . . . . .	164

<b>8</b>	<b>Quadratische und Wurzelgleichungen</b> . . . . .	166
8.1	Definitionen . . . . .	166
8.2	Lösungsverfahren . . . . .	167
8.2.1	Sonderfälle . . . . .	167
8.2.1.1	Rein quadratische Gleichungen . . . . .	167
8.2.1.2	Quadratische Gleichungen mit fehlendem Absolutglied . . . . .	169
8.2.2	Gemischt-quadratische Gleichungen . . . . .	170
8.2.2.1	Quadratische Ergänzung, die $p$ - $q$ -Formel . . . . .	170
8.2.2.2	Lösung in allgemeiner Form . . . . .	174
8.2.2.3	Grafische Lösungen . . . . .	175
8.3	Geschichtliches . . . . .	177
8.4	Anwendungsbeispiele . . . . .	177
8.5	Wurzelgleichungen . . . . .	180
8.6	Aufgaben . . . . .	182
<b>9</b>	<b>Exponential- und Logarithmusfunktion</b> . . . . .	184
9.1	Exponentialfunktion . . . . .	184
9.1.1	Grundbegriffe und Definition . . . . .	184
9.1.2	Grafische Darstellung . . . . .	185
9.1.3	e-Funktion . . . . .	187
9.2	Logarithmische Funktion, Logarithmenrechnung . . . . .	191
9.2.1	Logarithmische Funktion . . . . .	191
9.2.2	Rechnen mit Logarithmen . . . . .	194
9.2.3	Geschichtliches . . . . .	198
9.2.4	Exponentialgleichungen . . . . .	200
9.2.5	Funktionspapiere mit logarithmischem Maßstab . . . . .	204
9.2.5.1	Einfach-logarithmisches Papier . . . . .	204
9.2.5.2	Doppelt-logarithmisches Papier . . . . .	207
9.3	Aufgaben . . . . .	209
<b>10</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b> . . . . .	211
10.1	Winkel . . . . .	211
10.1.1	Definition . . . . .	211
10.1.2	Grad- und Bogenmaß . . . . .	212
10.1.3	Winkel an Geraden und Parallelen . . . . .	216
10.2	Winkelfunktionen . . . . .	218
10.2.1	Definition der Winkelfunktionen . . . . .	218
10.2.2	Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis . . . . .	223
10.2.3	Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen . . . . .	226
10.2.3.1	Die Graphen der Winkelfunktionen . . . . .	226
10.2.3.2	Periodizität . . . . .	227
10.2.3.3	Definitions- und Wertebereich . . . . .	227
10.2.3.4	Symmetrieeigenschaften . . . . .	228
10.3	Additionstheoreme . . . . .	228
10.3.1	Herleitung . . . . .	229
10.3.2	Funktionen des doppelten Winkels . . . . .	231
10.3.3	Summe und Differenz der sin- und cos-Werte zweier Winkel . . . . .	232
10.3.4	Quadrantenrelationen . . . . .	232

10.4	Arkusfunktionen . . . . .	233
10.4.1	Definition . . . . .	233
10.4.2	Grafische Darstellung der Arkusfunktionen . . . . .	235
10.4.3	Darstellung am Einheitskreis . . . . .	235
10.4.4	Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen . . . . .	236
10.4.5	Bestimmung von Winkeln mit den Arkusfunktionen . . . . .	236
10.5	Goniometrische Gleichungen . . . . .	237
10.6	Sinusfunktion, harmonische Schwingungen . . . . .	241
10.7	Aufgaben . . . . .	246
<b>11</b>	<b>Algebraische rationale Funktionen . . . . .</b>	<b>248</b>
11.1	Einteilung der Funktionen . . . . .	248
11.2	Algebraische ganzrationale Funktionen . . . . .	248
11.2.1	Grundbegriffe . . . . .	248
11.2.2	Horner-Schema . . . . .	256
11.3	Algebraische gebrochene rationale Funktionen . . . . .	259
11.3.1	Definitionen . . . . .	259
11.3.2	Besondere Eigenschaften der gebrochenen rationalen Funktion .	260
11.3.2.1	Nullstellen . . . . .	260
11.3.2.2	Polstellen . . . . .	261
11.3.2.3	Lücken . . . . .	265
11.3.2.4	Asymptoten . . . . .	266
11.3.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	273
11.4	Aufgaben . . . . .	277
<b>12</b>	<b>Grundlagen der Differenzialrechnung . . . . .</b>	<b>279</b>
12.1	Einführung, Definitionen . . . . .	279
12.1.1	Aufgabe der Differenzialrechnung . . . . .	279
12.1.2	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten – der Differenzialquotient . . . . .	281
12.1.3	Ableitung als Funktion . . . . .	288
12.1.4	Höhere Ableitungen . . . . .	289
12.1.5	Differenzial . . . . .	290
12.2	Differenziationsregeln . . . . .	292
12.2.1	Differenzieren einer konstanten Funktion . . . . .	292
12.2.2	Faktorregel . . . . .	292
12.2.3	Summenregel . . . . .	293
12.2.4	Produktregel . . . . .	293
12.2.5	Quotientenregel . . . . .	295
12.2.6	Kettenregel . . . . .	296
12.2.7	Differenzieren einer implizit gegebenen Funktion . . . . .	299
12.2.8	Differenzieren mithilfe der Umkehrfunktion . . . . .	302
12.2.9	Logarithmisches Differenzieren . . . . .	303
12.3	Ableitungen einiger elementarer Funktionen . . . . .	304
12.4	Einige Anwendungen der Differenzialrechnung . . . . .	305
12.4.1	Kurvenuntersuchungen . . . . .	305
12.4.1.1	Ganze Funktionen . . . . .	305
12.4.1.2	Gebrochene rationale Funktionen . . . . .	310

12.4.2	Optimierungsaufgaben . . . . .	314
12.5	Aufgaben . . . . .	320
<b>13</b>	<b>Grundlagen der Integralrechnung . . . . .</b>	<b>321</b>
13.1	Anwendung der Integralrechnung . . . . .	321
13.2	Unbestimmte Integrale . . . . .	321
13.2.1	Stammfunktionen und Umkehrung der Differenziation . . . . .	321
13.2.2	Grundintegrale . . . . .	323
13.2.3	Geometrische Deutung der Stammfunktionen . . . . .	324
13.2.4	Ausblick: Differenzialgleichungen . . . . .	326
13.2.5	Integrationsregeln . . . . .	327
13.2.6	Lineare Substitution . . . . .	327
13.3	Bestimmte Integrale . . . . .	330
13.3.1	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe . . . . .	330
13.3.2	Bestimmtes Integral und Stammfunktion . . . . .	332
13.3.3	Rechenregeln für bestimmte Integrale . . . . .	333
13.3.3.1	Umkehrung des Integrationsweges . . . . .	333
13.3.3.2	Zerlegung des Integrationsweges . . . . .	333
13.3.3.3	Linearität . . . . .	333
13.3.4	Lineare Substitution . . . . .	334
13.3.5	Eine Anwendung aus der Mechanik . . . . .	336
13.3.6	Geometrische Anwendungen . . . . .	340
13.3.6.1	Flächenberechnung . . . . .	340
13.3.6.2	Berechnung von Bogenlängen . . . . .	346
13.3.6.3	Berechnung von Rauminhalten und Mantelflächen von rotationssymmetrischen Körpern . . . . .	349
13.3.7	Arbeitsintegrale . . . . .	352
13.3.7.1	Mechanische Arbeit . . . . .	352
13.3.7.2	Elektrische Arbeit . . . . .	357
13.3.8	Mittelwerte . . . . .	359
13.4	Aufgaben . . . . .	364

### III Geometrie und Vektorrechnung

<b>14</b>	<b>Das Dreieck . . . . .</b>	<b>366</b>
14.1	Allgemeines . . . . .	366
14.2	Die Kongruenz von Dreiecken . . . . .	369
14.3	Die Ähnlichkeit von Dreiecken . . . . .	371
14.4	Höhen, Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende . . . . .	373
14.5	Flächeninhalt des Dreiecks . . . . .	375
14.6	Das rechtwinklige Dreieck . . . . .	376
14.7	Das gleichschenklige Dreieck . . . . .	380
14.8	Das gleichseitige Dreieck . . . . .	381
14.9	Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks . . . . .	381
14.9.1	Allgemeines . . . . .	381
14.9.2	Der Sinussatz . . . . .	382
14.9.3	Der Cosinussatz . . . . .	384
14.9.4	Die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung . . . . .	387
14.10	Aufgaben . . . . .	389

<b>15 Das Viereck, Vielecke</b> . . . . .	392
15.1 Das allgemeine Viereck . . . . .	392
15.2 Spezielle Vierecke . . . . .	394
15.3 Das $n$ -Eck . . . . .	397
15.4 Aufgaben . . . . .	400
<b>16 Der Kreis</b> . . . . .	402
16.1 Definition, Umfang und Fläche . . . . .	402
16.2 Geraden, Strecken und Winkel am Kreis . . . . .	403
16.3 Kreissektor und Kreissegment . . . . .	408
16.4 Ähnlichkeitssätze am Kreis . . . . .	410
16.5 Zwei Kreise . . . . .	411
16.6 Aufgaben . . . . .	414
<b>17 Körperberechnung</b> . . . . .	416
17.1 Allgemeines über Körper . . . . .	416
17.2 Der Quader . . . . .	417
17.3 Das Prisma . . . . .	419
17.4 Die Pyramide . . . . .	422
17.5 Der Zylinder . . . . .	428
17.6 Der Kegel . . . . .	430
17.7 Die Kugel . . . . .	432
17.8 Aufgaben . . . . .	436
<b>18 Grundlagen der Vektorrechnung</b> . . . . .	439
18.1 Grundbegriffe, Definitionen . . . . .	439
18.1.1 Vektor und Skalar . . . . .	439
18.1.2 Definitionen . . . . .	441
18.2 Rechengesetze . . . . .	442
18.2.1 Addition . . . . .	442
18.2.2 Subtraktion . . . . .	443
18.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	444
18.3 Komponenten, Koordinaten, Richtungswinkel . . . . .	445
18.4 Lineare Abhängigkeit von Vektoren . . . . .	449
18.5 Skalares Produkt zweier Vektoren . . . . .	455
18.5.1 Definitionen . . . . .	455
18.5.2 Eigenschaften des skalaren Produktes . . . . .	455
18.5.3 Komponentendarstellung des Skalarproduktes . . . . .	458
18.6 Vektorprodukt zweier Vektoren . . . . .	460
18.6.1 Definition . . . . .	460
18.6.2 Eigenschaften des Vektorproduktes . . . . .	461
18.6.3 Komponentendarstellung des Vektorproduktes . . . . .	462
18.7 Spatprodukt . . . . .	466
18.7.1 Definition . . . . .	466
18.7.2 Geometrische Deutung des Spatproduktes . . . . .	467
18.7.3 Rechengesetze . . . . .	468
18.8 Aufgaben . . . . .	468
<b>Lösungen</b> . . . . .	470
<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	493



**Teil I**

**Grundlagen**

# Kapitel 1

## Bestimmte und allgemeine Zahlen

### 1.1 Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme

#### 1.1.1 Geschichtliches

Zu Beginn allen mathematischen Denkens stand das Zählen. Die dazu benötigten Zahlzeichen oder *Ziffern* stammen von den Indern und wurden von den *Arabern* auf ihren Kriegszügen nach Europa gebracht, wo sie die bis dahin allgemein üblichen römischen Zahlzeichen verdrängten.

Die Verbreitung der *arabischen Ziffern* in weiten Kreisen der deutschen Bevölkerung und das Rechnen mit ihnen gelang erst dem berühmten Rechenmeister ADAM RIESE (1492–1559) durch sein im Jahr 1525 herausgegebenes Rechenbuch.

#### 1.1.2 Zahldarstellung

Die wohl einfachste Form der Zahldarstellung ist das *Strichsystem*, wie es bei den sog. Kerbhölzern zum Notieren von Schulden üblich war (daher auch die Redewendung: Er hat etwas auf dem Kerbholz). Für größere Zahlen ging bei diesem Verfahren der Überblick verloren. Deshalb fasste man eine bestimmte Anzahl von Strichen zu Gruppen zusammen (Fünfergruppe, Zehnergruppe, ...) und gab diesen Gruppen neue Zahlzeichen. Dieses Verfahren führte zum sog. *Additionssystem*, dessen bekanntestes Beispiel die römische Zahlenschreibweise ist:

Von den Grundzeichen ( $I = 1$ ;  $X = 10$ ;  $C = 100$ ;  $M = 1000$ ) werden je zehn zur nächsthöheren Gruppe zusammengefasst; dazu gibt es noch Hilfszeichen ( $V = 5$ ;  $L = 50$ ;  $D = 500$ ). Durch Addieren (lateinisch *addere*, hinzufügen) der einzelnen Zeichen lassen sich größere Zahlen darstellen. Steht ein Zeichen (Ziffer) links neben einem höheren Zeichen, bedeutet das eine Subtraktion. Damit wird die viermalige Wiederholung eines Zeichens vermieden.



*Beispiel 1.1*

$$\begin{aligned}
 1879 &= \text{MDCCCLXXIX} \\
 &= 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 - 1 + 10 \\
 1993 &= \text{MXMIII} \\
 &= 1000 - 10 + 1000 + 1 + 1 + 1
 \end{aligned}$$

(Häufig wird auch die Schreibweise MCMLXXXIII oder MCMXCIII verwendet.)

Auch dieses Verfahren erwies sich bei noch größeren Zahlen und vor allem beim Addieren als sehr umständlich.

### 1.1.3 Zahlensysteme

Deshalb traf es sich gut, dass die Araber mit den indischen Zahlenzeichen auch das von den Indern stammende Positionssystem<sup>1)</sup> nach Europa brachten, das erst die Darstellung von beliebig großen Zahlen in der heutigen einfachen Form mittels neun Ziffern und der Null als Zeichen für eine leere Stelle ermöglichte.

In diesem System werden je zehn Einheiten (Einer, E) zu einer neuen Gruppe, den Zehnern, Z, zusammengefasst; davon wieder zehn zu einem Hunderter, H, usw. Jedoch wird für diese übergeordneten Gruppen - und das macht dieses System jetzt so übersichtlich und einfach - kein neues Zeichen wie bei den Römern eingeführt, sondern sie werden *durch ihre Stellung* innerhalb des ganzen Zahlzeichens *kenntlich gemacht*. In dem römischen Zeichen III für drei hat jede der drei Ziffern den Zahlenwert 1, und da es sich um ein Additionssystem handelt, ergibt sich die ganze Zahl durch Addition der drei Einzelwerte. In dem Zahlzeichen 111 für einhundertelf haben ebenfalls alle drei Ziffern den Zahlenwert 1, jedoch stehen sie innerhalb des ganzen Zahlzeichens an verschiedenen Stellen. Sie haben also *verschiedene Stellenwerte*, und zwar steht der niedrigste Stellenwert – der Einer – am weitesten rechts.

*Beispiel 1.2:*

$$\begin{aligned}
 1993 &= 1\text{T} + 9\text{H} + 9\text{Z} + 3 \\
 &= 1000 + 900 + 90 + 3 \\
 &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0
 \end{aligned}$$

[Über die Schreibweise und Bedeutung von  $10^3, \dots, 10^0$  siehe Abschnitt 6.1]

Da jeweils zu Zehnergruppen zusammengefasst wird, spricht man von einem *dekadischen* (griechisch *deka*, zehn) Positionssystem oder von einem *Dezimalsystem* (lat. *decem*, zehn). Die Zahl zehn heißt auch *Basis* (Grundzahl) des Systems.

Andere Zahlensysteme wie das *Zwölfersystem* (sprachliche Überreste: Dutzend, Gros) oder das *Sechzigersystem* (Sexagesimalsystem) der Babylonier (Überreste: 1 Stunde = 60 Minuten =  $60 \cdot 60$  Sekunden), haben sich nicht halten können. Dafür hat ein anderes Zahlensystem, das *Dualsystem* (lat. *duo*, zwei), auch *Zweiersystem* oder *Binärsystem* (lat. *bini*, je zwei) genannt, als Rechenbasis der Computer (elektronischen Rechenanlagen) eine

<sup>1)</sup> *Position* hier in der Bedeutung: Stelle Lage Standort.

überragende Bedeutung gewonnen. – Entsprechend dem Dezimalsystem, bei dem man höchstens zehn Zeichen benötigt (0, 1, 2, ..., 9), um eine Zahl anschreiben zu können, braucht man beim Dualsystem nur zwei Zeichen (0, 1 oder O, L). Damit wird die Darstellung einer Zahl sehr aufwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

*Beispiel 1.3:*

$$\begin{aligned} 1993_{10} &= \text{LLLLLOOLOOL}_2 \\ &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 \\ &\quad + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \\ &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 8 + 1 \end{aligned}$$

[Die Indizes (lat. *Index*, Anzeiger) 10 und 2 in der ersten Zeile geben das Zahlensystem an; L ist das Besetztsymbol, O das Leerzeichen für eine Position in Dualsystem.]

Aber es ist technisch am einfachsten, im Computer elektrische und elektronische Bauelemente zu verwenden, die nur zwischen zwei verschiedenen Zuständen (entsprechend den zwei Zeichen des Dualsystems) unterscheiden müssen:

Durch einen Draht fließt entweder ein Strom oder nicht, ein Schalter ist entweder geschlossen oder offen, ein Magnetring ist entweder rechtsherum oder linksherum magnetisiert usw.

Bei der Bedienung eines Rechners werden die Zahlen als Dezimalzahlen eingegeben; der Rechner übersetzt sie dann ins Dualsystem, ehe er mit ihnen weiterrechnet.

## 1.2 Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen

### 1.2.1 Bestimmte Zahlen

Ursprünglich kannte man nur die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ..., die man als Folge des Zählens erhält. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unbegrenzt.

Grafisch (griechisch *graphein*, zeichnen) lässt sich die Folge durch den *Zahlenstrahl* darstellen. Man trägt auf einem waagerechten Strahl (Bild 1.1) vom Anfangspunkt 0 (lat. *origo*, Anfang) aus eine beliebige Einheit, z. B. 1 cm, wiederholt nach rechts ab.

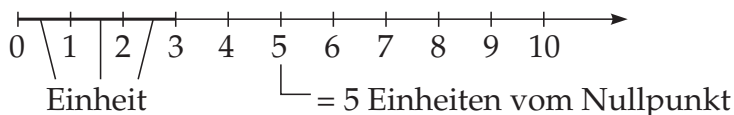


Bild 1.1

Auf diese Weise erhält man Bildpunkte, die man durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... kennzeichnet. Der Ausgangspunkt 0 heißt *Nullpunkt* der Zählung. Die Zahlen geben den Abstand in Einheiten vom Nullpunkt an. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit  $N$  bezeichnet.

Bald schon genügten die natürlichen Zahlen nicht mehr den Ansprüchen des täglichen Lebens. So sind zwar 50 € dem *Betrag* nach immer gleich; es ist aber ein Unterschied, ob

man sie zu bekommen hat oder jemandem zahlen muss. Diesen Unterschied kennzeichnet man durch das *Vorzeichen*, mit dem der Betrag von 50 € versehen wird. Im ersten Fall hat man 50 € gut (Guthaben: +50 €). Beträge mit einem *Pluszeichen* („und“-Zeichen, +) oder *ohne Vorzeichen* nennt man *positive Zahlen*. Als ganze Zahlen entsprechen sie den bereits bekannten natürlichen Zahlen. Beträge mit einem *Minuszeichen* („weniger“-Zeichen, –) nennt man *negative Zahlen*. Beide zusammen bilden die Menge  $Z$  der *ganzen Zahlen*.

Man bezeichnet den Schritt von den natürlichen zu den ganzen Zahlen als *erste Erweiterung des Zahlenbereiches*.

Die negativen Zahlen stellt man grafisch ebenfalls mittels eines Zahlenstrahles dar, der diesmal jedoch nach links orientiert ist (Bild 1.2).

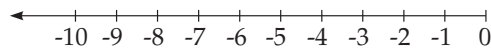


Bild 1.2

Fasst man beide Strahlen zusammen, so erhält man die *Zahlengerade* – sie besitzt keinen Anfang und kein Ende – und ist damit eine grafische Darstellung der ganzen Zahlen (Bild 1.3). Die Orientierung geschieht von links nach rechts in Richtung immer größerer Zahlen. Jede Zahl hat einen kleineren Vorgänger (z. B.  $3 < 4$ , „drei ist kleiner als vier“, oder  $-5 < -4$ , „minus fünf ist kleiner als minus vier“) und einen größeren Nachfolger (z. B.  $5 > 4$ , „fünf ist größer als vier“, oder  $-6 > -7$ , „minus sechs ist größer als minus sieben“).

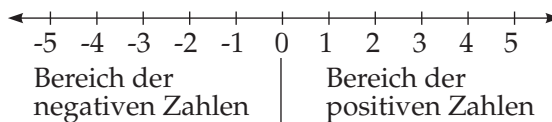


Bild 1.3

Zahlen, die vom Nullpunkt aus den gleichen Abstand haben, besitzen den gleichen *absoluten Betrag*. Man kennzeichnet den Betrag einer Größe, indem man sie in zwei senkrechte Striche, die Betragsstriche, einschließt, z. B.  $|-3| = |+3| = 3$  (der Betrag von  $-3$  ist gleich dem Betrag von  $+3$ , nämlich 3).

### 1.2.2 Allgemeine Zahlen

Alle hier bisher betrachteten Zahlen sind *bestimmte Zahlen*, weil sie eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten angeben. Sie werden *mit Ziffern geschrieben* und spielen eine wichtige Rolle im täglichen Leben.

In der Mathematik jedoch, wo es darauf ankommt, allgemein gültige Formeln und Gesetzmäßigkeiten anzugeben und allgemeine Beweise zu führen, reichen bestimmte Zahlen allein nicht mehr aus. Das Einführen von Buchstaben zur Bezeichnung *allgemeiner Zahlen* durch den französischen Mathematiker FRANCOIS VIÉTA (1540–1603) förderte deshalb den Ausbau der Mathematik, insbesondere der Arithmetik (griechisch *arithmos*, Zahl) ganz erheblich. – Schon ein Jahrhundert vor Viéta benutzte der deutsche JOHANNES MÜLLER

(aus Königsberg in Franken) die Buchstaben zur Bezeichnung allgemeiner Zahlen. Sein frühzeitiger Tod verhinderte indes eine Ausbreitung dieser mathematischen Zeichensprache.

Bei der „Buchstabenrechnung“ verwendet man gewöhnlich die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets:  $a, b, c, \dots$  (Ausnahme: Winkel werden mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet). Sie stellen Zahlen dar, die keine bestimmte Einheit haben. Ihnen wird von Fall zu Fall nicht nur ein bestimmter Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Einheit zugeordnet. Dabei ist zu beachten, dass *ein und derselbe Buchstabe in einer Aufgabe stets ein und denselben Zahlenwert bedeutet*.

## 1.3 Grundrechenarten für ganze Zahlen

Ganze und allgemeine Zahlen lassen sich durch Rechenoperationen (Rechenarten) miteinander verknüpfen. Die vier bekanntesten, die sog. Grundrechenarten, sollen hier kurz wiederholt werden.

### 1.3.1 Die Addition

(lat. *addere*, hinzufügen)

Summand	plus	Summand	gleich	Summe
3	+	4	=	7
-3	+	4	=	4 - 3 = 1
-3	+	(-4)	=	-3 - 4 = -7
3	+	(-4)	=	3 - 4 = -1
allgemein:				
$a$	+	$b$	=	$a + b$

Dabei gilt das *kommutative Gesetz* (lat. *commutare*, vertauschen):

$$a + b = b + a$$

(1.1)

► Bei der Addition ist die Reihenfolge der Summanden beliebig.

### 1.3.2 Die Subtraktion

(lat. *subtrahere*, abziehen)

Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz
7	-	3	=	4
7	-	8	=	-1
7	-	(-3)	=	7 + 3 = 10
-7	-	3	=	-10
-7	-	(-3)	=	-7 + 3 = -4
allgemein:				
$a$	-	$b$	=	$a - b$

Für *beide* Rechenoperationen gilt:

► Gleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Addition; ungleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Subtraktion.