Mathematik für die Fachschule für Technik

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70388

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachschule für Technik“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Dr. Frank-Michael Gumpert	Stuttgart-Birkach
Gerhard Mack	Esslingen
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Durbach/Ortenau

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2015
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-7038-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
http://www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Durbach; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: fidus Publikations-Service, 86720 Nördlingen/Löpsingen

Druck: Konrad Triltsch Print und digitale Medien GmbH, 97199 Ochsenfurt-Hohestadt

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch dient der vertieften beruflichen Fortbildung für Fachkräfte, mit beruflicher Erstausbildung oder für Umschüler mit langer beruflicher Erfahrung. Es deckt den Lehrplan für Fachschulen, Fachakademien und auch Berufskollegs ab. Es dient auch zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung in Mathematik, Technik und Nichttechnik.
Ein kompaktes Lehr- und Übungsbuch, das auch schwierige mathematische Zusammenhänge anhand praktischer Beispiele visualisiert und erklärt. Dieser Praxisbezug zeigt dem Lernenden die jeweilige Anwendung der mathematischen Themen auf. Im Mittelpunkt des Lernprozesses steht das selbst organisierte und selbst gesteuerte Lernen erwachsener Schülerinnen und Schüler.

Zur Förderung handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Zu jeder Aufgabe ist die Lösung auf derselben Seite angegeben. Das Buch ist deshalb auch sehr gut zum selbstständigen Lernen geeignet. Zum Üben dienen eine Vielzahl von Aufgaben am Buchende. Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung, sowie eine Formelsammlung ergänzen das Buch.

Um unterschiedliche Vorkenntnisse auszugleichen, beginnt das Buch mit den Kapiteln Algebraische und Geometrische Grundlagen.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Prüfungsvorbereitung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Projektaufgaben**
- **Selbst organisiertes Lernen mit**
  Übungsaufgaben – Musteraufgaben – Musterprüfungen

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: **info@europa-lehrmittel.de**

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel — Herbst 2015

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion
Ist die Funktion f'(x), deren Werte die Steigungen des Grafen der Funktion f(x) angeben.

Abgestumpfte Körper
Kegelstumpf und Pyramidenstumpf werden so bezeichnet.

Achsenschnittpunkte
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, z. B. x-, y- oder z-Achse.

Äquivalenzumformung
Umformen von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktionen
Als Arkus-Funktionen z. B. arcsinx, arctanx, werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen sinx, tanx Funktionen bezeichnet.

Asymptote
Eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert.

Biquadratische Gleichung
Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades mit nur geradzahligen Exponenten ($ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Differenzenquotient
Ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte der Funktion.

Differenzialquotient
Grenzwert des Differenzenquotienten, entspricht der Steigung der Tangente.

Differenzierbarkeit von Funktionen
Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

Ebenengleichung
Fläche, die z. B. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt ist.

e-Funktion
Exponentialfunktionen mit der Basis e, natürliche Exponentialfunktionen genannt.

Exponentialfunktion
Bei der Exponentialfunktion ist die Hochzahl die unabhängige Variable.

Funktion
Eindeutige Zuordnungen von Elementen nennt man Funktionen.

Ganze Zahlen
Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktion
Ganzrationale Funktionen bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gebrochenrationale Funktion
Bei einer gebrochenrationalen Funktion steht im Zähler das Zählerpolynom und im Nenner das Nennerpolynom.

Gerade
Der Funktionsgraph für die Darstellung linearer Zusammenhänge (lineare Funktion) heißt Gerade.

Gleichung
Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

Hesse'sche Normalenform HNF
In der Hesse'schen Normalenform der Ebenengleichung wird der Normaleneinheitsvektor statt des Normalenvektors verwendet.

Imaginäre Zahlen
Scheinbare (unvorstellbare) Zahlen, z. B. j; 3j; –2j.

Integrieren
Integrieren heißt, eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückzuführen.

Irrationale Zahlen
Sind Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommaziffern, z. B. Wurzelzahlen, die Konstanten π und e.

Kartesische Koordinaten
Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Komplexe Zahlen
Zahlen, die reell und/oder imaginär sind.

Konstante Funktion
Funktionswert bleibt für alle x konstant.

Koordinatensystem
Mit Koordinaten (= Zahlen, die die Lage von Punkten angeben) lassen sich diese in einer Ebene oder im Raum eindeutig festlegen.

Lineare Funktion
Ganzrationale Funktion 1. Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS
System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktionen
Sie sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Logarithmus
Logarithmieren heißt, die Hochzahl (= Exponent) einer bestimmten Potenz berechnen.

Natürliche Zahlen
Positive, ganze Zahlen einschließlich der Null.

Numerische Integration
Numerische Integration heißt, den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, z. B. durch Auszählen von elementaren Teilflächen, wie Rechtecken oder Trapezen. (Anwendung, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.)

Nullstellen
Die x-Werte der Schnittpunkte eines Funktionsgraphen mit der x-Achse nennt man Nullstellen.

Orthogonal
Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel
Graph einer quadratischen Funktion.

Pol
Stelle, an der eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Polynom
Eine andere Bezeichnung für "ganzrationale Funktion".

Potenz
Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktionen
Sind Funktionen, von der Form $y = x^n$.

Quadranten
Zeichenebenen in Koordinatensystemen.

Quadratische Gleichung
Ist eine Gleichung 2. Grades ($ax^2 + bx + c = 0$).

Quadratwurzel
Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt.

Rationale Zahlen
Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen
Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation
Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung.

Skalar
Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Spitze Körper
Pyramide und Kegel werden als spitze Körper bezeichnet (Prismatische Körper).

Spurgerade
Die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) einer Ebene mit einer Koordinatenebene bilden die Spurgerade.

Spurpunkte
Spurpunkte nennt man die Durchstoßpunkte (Schnittpunkte) einer Geraden mit den Koordinaten-ebenen.

Steigung
Als Steigung wird das Verhältnis des Δy-Wertes zum Δx-Wert eines Steigungsdreiecks, z. B. einer Tangente, bezeichnet.

Stetigkeit von Funktionen
Stetige Funktionen können durch einen lückenlosen, zusammenhängenden Kurvenzug dargestellt werden.

Term
Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktionen
Winkelfunktionen, z. B. sin x, tan x.

Umkehrfunktion
Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen vertauscht wird.

Variable
Das sind Buchstaben, z. B. x, y, an deren Stelle Zahlen der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor
Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wurzelfunktionen
Das sind Potenzfunktionen, die gebrochene Hochzahlen enthalten.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term

Terme können Zahlen, z. B. -1; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z. B. a; x; y, sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

1.2 Gleichung

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r.

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung
Stellen Sie die beiden Terme T_l: $x + 2$ und T_r: -4 als Gleichung dar.
Lösung: $\mathbf{x + 2 = -4}$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden **(Tabelle 1)**. Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung
Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung:
$$x + 2 = -4 \quad | -2$$
$$x + 2 - 2 = -4 - 2$$
$$\mathbf{x = -6}$$

1.3 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen **(Tabelle 2)**.

Beispiel 3: Definitionsmenge
Die Definitionsmenge der Gleichung
$\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt.
$D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$
Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:
$\mathbf{D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}}$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen $T_l = T_r$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0 \quad \| +a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0 \quad \| -a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad \| \cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$; $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4 \quad \| :2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in $\mathbb{R}$

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \{x \| x \neq 1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x \| x \geq 1\}$
Logarithmusterm $T_l = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x = \lg x$ $x > 0$ $D = \{x \| x > 0\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner -273° C werden. Diese eingeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Aufgaben:

1. Lösungsmenge. Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$ **d)** $\frac{2-x}{2} + a = 1$

e) $\frac{2x-a}{4} - b = 2$ **f)** $\frac{3x-5}{5} = \frac{2x-3}{4}$

2. Lösen von Gleichungen. Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ **b)** $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge. Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$ **b)** $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

Lösungen:

1. a) $x = \frac{20}{7}$ **b)** $x = -10$ **c)** $x = 28$ **d)** $x = 2a$
e) $x = \frac{1}{2}a + 2b + 4$ **f)** $x = \frac{5}{2}$

2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$ **b)** $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. a) $D = \{x | x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$; $L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 11]

1.4 Potenzen

1.4.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-Faktoren}} = a^n \qquad a^n = b$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis; a > 0 n Exponent
b Potenzwert

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie
a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^5}$ b) $2^5 = \mathbf{32}$

1.4.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3}; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \mathbf{0{,}125}$

b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

Beispiel 3: Physikalische Benennungen

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot min^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:
a) $m \cdot s^{-2} = \mathbf{\frac{m}{s^2}}$ b) $U \cdot min^{-1} = \mathbf{\frac{U}{min}}$ c) $\frac{m}{s} = \mathbf{m \cdot s^{-1}}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (**Tabelle 1**).

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$
$= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = \mathbf{6x^3 + 2y^2}$

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1$; für $a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation
Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = \mathbf{32}$

oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = \mathbf{32}$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

a) Die Fläche des Quadrates mit a = 2 m **(Bild 1)** und
b) das Volumen des Würfels für a = 2 m ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = \mathbf{a^2}$
$A = 2\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 2 \cdot 2\text{ m} \cdot \text{m} = 2^2\text{ m}^2 = \mathbf{4\ m^2}$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = \mathbf{a^3}$
$= 2\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2\text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$
$= 2^3\text{ m}^3 = \mathbf{8\ m^3}$

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division
Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

oder $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren
Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = \mathbf{64}$
oder $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = \mathbf{9}$ c) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = \mathbf{-9}$

$(-a)^2 = a^2$ $-a^2 = -(a^2)$

a Basis; a > 0

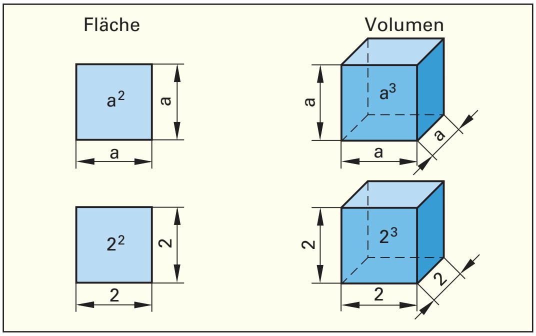


Bild 1: Fläche und Volumen

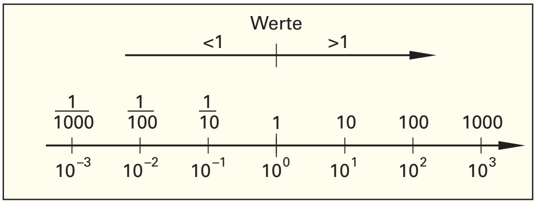


Bild 2: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1 000 000 000	10^9	G	(Giga)
1 000 000	10^6	M	(Mega)
1 000	10^3	k	(Kilo)
100	10^2	h	(Hekto)
10	10^1	da	(Deka)
1	10^0	–	
0,1	10^{-1}	d	(Dezi)
0,01	10^{-2}	c	(Centi)
0,001	10^{-3}	m	(Milli)
0,000 001	10^{-6}	µ	(Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n	(Nano)

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 2** und **Tabelle 1**).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen
Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) 20 µH b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6}$ H b) $10 \cdot 10^{-3}\,\ell$ c) $3 \cdot 10^3$ Hz

1.5 Wurzelgesetze

1.5.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden $\Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist

a) in Potenzschreibweise darzustellen und

b) der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = \mathbf{4^{\frac{1}{2}}}$ b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$; denn $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$

$\sqrt[n]{a} = x;\ a \geq 0$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ a \geq 0$

n	Wurzelexponent	a	Radikand, Basis
x	Wurzelwert	m, $\frac{m}{n}$	Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt[3]{b}$, $+2\sqrt{a}$, $+4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3 + 2)\sqrt{a} + (4 - 2)\sqrt[3]{b}$

$= \mathbf{5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = \mathbf{12}$

oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = \mathbf{12}$

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \mathbf{0{,}75}$

oder $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$\sqrt[2]{a^2} = |a|$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **–a für a < 0**

Beispiel 1: Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

1.6 Binomische Formeln

Binomische Formeln finden Anwendung in der Algebra z. B. beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und bei der Vereinfachung von Bruchtermen. Die Formeln lassen sich aus den Distributivgesetzen der Multiplikation herleiten. Der Begriff „Binom" geht zurück auf die in den Klammertermen $(a + b)$, $(a - b)$ und $(a + b) \cdot (a - b)$ vorkommenden *2* (lat. *bi*) Variablen a und b.

1. Binomische Formel

Beispiel 1: Anwendung der 1. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3 + 6)^2$ **b)** $(x + 2)^2$ **c)** $(3x + 5y)^2$

Lösung:

a) $(3 + 6)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 6^2 = 81$

b) $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

c) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Bild 1 veranschaulicht die 1. Binomische Formel: Die gesamte Quadratfläche $(a + b)^2$ setzt sich zusammen aus der roten und der gelben Quadratfläche $a^2 + b^2$ und den beiden grünen Rechteckflächen 2ab, d. h. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Binomische Formel

Beispiel 2: Anwendung der 2. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammertexte auf:

a) $(3a - 4)^2$ **b)** $(5u - 3v)^2$ **c)** $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2$

Lösung:

a) $(3a - 4)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot 4 + 4^2 = 9a^2 - 24\,a + 16$

b) $(5u - 3v)^2 = (5u)^2 - 2 \cdot (5u) \cdot (3v) + (3v)^2 = 25u^2 - 30uv + 9v^2$

c) $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2 = (\frac{2}{3}p)^2 - 2 \cdot (\frac{2}{3}p) \cdot (\frac{5}{4}\,q) + (\frac{5}{4}q)^2 = \frac{4}{9}p^2 + \frac{5}{3}pq + \frac{25}{16}q^2$

Bild 2 veranschaulicht die 2. Binomische Formel: Zieht man von der gesamten Quadratfläche a^2 die beiden Rechteckflächen $2(a - b)b$ und die gelbe Quadratfläche b^2 ab, verbleibt die rote Quadratfläche $(a - b)^2$, d. h.

$(a - b)^2 = a^2 - 2(a - b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel

Bild 3 veranschaulicht die 3. Binomische Formel: Die blaue Differenzfläche $a^2 - b^2$ im linken Teil der Grafik setzt sich aus 2 gleichgroßen Trapezflächen zusammen, die auch zu einer Rechteckfläche $(a + b) \cdot (a - b)$ angeordnet werden können, d. h. $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

1. Binomische Formel (Plus-Formel):
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel (Minus-Formel):
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel (Plus-Minus-Formel):
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

a, b Variable $(a, b \in \mathbb{R})$

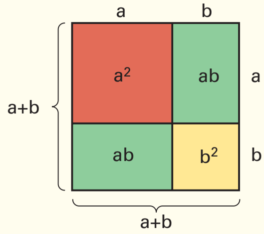


Bild 1: 1. Binomische Formel

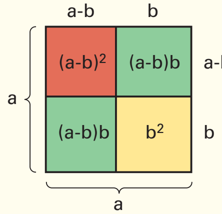


Bild 2: 2. Binomische Formel

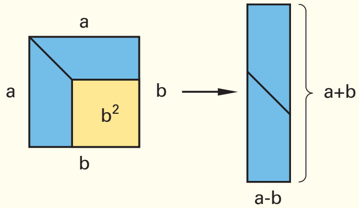


Bild 3: 3. Binomische Formel

Beispiel 3: Anwendung der 3. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4)$ **b)** $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a)$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f)$

Lösung:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4) = (3a)^2 - 4^2 = 9a^2 - 16$

b) $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a) = (7q)^2 - (5a)^2 = 49q^2 - 25a^2$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f) = (5e + 6f) \cdot (5e - 6f) = (5e)^2 - (6f)^2 = 25e^2 - 36f^2$

So wie für $(a + b)^2$ lassen sich auch für $(a + b)^3$ und höhere Potenzen binomische Formeln herleiten.

Binomischer Lehrsatz

Beispiel 1: Binomische Formel für $(a + b)^3$

Lösen Sie mithilfe der 1. binomischen Formel $(a + b)^3$ auf.

Lösung:

$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Nachfolgend sind einige binomische Formeln aufgelistet:

$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$\vdots \qquad \vdots$

Der Exponent (Hochzahl) der a-Potenzen fällt von einem Glied zum nächsten, während der Exponent der b-Potenzen wächst, wobei die Summe beider Exponenten konstant bleibt. Am Beispiel von $(a+b)^4$ hieße das: die Summe beider Exponenten ist 4 in jedem Glied (beachte, a^4 kann man sich auch geschrieben denken als a^4b^0 und b^4 als a^0b^4). Die blau markierten Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (gelesen n über k); n steht für den Grad der Potenz und k $(0 \leq k \leq n)$ für das betreffende Glied der Reihe. Damit lässt sich die binomische Formel z. B. für n = 4 auch in der Form schreiben (**Binomischer Lehrsatz**):

$(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$

Beispiel 2: Binominalkoeffizienten berechnen

Berechnen Sie die ersten 3 Koeffizienten von $(a + b)^4$.

Lösung:

$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1,\ \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} =$
$\frac{24}{1 \cdot 6} = 4,\ \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

Beispiel 3: Binominalkoeffizienten berechnen und Formel aufstellen

Stellen Sie analog zu n = 4 den Binomischen Lehrsatz für n = 5 auf.

Lösung:

$(a + b)^5$
$= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4$
$+ \binom{5}{5}a^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
$0! = 1;\ 1! = 1$

Binominalkoeffizienten $(n, k \in \mathbb{N};\ k \leq n)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

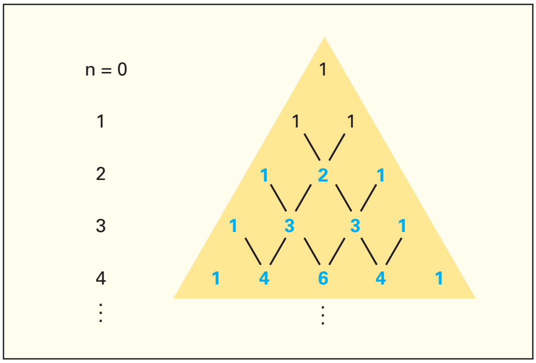


Bild 1: Pascal'sches Dreieck

Pascal'sches Dreieck

Ordnet man, beginnend mit
$(a + b)^0 = 1$ und $(a + b)^1 = 1a + 1b$,
die Koeffizienten dreieckförmig untereinander an, entsteht das **Pascal'sche Dreieck** (**Bild 1**). Die Zahlen einer jeden Zeile erhält man, indem die zwei benachbarten Zahlen der darüber stehenden Zeile addiert werden. Auf diese Weise lässt sich das Dreieck Zeile um Zeile erweitern, ohne auf Berechnungsformeln zurückgreifen zu müssen. Dieses Hilfsmittel stellt somit eine „formelfreie“ Alternative zur algebraischen Bestimmung der Binomialkoeffizienten dar.

Beispiel 4: Pascal'sches Dreieck fortsetzen

Stellen Sie die Koeffizientenzeile für n = 5 (**Bild 1**) dar und vergleichen Sie das Ergebnis mit Beispiel 3.

Lösung:

Ausgehend von der Zeile für n = 4, gelangt man gemäß des oben beschriebenen Bildungsprinzips zur Folgezeile für n = 5:

n = 4   1   4   6   4   1

n = 5   1   5   10   10   5   1

Diese Werte stimmen mit den in Beispiel 3 berechneten Binomialkoeffizienten überein.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

1. Leiten Sie die ersten beiden binomischen Formeln aus dem Distributivgesetz der Multiplikation her.

2. Lösen Sie mithilfe der binomischen Formeln die Klammern auf und fassen Sie dann zusammen.

   a) $-3(a+b)^2 + 6ab$; **b)** $(a+b)^2 - (a-b)^2 - 3ab$

   c) $(5u+3v)(5u-3v) - 24u^2 + 8v^2$

   d) $4(a+3)(a+1)(a-3) + 36(a+1)$

3. Faktorisieren Sie, d.h. wandeln Sie Summen oder Differenzen in Produkte um (Binomische Formeln rückwärts).

   a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **b)** $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{5}ab + \frac{1}{25}b^2$

   c) $3x^2 + 12x + 12$ **d)** $9p^2 - 42pq + 49q^2$

   e) $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{3}pq + \frac{1}{9}q^2$ **f)** $20v^2 - 60vw + 45w^2$

   g) $64x^2 - 144y^2$ **h)** $\frac{9}{16}u^2 - \frac{1}{25}v^2$

   i) $7a^2 - 63b^2$

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich durch Ausklammern, Produktbildung und Kürzen.

   a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15}$ **b)** $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y}$

   c) $\frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$ **d)** $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2}$

   e) $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2}$ **f)** $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2}$

5. Leiten Sie Binomische Formeln her für

   a) $(a-b)^3$

   b) $(a-b)^4$

<u>Hinweis</u>: Verwenden Sie die bereits bekannten Binomischen Formeln für $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$ (**vorhergehende Seite**) und ersetzen Sie hierin b durch (–b).

6. Lösen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes die Klammerterme auf:

   a) $(3x+2)^4$ **b)** $(x-2y)^4$ **c)** $(x-y)^5$

Lösungen:

1. Erste Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite Binomische Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = (a+(-b))\cdot(a+(-b))$$

$$= a\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)\cdot(-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Fortsetzung Lösungen:

2. a) $-3a^2 - 3b^2$; **b)** ab; **c)** $u^2 - v^2$; **d)** $4a^3 + 4a^2$

3. b) $(2x+3y)^2$; **b)** $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}b)^2$; **c)** $3(x+2)^2$

d) $(3p-7q)^2$; **e)** $(\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q)^2$; **f)** $5(2v-3w)^2$

g) $(8x+12y)(8x-12y)$; **h)** $(\frac{3}{4}u + \frac{1}{5}v)(\frac{3}{4}u - \frac{1}{5}v)$

i) $7(a+3b)(a-3b)$

4. a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15} = \frac{(x+5)^2}{3(x+5)} = \frac{1}{3}(x+5)$

b) $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y} = \frac{2(x^2 - 12xy + 36y^2)}{8(x-6y)} = \frac{1}{4}(x-6y)$

c) $\frac{(x-1)^2}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$

d) $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2} = \frac{(u+3v)\cdot(u-3v)}{(u+3v)^2} = \frac{u-3v}{u+3v}$

e) $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2} = \frac{(2a-7b)^2}{2b(2a-7b)} = \frac{2a-7b}{2b}$

f) $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2} = \frac{(a+b)x + (a+b)y}{(x+y)(x-y)} = \frac{a+b}{x-y}$

5. a) $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

b) $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

6. a) $(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3\cdot 2 + \binom{4}{2}(3x)^2 2^2 + \binom{4}{3}(3x)2^3 + \binom{4}{4}2^4$

$= 81x^4 + 4\cdot 27x^3\cdot 2 + 6\cdot 9x^2\cdot 4 + 4\cdot 3x\cdot 8 + 16$

$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(x-2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y) + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}x(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4$

$= x^4 - 4x^3\cdot 2y + 6x^2\cdot 4y^2 - 4x\cdot 8y^3 + 16y^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

c) $(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$

$= x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3$

$+ 5x(-y)^4 + (-y)^5$

$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

1.7 Logarithmengesetze

1.7.1 Logarithmusbegriff

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und arithmos = Zahl) ist der Exponent (Hochzahl), mit der man die Basis (Grundzahl) a potenzieren muss, um den Numerus (Potenzwert, Zahl) zu erhalten.

Einen Logarithmus berechnen heißt den Exponenten (Hochzahl) einer bestimmten Potenz zu berechnen.

Für das Wort Exponent wurde der Begriff Logarithmus eingeführt.

Beispiel 1: Logarithmus
Suchen Sie in der Gleichung $2^x = 8$ die Hochzahl x, sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Lösung:
$2^x = 8$; $2^3 = 8$; $\Rightarrow$ $\mathbf{x = 3}$

Die Sprechweise lautet: x ist der Exponent zur Basis 2, der zum Potenzwert 8 führt.

Die Schreibweise lautet: $x = \log_2 8 = 3$

$$x = \log_a b \qquad a^x = b$$

x Logarithmus (Hochzahl)
a Basis; $a > 0$
b Numerus (Zahl)

1.7.2 Rechengesetze beim Logarithmus

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen und sind für alle definierten Basen gültig **(Tabelle 1)**.

Mit dem Taschenrechner können Sie den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e bestimmen. Dabei wird $\log_{10}$ mit log und $\log_e$ mit ln abgekürzt **(Tabelle 2)**.

Multiplikation

Wird von einem Produkt der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Summe der einzelnen Faktoren.

Beispiel 2: $\log_{10}$ 1000
Bestimmen Sie den Logarithmus von 1000 zur Basis 10
a) mit dem Taschenrechner und
b) interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:
a) Eingabe: 1000 log oder log 1000 (taschenrechnerabhängig)
Anzeige: 3 $\Rightarrow \log_{10} 1000 = \mathbf{3}$
Wird der Wert 1000 faktorisiert, z. B. in $10 \cdot 100$, gilt Folgendes: $\log_{10} 1000 = \log_{10} (10 \cdot 100)$
$= \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = \mathbf{3}$
b) $\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = \mathbf{1000}$

Quotient

Wird von einem Quotienten der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Bei der Berechnung eines Logarithmus kann die Eingabe der Gleichung, abhängig vom Taschenrechner, unterschiedlich sein.

Tabelle 1: Logarithmengesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Produkt Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.	$\log_a (u \cdot v)$ $= \log_a u + \log_a v$
Quotient Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.	$\log_a \left(\frac{u}{v}\right)$ $= \log_a u - \log_a v$
Potenz Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis.	$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Tabelle 2: Spezielle Logarithmen

Basis	Art	Schreibweise	Taschenrechner
10	Zehnerlogarithmus	$\log_{10}$; lg	log-Taste
e	Natürlicher Logarithmus	$\log_e$; ln	ln-Taste
2	Binärer Logarithmus	$\log_2$; lb	—

Beispiel 3: Division
Berechnen Sie $\log_{10} \left(\frac{10}{100}\right)$ mit dem Taschenrechner.

Lösung: $\log_{10} \left(\frac{10}{100}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 100$
Eingabe: 10 log – 100 log =
Anzeige: 1 2 –1
$\Rightarrow \log_{10} 10 - \log_{10} 100 = 1 - 2 = \mathbf{-1}$

oder durch Ausrechnen des Numerus $\left(\frac{10}{100}\right) = 0{,}1$
Eingabe: 0,1 log
Anzeige: –1
$\Rightarrow \log_{10} 0{,}1 = \mathbf{-1}$

Potenz

Soll der Logarithmus von einer Potenz genommen werden, so gibt es die Möglichkeit, die Potenz zu berechnen und dann den Logarithmus zu nehmen oder das Rechengesetz für Logarithmen anzuwenden und dann die Berechnung durchzuführen.

Beispiel 1: Berechnung einer Potenz
Berechnen Sie den Logarithmus der Potenz 10^2 zur Basis 10
a) durch Ausrechnen der Potenz und
b) durch Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen.

Lösung:

a) $\log_{10} 10^2 = \log_{10} 100 = \mathbf{2}$

b) $\log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

Beispiel 2: Berechnung einer Wurzel
Der Logarithmusterm $\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ ist zu berechnen
a) in Wurzelschreibweise,
b) in Potenzschreibweise.

Lösung:

$\sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} 10 = 1$ oder

$\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ kann umgeformt werden in $\log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 1000$

$= \frac{1}{3} \cdot 3 = \mathbf{1}$

1.7.3 Basisumrechnung beim Logarithmus

Der Taschenrechner bietet zur Berechnung der Logarithmen nur die Basis 10 ($\log_{10} = \log$) und die Basis e ($\log_e = \ln$) an.

In der Physik oder Technik sind jedoch andere Basen erforderlich. Um Berechnungen mit dem Taschenrechner durchführen zu können, muss die Basis so umgeformt werden, dass Lösungen mit log oder ln möglich sind.

Beispiel 3: Logarithmus mit der Basis 2
Berechnen Sie $\log_2 8$ mit dem Taschenrechner.

Lösung:
Die Berechnung kann a) mit log oder b) mit ln durchgeführt werden.

a) $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log 8}{\log 2}$

Eingabe: z. B.	8 log :	2 log	=
	⇓	⇓	⇓
Anzeige:	0,903 089 987	0,301 029 995	3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0{,}903\,09}{0{,}301\,03} = \mathbf{3}$

b) $\log_2 8 = \frac{\log_e 8}{\log_e 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2}$

Eingabe: z. B.	8 ln :	2 ln	=
	⇓	⇓	⇓
Anzeige:	2,079 441 54	0,693 147 18	3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2{,}079\,441\,54}{0{,}693\,147\,18} = \mathbf{3}$

$$\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}$$

a, u Basen   a, b Numerus (Zahl)

Bei der Basisumrechnung können die Basen der Logarithmen auf dem Taschenrechner verwendet werden. Es gilt:

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Aufgaben:

1. Die Gleichungen $x = \log_a b$ und $b = a^x$ sind gleichwertig. Geben Sie in der **Tabelle 1** für die Aufgaben a) bis d) jeweils die gleichwertige Beziehung und die Lösung an.

Tabelle 1: Gleichwertigkeit und Lösung

	$x = \log_2 8$	$8 = 2^x$	$8 = 2^3$	$x = 3$
a)	$x = \log_2 32$			
b)	$x = \log_2 \sqrt{2}$			
c)		$81 = 3^x$		
d)		$10^{-3} = 10^x$		

2. Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.
a) $\log_{10} 1$ **b)** $\log_{10} 10$ **c)** $\log_e 1$ **d)** $\log_3 \frac{1}{27}$

3. Zerlegen Sie die Logarithmenterme nach den gültigen Logarithmengesetzen.
a) $\log_a (3 \cdot u)$ **b)** $\log_a \frac{1}{u}$ **c)** $\log_a \frac{u^3}{v^2}$

4. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
a) $\log 16$ **b)** $\log 111$ **c)** $\log 8^2$ **d)** $\log \sqrt{100}$
e) $\ln 16$ **f)** $\ln 111$ **g)** $2 \cdot \ln 8$ **h)** $\ln 8^2$

5. Mit dem Taschenrechner sind zu berechnen:
a) $\log_2 12$ **b)** $\log_3 12$ **c)** $\log_4 12$ **d)** $\log_5 12$

Lösungen:

1. a) $32 = 2^x;\ x = 5$ **b)** $\sqrt{2} = 2^x;\ x = \frac{1}{2}$
c) $x = \log_3 81;\ x = 4$ **d)** $x = \log_{10} 10^{-3};\ x = -3$

2. a) 0, denn $10^0 = 1$ **b)** 1, denn $10^1 = 10$
c) 0, denn $e^0 = 1$ **d)** -3, denn $3^{-3} = \frac{1}{27}$

3. a) $\log_a 3 + \log_a u$
b) $-\log_a u$
c) $3 \cdot \log_a u - 2 \cdot \log_a v$

4. a) 1,204 12 **b)** 2,045 32 **c)** 1,806 18 **d)** 1
e) 2,772 59 **f)** 4,709 53 **g)** 4,158 88 **h)** 4,158 88

5. a) 3,584 96 **b)** 2,261 86 **c)** 1,792 48 **d)** 1,543 9

⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 11]

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Gleichungen

1. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösung

a) $(x + 2)^2 + 6 = x^2 + 20$ **b)** $\frac{4(17 + 20x)}{11} = 8$

c) $\frac{6(x + 7)}{17(x - 4)} = 1$ **d)** $\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x + 3}{4} + 6$

2. Lösen Sie die Gleichungen nach den geforderten Größen auf.

a) $F_1 = \frac{F_2 \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot R}$ Auflösen nach h und nach R

b) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ Auflösen nach h

c) $H = \frac{I \cdot N^2}{\sqrt{4r^2 + l^2}}$ Auflösen nach I und l

d) $A = \frac{l_1 + l_2}{2} b$ Auflösen nach l_2 und b

Definitions- und Lösungsmenge

3. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an.

a) $\sqrt{2x + 100}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$ **c)** $\log_a (x + 2)$

4. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und geben Sie die Lösung der Gleichung an.

a) $\frac{x - 9}{x} = \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$

c) $\sqrt{x + 1} - 2 = \sqrt{x - 11}$ **d)** $7 + 4 \cdot \sqrt{x + 7} = 23$

Potenzen

5. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen nur mit positiven Exponenten.

a) $2 \cdot 10^{-2}$ **b)** min^{-1} **c)** $\frac{a^{-2}b\,c^2}{(a + b)^{-1}}$

6. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

a) 10^{-2} **b)** $\frac{1}{10^3}$ **c)** $\frac{1}{m}$ **d)** $\frac{V}{m}$

7. Geben Sie die Zahlen in Zehnerpotenzen an.

a) Rauminhalt der Erde:
1 083 000 000 000 000 000 000 m^3

b) Oberfläche der Erde: 510 000 000 000 000 m^2

c) Entfernung Erde–Sonne: 149 500 000 000 m

8. Vereinfachen Sie die Terme.

a) $\frac{(a + b)^0}{2^{-1}}$ **b)** $\frac{x \cdot x^{-2}}{(n^2 \cdot x)^{-1}}$ **c)** $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{n+2} \cdot x^{m+2}}$

d) $\frac{n^{-2+x}}{n^{x-1}}$ **e)** $((n^{-2})^{-1}) \cdot n^{a-2}$ **f)** $\frac{(n^{-4} \cdot m^{-2})^{-3}}{(n^{-2}\,m^{-3})^5}$

9. Vereinfachen Sie die Wurzeln unter Verwendung der Potenzschreibweise.

a) $\sqrt[3]{\frac{x^{-3}}{x^{-9}}}$ **b)** $\sqrt[n+m]{(x^2)^{3n+3m}}$ **c)** $\sqrt[an]{3^{n(a+b)}}$

Logarithmengesetze

10. Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.

a) $\log_{10} 100$ **b)** $\log_{10} 300$ **c)** $\log_e 2{,}718$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

11. Zerlegen Sie die Logarithmusterme in Summen, Differenzen und Produkte.

a) $\log_a (u^2)$ **b)** $\log_a \frac{m^2 \cdot \sqrt{n}}{p^3}$ **c)** $\log_a \sqrt[3]{n^2}$

12. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner

a) $3 \cdot \log 10$ **b)** $\log 8^4$ **c)** $\ln \sqrt[5]{500}$ **d)** $\ln 5^{30}$

13. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner

a) $\log_2 256$ **b)** $\log_7 4$ **c)** $\log_{16} 256$ **d)** $\log_8 \sqrt{6400}$

Lösungen:

1. **a)** $x = 2{,}5$ **b)** $x = \frac{1}{4}$ **c)** $x = 10$ **d)** $x = 25$

2. **a)** $h = \frac{F_1 2\pi R}{F_2}$; $R = \frac{F_2 h}{F_1 2\pi}$ **b)** $h = \frac{v^2}{2g}$

c) $I = \frac{H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2}}{N^2}$; $l = \pm\sqrt{\frac{I^2 N^4}{H^2} - 4r^2}$

d) $b = \frac{2A}{l_1 + l_2}$; $l_2 = \frac{2A}{b} - l_1$

3. **a)** $x \geq -50$ **b)** $x > -50$ **c)** $x > -2$

4. **a)** $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $x = 45$

b) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $b, d \neq 0$; $x = 10ad$

c) $D = \{x | x \geq 11\}_{\mathbb{R}}$; $x = 15$

d) $D = \{x | x \geq -7\}_{\mathbb{R}}$; $x = 9$

5. **a)** $\frac{2}{10^2}$ **b)** $\frac{1}{\text{min}}$ **c)** $\frac{(a + b)bc^2}{a^2}$

6. **a)** $\frac{1}{10^2}$ **b)** 10^{-3} **c)** m^{-1} d) Vm^{-1}

7. **a)** $1{,}083 \cdot 10^{21}\,m^3$ **b)** $5{,}1 \cdot 10^{14}\,m^2$

c) $1{,}495 \cdot 10^{11}\,m$

8. **a)** 2 **b)** n^2 **c)** $\frac{1}{x^3}$ **d)** $\frac{1}{n}$ **e)** n^a **f)** $n^{22} \cdot m^{21}$

9. **a)** x^2 **b)** x^6 **c)** $3 \cdot \sqrt[a]{3^b}$

10. **a)** 2, denn $10^2 = 100$

b) 2,477, denn $10^{2{,}477} = 300$

c) 1, denn $e^1 = 2{,}718$

d) –5, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

11. **a)** $2 \cdot \log_a u$

b) $2 \cdot \log_a m + \frac{1}{2} \cdot \log_a n - 3 \cdot \log_a p$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \log_a n$

12. **a)** 3 **b)** 3,612 35 **c)** 1,243 **d)** 48,283

13. **a)** 8 **b)** 0,712 4 **c)** 2 **d)** 2,107 3

⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 11]

1.8 Mengen

1.8.1 Mengen und ihre Elemente

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Mengen werden in beschreibender, aufzählender Form oder graphisch mithilfe von Mengenbildern (Venn-Diagramm) angegeben.

Mengen werden mit großen Buchstaben, z. B. A, B,..., Z, bezeichnet, die Elemente von Mengen mit kleinen Buchstaben z. B. a, b,..., z.

Beispiel 1:
Stellen Sie die Menge A mit den Elementen a, b, c in expliziter aufzählender Form und als Mengenbild dar.

Lösung: **Bild 1**

Bei der expliziten Darstellung der Elemente ist die Reihenfolge beliebig. Für die Darstellung der Verknüpfung werden Mengenoperatoren verwendet **(Tabelle 1)**.

Für die aufzählende Form wird auch die implizite Darstellung verwendet.

Beispiel 2:
Stellen Sie die Menge K mit den Elementen 2, 4, 6, 8 in impliziter aufzählender Form dar.

Lösung:

K = { x | x ist gerade, eine natürliche Zahl und x < 10}

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit oder Kardinalität und wird mit |M| bezeichnet **(Tabelle 2)**. Die leere Menge hat die Kardinalität 0. Mehrfach dargestellte Elemente werden nur je einmal gezählt.

Eine leere Menge enthält keine Elemente.

1.8.2 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmengen

A ist eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist (Bild 2). A ist eine echte Teilmenge von B, wenn A Teilmenge von B, aber von B verschieden. B enthält mindestens ein Element, dass nicht in A enthalten ist.

Beispiel 3:
Enthält die Menge B in **Bild 2** die Teilmenge A?

Lösung:

A = { b, d}, B = { a, b, c, d, e} somit gilt $A \subset B$

Gleichheit von Mengen

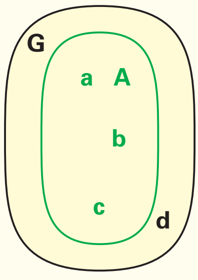
Es gilt A = B, wenn die Mengen A = { 5, 6, 7} und B = {5, 6, 7} die gleichen Elemente haben.

„Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen".

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre (1845 bis 1918)

G Grundmenge
A = {a, b, c}

a ist Element von A ⇒ $a \in A$
b ist Element von A ⇒ $b \in A$
c ist Element von A ⇒ $c \in A$
d ist nicht Element von A ⇒ $d \notin A$



Venn-Diagramm

Bild 1: Mengendarstellung in aufzählender Form und als Venn-Diagramm

Tabelle 1: Relationale Mengen-Operatoren		
Operator	Beispiel	Erklärung
$\subset$	$A \subset B$	A ist Teilmenge von B
$\not\subset$	$A \not\subset B$	A ist nicht Teilmenge von B
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A ist unechte Teilmenge von B
=	A = B	Mengen A und B sind gleich
$\in$	$a \in A$	a ist Element von A
$\notin$	$d \notin A$	d ist nicht Element von A

Tabelle 2: Begriffe aus der Mengenlehre		
Begriff	Bedeutung	Beispiel
Mächtigkeit, Kardinalität	Anzahl der Elemente	M = {1,2,3 } ⇒ |M| = 3
Leere Menge	Kardinalität 0	|M| = 0
Mehrfach dargestellte Elemente	Elemente werden nur einfach gezählt	|M| = |{1,2,1,4,2,7 }|= = 4

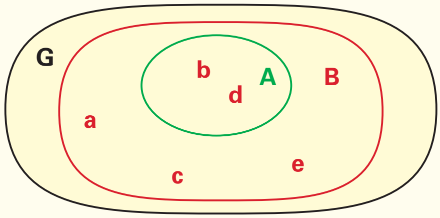


Bild 2: Echte Teilmenge A der Menge B

1.8.3. Verknüpfung mit Mengen

Das Verknüpfen von Mengen mit Operatoren (**Tabelle 1**) wird zum Veranschaulichen von Strukturen, z. B. Zusammenfassungen oder Einteilungen verwendet.

Schnittmenge

Die Schnittmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A und zu B gehören **(Bild 1)**.

$C = A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B\}_G$

> **Beispiel 1:**
> Welche Schnittmenge C bilden die Menge A = {2, 5, 6, 7, 9} und die Menge B={3, 5, 6, 7, 9}?
> *Lösung:* **C = A ∩ B = {5, 6, 7, 9}**.

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B gehören **(Bild 2)**.

$C = A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}_G$

> **Beispiel 2:**
> Welche Vereinigungsmenge C bilden die Menge A = {1,2, 5, 6} und die Menge B={3, 5, 6, 7, 9}?
> *Lösung:* **C = A ∪ B = {1, 2, 3, 5, 6, 7,9}**.

Differenzmenge, Restmenge

Die Differenzmenge C ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören **(Bild 3)**.

$C = A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\}_G$

> **Beispiel 3:**
> Welche Differenzmenge C bilden die Menge A = {1,2, 4} und die Menge B={2,3}?
> *Lösung:* **C = A\B = {1, 4}**.

Produktmenge

Auch als kartesisches Produkt oder Paarmenge bezeichnet.

Die Produktmenge C = A B ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) die aus den Mengen A und B bildbar sind **(Bild 4)**.

$C = A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}_G$.

> **Beispiel 4:**
> Welche Paarmenge C bilden die Mengen A = {1,2} und B={1, 2,3}?
> *Lösung:* **C = A × B = {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3) }**.

Paarmengen werden oft in Koordinatensystemen dargestellt.

Tabelle 1: Verknüpfungs-Operatoren für Mengen		
Operator	Beispiel	Erklärung, Bedeutung
∩	C = A ∩ B	C ist die Schnittmenge von A und B.
∪	C = A ∪ B	C ist die Vereinigungsmenge von A und B
\	C = A\B	C ist die Differenzmenge von A und B
×	C = A × B	C ist die Produktmenge von A und B
logische Operatoren: ∧ Und, ∨ Oder		

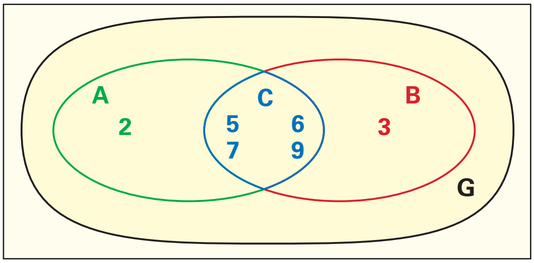


Bild 1: Schnittmenge C = A ∩ B

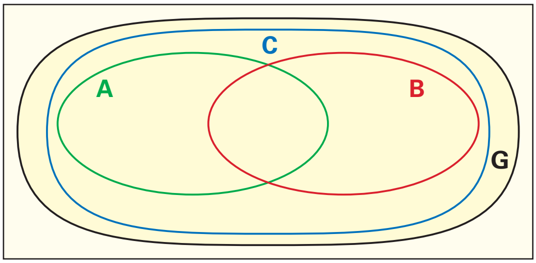


Bild 2: Vereinigungsmenge C = A ∪ B

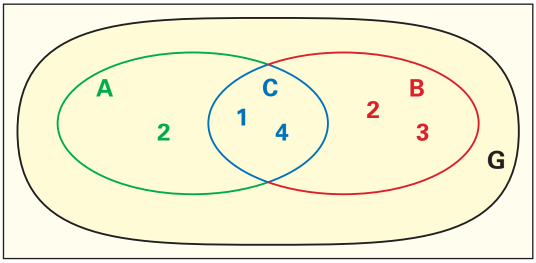


Bild 3: Differenzmenge C = A \ B

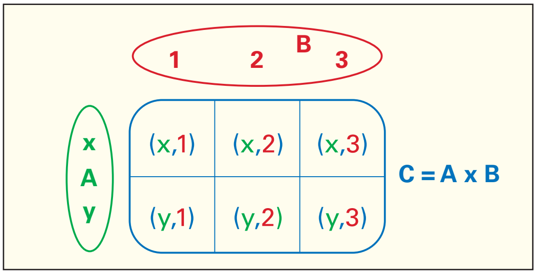


Bild 4: Produktmenge C = A x B