EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik für Chemieberufe

Grundlagen

Klaus Brink, Gerhard Fastert, Eckhard Ignatowitz

5. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 71314

Autoren:
Dr. Klaus Brink, StR — Leverkusen
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR † — Stade
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR — Waldbronn

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:
Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Foto des Buchtitelbildes: Mit freundlicher Genehmigung der
Dow Deutschland Anlagengesellschaft mbH, Stade

5. Auflage 2012, unveränderter ND 2018

Druck 5 – bei den Nachdrucken der Druckquoten 2 (2014), 3 (2016) und 4 (2017) lag je ein „Nachdruck mit Fehlerkorrektur“ vor.

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-7135-4

Umschlaggestaltung: Atelier PmbH, 35088 Battenberg

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt

Druck: M.P. Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das Buch TECHNISCHE MATHEMATIK FÜR CHEMIEBERUFE ist ein Lehr-, Lern- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Unterrichtsfach Technische Mathematik.

Es ist besonders für die Ausbildung in den Produktionsberufen der chemischen Industrie geeignet:

zum Chemikant und zur Produktionsfachkraft Chemie.

Darüber hinaus kann es für die Ausbildung zur Fachkraft für Wasserversorgungstechnik bzw. Abwassertechnik, für Papiermacher, für Textilreiniger und Färberei-Textilveredler sowie verschiedene Laborberufe verwendet werden.

Hilfreich kann es auch an Berufsfachschulen, Fachoberschulen, Meister-Fachschulen, Chemotechniker-Fachschulen und bei Weiterbildungskursen in der chemischen Industrie eingesetzt werden.

Zudem bietet es eine fachmathematische Einführung für ein Chemie- bzw. Chemieingenieurstudium.

Das Buch vermittelt neben mathematischen Grundkenntnissen vor allem berufsbezogene fachmathematische Kenntnisse aus den Bereichen allgemeine Chemie und analytische Chemie, technikorientierte Sachgebiete aus der Physik sowie Messtechnik.

Die Stoffauswahl basiert auf dem Rahmenlehrplan der Kultusministerkonferenz sowie den Lehrplänen der Bundesländer des Ausbildungsberufes Chemikant. Darüber hinaus wurden Ergänzungen für die anderen Berufe und Schularten aufgenommen.

Die Kapitel des Buches lauten:

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen
2 Auswertung von Messwerten und Prozessdaten
3 Ausgewählte physikalische Berechnungen
4 Stöchiometrische Berechnungen
5 Rechnen mit Gehaltsgrößen von Mischungen
6 Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen
7 Analytische Bestimmungen
8 Berechnungen zur Elektrizitätslehre
9 Berechnungen zur Wärmelehre
10 Bestimmung von Produkteigenschaften
11 Qualitätssicherung

Die Lerninhalte sind nach einem einheitlichen methodischen Grundkonzept dargeboten:

Nach einer kurzen Einführung in die theoretischen Sachverhalte werden die zur Berechnung erforderlichen Größengleichungen abgeleitet oder gegeben und die Einheiten der physikalischen Größen erläutert.

Darauf folgt die ausführliche Darstellung des Rechengangs an ein oder zwei typischen Aufgabenbeispielen. Zum eigenständigen Üben steht eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben zum gerade dargebotenen Lerninhalt zur Verfügung.

Am Ende jedes Großkapitels folgt eine Zusammenstellung von gemischten Aufgaben, die zur Leistungskontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.

Beim chemischen Rechnen wird als Lösungsmethode überwiegend das Rechnen mit Größengleichungen eingesetzt. Aber auch das Schlussrechnen wird eingeführt und in dafür typischen Aufgabenbeispielen durchgerechnet.

Das Buch ist durchgängig auf die Verwendung von Taschenrechner und PC konzipiert. Dabei werden das Runden und das Rechnen mit den signifikanten Ziffern eingeführt und im ganzen Buch konsequent berücksichtigt. Auch die Prozessdatenauswertung mit Tabellenkalkulationsprogrammen und die grafische Darstellung mit Rechnern wird an berufstypischen Beispielen geübt.

Das Buch hat ein ausführliches Sachwortverzeichnis mit der englischen Übersetzung der Fachausdrücke. Es kann als **Sachwort-Lexikon** genutzt werden.

Zum Buch TECHNISCHE MATHEMATIK FÜR CHEMIEBERUFE gibt es ein **Lösungsbuch**, EUROPA-Nr. 71411, in dem für alle Aufgaben ein Lösungsvorschlag mit Ergebnis durchgerechnet ist.

Die weiteren Themen zur Ausbildung zum Chemikanten bzw. für die Meister- und Techniker-Ausbildung im Fachbereich Chemietechnik sind in dem Buch **BERECHNUNGEN ZUR CHEMIETECHNIK**, EUROPA-Nr. 71378 dargestellt. Die Kapitel dieses Buches lauten:

1 Berechnungen zu Komponenten der Chemieanlage
2 Berechnungen zur Messtechnik
3 Berechnungen zur Qualitätssicherung
4 Berechnungen zur Aufbereitungstechnik
5 Berechnungen zu mechanischen Trennprozessen
6 Berechnungen zur Heiz- und Kühltechnik
7 Berechnungen zu thermischen Trennverfahren
8 Berechnungen zur Regelungstechnik
9 Berechnungen zur Steuerungstechnik
10 Berechnungen zur Reaktionstechnik

Die Autoren Sommer 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen.**
Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z. B. 3, 9, 5, ½ usw., stehen die allgemeinen Zahlen als Platzhalter für beliebige Zahlen, wie z. B. *x*, *y*, *z*.

Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürliche Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind **positive ganze Zahlen** sowie Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, 12, ..., 37, ..., 59, 60, 61, ..., 107, ...
Die **negativen ganzen Zahlen** erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. Beispiel: 5 – 7 = –2; 15 – 29 = –14	–1, –2, –3, ..., –18, –19, ...
Die **ganzen Zahlen** umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... –1, –2, –3, –4, ..., –21, –22, ...
Gebrochene Zahlen, auch **Bruchzahlen** genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d. h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \dots$ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -2\frac{1}{3}, -\frac{7}{9}, \dots$
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748, 0,250, –8,32, –2,0, –0,5, –7,8316, 4,57, 7,8

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man insgesamt als **rationale Zahlen.** Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen.** Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2}$ = 1,4142136... ; $\sqrt{3}$ = 1,7320508...
Transzendente Zahlen	π = 3,1415927... ; e = 2,7182818...
Die irrationalen Zahlen sind nicht periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.	

Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe oben, Beispiele) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen **(Bild 1).** Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

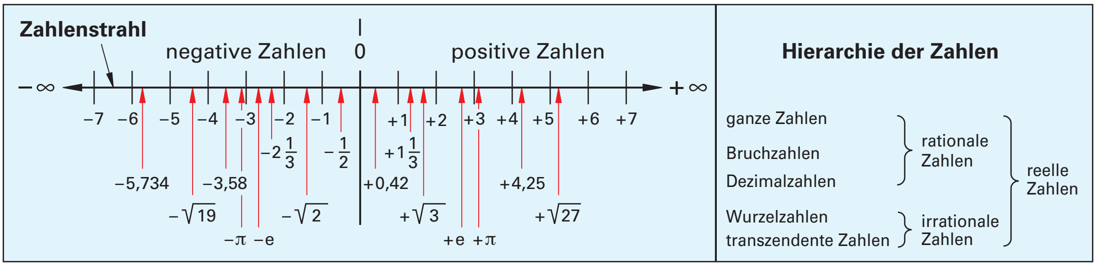


Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch Variable genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

In der Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiele

$a, b, c, \ldots \quad u, v, w, \ldots, \quad x, y, z$

In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen, die meist dem Anfangsbuchstaben des deutschen oder englischen Namens der Variablen entsprechen.

$l, b, t, v, \ldots, \quad A, V, U, T, \ldots$
l Länge, b Breite, t Zeit (time), h Höhe,
A Fläche (aerea), V Volumen, U Umfang,
T thermodynamische Temperatur, …

Aufgaben zu Zahlenarten

1. Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen:
   $0{,}7, -18, \sqrt{3}, 1/7, 0, -387, -\pi, -0{,}32$?
2. Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen:
   $-3\frac{1}{3}$, $0{,}85$, e, $-0{,}25$, $\sqrt{9}$, $\frac{2}{4}$, $-3{,}50$?
   Zeichnen Sie in den Zahlenstrahl ein.

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z. B. l für die Länge.
Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einer Einheit, z. B. 5,8 kg. Die Einheit wird mit einem Einheitenzeichen angegeben, z. B. kg.

Beispiel: Die Länge einer 3,40 Meter langen Rohrleitung beträgt: $l = 3{,}40$ m.

Es gibt 7 **Basisgrößen,** auf die sich alle Größen zurückführen lassen **(Tabelle 1)**.

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation **(Tabelle 2)**.

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen das Kurzzeichen für „multiplizieren“, einen Punkt, z. B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationszeichen × zugelassen.

Beispiel: 3 m × 5 m

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (engl. equations) oder Formeln (engl. formula) ausgedrückt.
Mit Hilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die gesuchten Größen berechnen (Seite 28).

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten

Physikalische Größen	Größenzeichen	Einheitenname	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (DIN 1302)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
+, –	plus, minus	<, >	kleiner, größer
:, —, /	geteilt durch, pro	≤ ≥	kleiner gleich, größer gleich
·, ×	mal	Δ	Differenz
=, ≠	ist gleich, ist ungleich	…	und so weiter
≈	beträgt rund	∞	unendlich
≡	identisch gleich	±	plus/minus
~	proportional	$\|a\|$	Betrag von a
≙	entspricht	$\sqrt{}$	Wurzel

Beispiel für Größengleichungen:

Fläche $A = l \cdot b$ Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$
Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

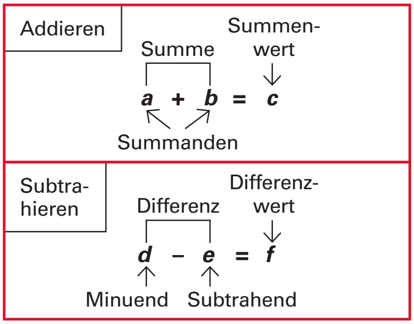
1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer aus Strichen bestehenden mathematischen Zeichen (+, –) auch als Strichrechnungen bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder kurz Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.



Rechenregeln und Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Rechenregeln	**Beispiele**
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8\ m^2 + 72\ cm^2 + 7{,}5\ m^2 - 23\ cm^2$ $= 15{,}5\ m^2 + 49\ cm^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz).	$5 - 16 + 7 = -16 + 7 + 5 = -4$; $11x - 3x + 9x = 11x + 9x - 3x = 17x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 2 - 1 = 7 - 3 = 4$ $8u - 3v + 3u + 8v = 11u + 5v$
Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Klammern, () oder [], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.	
Steht ein + Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27$; $7a + (3a - 9a) = 7a + 3a - 9a$ $= 1a = a$
Steht ein – Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein – Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5)$ $= 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$ $5x - (2x + 9a - 7b)$ $= 5x - 2x - 9a + 7b$

Aufgaben zum Addieren und Subtrahieren

1. Ermitteln Sie das Ergebnis:
   $59{,}30\,a - 27{,}53\,a + 7{,}83\,b - 21{,}04\,b$
2. Klammern Sie aus:
   $8{,}3\,x - 7{,}8\,a + 2{,}5\,x - 9{,}2\,a$
3. Lassen Sie die Klammer weg:
   $25\,a - (36\,b - 19\,a - 11\,b - 12\,a)$
4. Ermitteln Sie die Maße l_1, l_2, l_{ges} der Rohrleitung in **Bild 1**. Die Maße in der Zeichnung sind in mm angegeben.

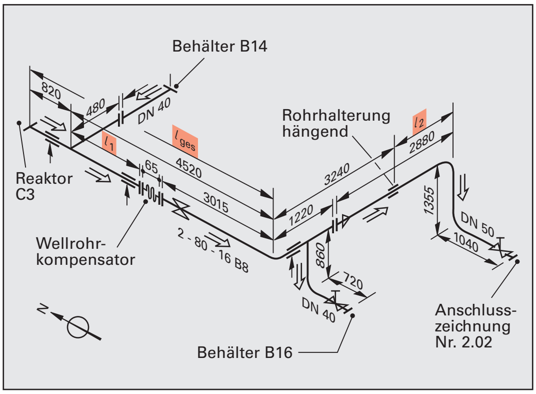


Bild 1: Maße in einer Rohrleitungszeichnung

1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (umgangssprachlich Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert, kurz auch Produkt genannt.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist · oder ×.

Bei allgemeinen Zahlen kann das Malzeichen weggelassen werden, z. B. $a\,b$ anstatt $a \cdot b$.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** $1a = a$

Multiplikation

Produkt — Produktwert

$$\underbrace{\overbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}^{\text{Produkt}}}_{\text{Faktoren}} = \overset{\text{Produktwert}}{\boldsymbol{c}}$$

Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$
Die Faktoren können vertauscht werden.	$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$	$15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$
Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$5\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 30\text{ m}^3$
Vorzeichen beim Multiplizieren		
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$	$2 \cdot 3 = 6;\quad (-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$5 \cdot (-2) = -10;\quad (-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab;\quad (-4) \cdot \text{m} = -4\text{ m}$
Multiplizieren von Klammerausdrücken		
Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36;$ $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40;$
Ausklammern (Faktorisieren)		
Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Bei allgemeinen Zahlen wird dadurch die Summe in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3\pi x + 3\pi y = 3\pi(x + y)$ $L_0 + L_0\alpha \cdot \Delta\vartheta = L_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   a) $(+3) \cdot (-15)$ b) $(+9) \cdot (+7)$
   c) $(-7) \cdot (-12)$ d) $(+5) \cdot 0$
   e) $(0) \cdot (-16)$ f) $(-3a) \cdot (+8b) \cdot (+2c)$
   g) $(+9x) \cdot (-4y)$ h) $(+13\text{m}) \cdot (+4\text{m}) \cdot (+2\text{m})$

2. Führen Sie die Multiplikationen aus :
   a) $3(3a - 2b)$ b) $9(7u + 8v)$
   c) $(-5) \cdot (-4x - 7y)$ d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
   e) $(6c - 3d) \cdot (+2a)$ f) $-x(y - z)$
   g) $4uv(9r - 5s)$ h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12)$
   i) $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ j) $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}\right)$

3. Multiplizieren Sie die Ausdrücke:
   a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k)$
   b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x)$
   c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z)$
   d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y)$

4. Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x = 3$ und $y = 4$ gesetzt wird?
   $7(5 - 2x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6y)$

5. Klammern Sie aus:
   a) $2ab + 2ac + 2ad$ b) $\pi\, n\, r_1 + \pi\, n\, r_2$
   c) $k \cdot A \cdot \vartheta_2 - k \cdot A \cdot \vartheta_1$ d) $\pi r_1^2 + \pi h^2$

1.3.3 Dividieren

Das Dividieren (umgangssprachlich Teilen; engl. to devide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das mathematische Zeichen für Dividieren ist : oder der Bruchstrich — bzw. der Schrägstrich /.

Das : -Zeichen und der Bruchstrich sind gleichbedeutend.

Zähler und Nenner dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Nenner null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.

Division

Quotient, Zähler

$$\boldsymbol{a : b = \frac{a}{b} = c}$$

Dividend, Divisor, Nenner, Wert des Quotienten

Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
Vorzeichen beim Dividieren Gleiche Vorzeichen bei Zähler und Nenner ergeben einen positiven Quotienten. Ungleiche Vorzeichen von Zähler und Nenner ergeben einen negativen Quotienten.	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$;	$(+2) : (+3) = \frac{2}{3}$; $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$; $\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}$; $\frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$;
Dividieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Nenner geteilt wird. Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.	$(a - b) : x = a : x - b : x$ $\frac{a-b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$ $\frac{a+b}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	$\frac{36xyz - 24xuv}{6x}$ $= \frac{36xyz}{6x} - \frac{24xuv}{6x}$ $= 6yz - 4uv$
Kürzen, Erweitern Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt. Es können nur **Faktoren** gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden. Beim **Erweitern** werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.	$\frac{4ab}{6ac} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot 3} = \frac{2b}{3c}$ $\frac{a(b+c)}{a} = b + c$ $\frac{ab + ac}{a} = b + c$ $b + c = \frac{(b+c)a}{a}$	$\frac{-48xy}{36y} = \frac{-4 \cdot \cancel{12} \cdot x\cancel{y}}{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{y}}$ $= -\frac{4}{3}x$ $\frac{9x - 2y}{5z}$ erweitern mit $(-3) \Rightarrow$ $\frac{(9x-2y)(-3)}{5z \cdot (-3)} = \frac{-27x + 6y}{-15z}$

Aufgaben zum Dividieren

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

1. a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$
2. a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$
3. a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$
4. Kürzen Sie soweit wie möglich:

   a) $\frac{-12uv}{3v}$ b) $\frac{6a - 3b}{3}$ c) $\frac{81xyz}{-9yz}$ d) $\frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)}$

   f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7x-y) \cdot (3+2b)}{-2b-3}$
5. Erweitern Sie a) $\frac{7a}{5b}$ mit (-3) b) $\frac{3x}{-8y}$ mit (-1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Substraktionen (Strichrechnungen + –) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen · :) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt:

1. Enthält der zu verrechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Punkt vor Strich, d. h., Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40$; $\frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$

$\frac{122-66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 98$; $125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = \mathbf{5}$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$

$5a \cdot (11b - 8b) - 2b \cdot (3a + 4a) = 5a \cdot 3b - 2b \cdot 7a = 15ab - 14ab = ab$

$\frac{7 \cdot (23{,}2 - 23{,}3)}{(2{,}4 + 4{,}6) \cdot (-0{,}5)} = \frac{\cancel{7} \cdot 0{,}1}{\cancel{7} \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = \mathbf{0{,}2}$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer usw. zusammenfassen.

Beispiel: $4ac + [(3a + 7a) \cdot 5c + 5ac] = 4ac + [10a \cdot 5c + 5ac] = 4ac + 50ac + 5ac = \mathbf{59}ac$

4. Enthält ein Ausdruck verschachtelte Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausgerechnet. Innerhalb der Klammerausdrücke gilt ebenfalls: Punktrechnungen vor Strichrechnungen.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

1. a) $-4 \cdot (0{,}2 - 3{,}2) + (14{,}5 - 8{,}5) \cdot (-0{,}1)$ b) $12x \cdot (-3y) + (0{,}75x - 0{,}50x) \cdot (+80)$

2. a) $\frac{(-2{,}5) \cdot (86 - 82)}{(1{,}3 - 0{,}8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0{,}125 \cdot (-85 + 117)}{(0{,}4) \cdot (-8) \cdot (2{,}5)}$ c) $24{,}7 \cdot \frac{(1 - 0{,}392)}{(1 - 0{,}065)}$

3. a) $(23{,}8 - 21{,}3) \cdot \frac{2{,}14 + 0{,}86}{4{,}52 - 4 \cdot 0{,}38}$ b) $\frac{18{,}06 - 17{,}56}{0{,}25} + \frac{27}{3{,}2 + 5{,}8} - \frac{(0{,}2 + 2{,}8) \cdot (5{,}4 - 3{,}4)}{2{,}4 \cdot 2{,}5}$

4. a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$ b) $4{,}5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a\,(c - b)$

c) $[-0{,}2a - (1{,}7b - 1{,}9a)] : \left[\frac{5{,}5a}{10} - 0{,}85b + 0{,}3a\right]$

5. a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5\,(2a - x - y)$ b) $(0{,}3a \cdot (5xy - (92x - 87y) - (84y - 82x))$

c) $(-9{,}5x + [(1{,}5x - 4y) \cdot (0{,}5 + 6{,}5)] + 29y) \cdot \frac{1}{x + y}$

1.5 Bruchrechnen

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist. Als Bruchrechnen bezeichnet man das Rechnen mit Brüchen.

Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z. B.: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Benennungen bei Brüchen

Zähler →
Nenner →

$$\frac{a}{b} = c$$

Bruch — Wert des Bruchs

Es gibt verschiedene **Brucharten:**

Brucharten	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{5}{7}; \frac{2}{5}$	Zähler < Nenner
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}; 3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch

Brucharten	Beispiele	Merkmale
Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Scheinbrüche	$\frac{3}{1}; \frac{6}{2}; \frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl

Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7}\,1}{\cancel{21}\,3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8ab}{14a} = \frac{\cancel{8}\,\cancel{a}\,b\,4}{\cancel{14}\,\cancel{a}\,7} = \frac{4b}{7}$; $\frac{32a+4ab}{6a} = \frac{\cancel{4}\,\cancel{a}(8+b)\cdot 2}{\cancel{6}\,\cancel{a}\cdot 3} = \frac{2(8+b)}{3}$

Beispiel zum Erweitern: $\frac{2a-3b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10a \Rightarrow$ $\frac{(2a\cdot 3b)\cdot 5a}{2\cdot 5a} = \frac{5a(2a-3b)}{10a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3x}{5b} + \frac{7x}{5b} - \frac{4x}{5b} = \frac{3x+7x-4x}{5b} = \frac{6x}{5b}$

Addieren und Subtrahieren

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a+b-c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner.** Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV,** der einzelnen Nenner.

Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche: Beispiel: $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$

1. Zerlegung in Primzahlfaktoren

Nenner		Primzahlfaktoren
8	=	$\boxed{2\cdot 2\cdot 2}$
6	=	$2\cdot\boxed{3}$
10	=	$2\cdot\boxed{5}$
kgV	=	$\boxed{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}$ = **120**

2. Hauptnenner (kgV) bestimmen
Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 120$. (Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)

3. Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen
$120 : 8 = 15$
$120 : 6 = 20$
$120 : 10 = 12$

4. Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern
$$\frac{3\cdot 15}{8\cdot 15} + \frac{5\cdot 20}{6\cdot 20} - \frac{7\cdot 12}{10\cdot 12} =$$

5. Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche
$$\frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \frac{61}{120}$$

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Hauptnenner bestimmen:

$2a = 2 \cdot a$

$9ab = 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b$

$18b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b$

$\text{kgV} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 18ab$

2. Erweiterungsfaktoren bestimmen:

$18ab : 2a = 9b$

$18ab : 9ab = 2$

$18ab : 18b = a$

3. Erweitern und zusammenfassen:

$$\frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} = \frac{27bx}{18ab}$$

$$-\frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} = \frac{x(27b - 4 + 5a)}{18ab}$$

$$= \frac{x(5a + 27b - 4)}{18ab}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$ b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 2. a) $\frac{7x}{41} + \frac{5x}{12b}$ b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
Multiplizieren **Brüche** werden multipliziert, indem jeweils die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden. **Gemischte Zahlen** werden miteinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$; $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3\cancel{y} \cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
Dividieren Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird. **Ganze Zahlen** können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$; $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} : \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Fassen Sie zusammen

a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x+4y}{4a+6b} + \frac{9x}{9b+6a} - \frac{5}{3}$

2. Multiplizieren Sie

a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{6}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$

3. Dividieren Sie

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$

4. Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit wie möglich zusammen

a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s}$ d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m}$

f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$ g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u+v}{l+k} + \frac{3(u+v)}{2(l+k)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden.
Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.

gleiche Faktoren   Basis   Exponent

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{\text{Produkt}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenz}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste, z. B. $\boxed{y^x}$ oder $\boxed{\wedge}$

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3{,}25^3$

Eingabe	3,25	$\boxed{y^x}$ 3	$\boxed{=}$
Anzeige	3,25	$3{,}25^3$	34.328125

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ usw.

Merke:
- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z. B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden.

Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$; $\frac{3^{-4}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0{,}1975$; $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1. **Beispiel:** $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

$$1^n = 1$$

Potenzen mit dem Exponent 0. **Beispiel:** $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$

Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.
Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100\,000\,000 = 1{,}0 \cdot 10^8 = 10^8$; $7\,200\,000 = 7{,}2 \cdot 1\,000\,000 = 7{,}2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0{,}0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0{,}0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2{,}938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzform:
   a) $2L \cdot 4L \cdot 8L$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$
   c) $1{,}5$ cm $\cdot$ $2{,}3$ cm $\cdot$ $1{,}4$ cm
2. Berechnen Sie den Potenzwert:
   a) $21^{2,5}$ b) $(-6{,}3)^3$
   c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2{,}4^{3,5}$
3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:
   a) 5 000 000 b) 0,0023
   c) 96 485 d) 0,000082

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= (9 - 6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4{,}2\ \text{cm}^2 + 5{,}8\ \text{cm}^2$ $= (4{,}2 + 5{,}8) \cdot \text{cm}^2 = 10{,}0\ \text{cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 = 10^{(-3+6)} = 10^3$ $\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-2} = \text{m}^{(3-2)} = \text{m}^1 = \text{m}$ $5^3 \cdot 2^3 = \{5 \cdot 2\}^3 = 10^3 = 1000$ $4{,}0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4{,}0 \cdot \text{cm})^3 = 64\ \text{cm}^3$
Dividieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden dividiert, indem die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden dividiert, indem aus den Basen ein Bruch gebildet wird, der mit dem gemeinsamen Exponent potenziert wird.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{\text{m}^5}{\text{m}^2} = \text{m}^{5-2} = \text{m}^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1{,}728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(3^2\right)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $\left(r^2\right)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$ $(9 - 3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen

   a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12\ \text{m}^2 + 7\ \text{m}^3 - 7\ \text{m}^2 + 5\ \text{m}^3$ c) $6{,}2x^4 + 3{,}4y^2 + 7{,}5x^4 - 3{,}4y^2$

   d) $2{,}8\pi r^2 h + \frac{5}{4}\pi r^3 - 1{,}75\pi r^3 + 2{,}2hr^2\pi$ e) $-14{,}3 \cdot 7^3 + 6{,}9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1{,}1 \cdot 11^4 + 8{,}7 \cdot 7^3$

2. Multiplizieren von Potenzen

   a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0{,}4a^4 \cdot 0{,}5a^5$ c) $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2{,}5r^2) \cdot 2r^2$

   e) $d^{0{,}5x} \cdot d^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r + s)^2 \cdot (r + s)^3$ h) $(x + y)^a \cdot (x + y)^b$

3. Dividieren von Potenzen

   a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780x^5}{39y^5}$ e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3}$ f) $\frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$

4. Potenzieren von Potenzen

   a) $\left(5^3\right)^2$ b) $\left(10^3\right)^{-2}$ c) $\left(4^2 \cdot axy^2\right)^3$ d) $5 \cdot \left(u^2 v^3\right)^5$ e) $\left(1^7\right)^2 \cdot \left(3^0\right)^3$ f) $\left(7^2\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. Potenzieren von Summen a) $(3 + 7)^3$ b) $(22 - 17)^5$ c) $(23 - 14)^5$ d) $(5 + 9)^4$

1.7 Rechnen mit Wurzeln

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z. B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt[2]{}$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[2]{16} = ?$; *Lösung:* $\sqrt[2]{16} = 4$, da $4^2 = \mathbf{16}$

$\sqrt[2]{9} = ?$; *Lösung:* $\sqrt[2]{9} = 3$, da $3^2 = \mathbf{9}$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert.

Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, sollten die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Beispiel: Potenzieren

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Beispiel: Wurzelziehen

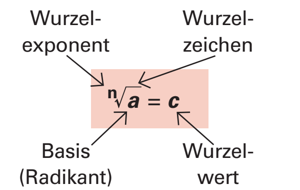
$x^2 = 25$; $x = ?$

Schreibweise mit Wurzelzeichen:

$\sqrt[2]{25} = ?$

Lösung:

$\sqrt[2]{25} = 5$, da $5^2 = 25$



$a, c \geq 0$

$n \Rightarrow$ natürliche Zahl (1, 2, 3, …)

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, …), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, …).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{}$

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel $(\sqrt[4]{})$, 5. Wurzel $(\sqrt[5]{})$ usw.

Außer beim Wurzelexponenten 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Beispiel: Quadratwurzel

$\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$

(sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel

$\sqrt[3]{64} = 4$ (da $4^3 = 64$)

(sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 65 ist 4)

Beispiel: 4. Wurzel

$\sqrt[4]{16} = 2$ (da $2^4 = 16$)

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer!

Wurzel als Potenzausdruck

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

Aufheben des Wurzelziehens

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Beispiel: $\left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 64$

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z. B. [$\sqrt{}$] oder [$\sqrt{x}$].

Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechnertasten berechnet, z. B. [$\sqrt[x]{}$], [$\sqrt[x]{y}$] oder [INV] [y^x].

Beispiel: Es sind zu berechnen:

a) $\sqrt{529}$; b) $\sqrt[4]{39{,}0625}$

a) Eingabe		[$\sqrt{x}$]	529	[=]
Anzeige		$\sqrt{}$	$\sqrt{529}$	23.00000
b) Eingabe	4	[$\sqrt[x]{}$]	39,0635	[=]
Anzeige	4	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[4]{39.0625}$	2.500016

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleicher Basis (so genannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (x+y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125}$ $= (5+12-14) \cdot \sqrt[3]{125}$ $= 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem • entweder der Produktwert radiziert wird oder • jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird.	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{2916} = 54$ oder $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81}$ $= 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem • entweder der Quotientenwert radiziert wird oder • Zähler und Nenner getrennt radiziert werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man • die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert oder • die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt.	$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt{9^4} = \sqrt[2]{9^4} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{(a+b)}$	$\sqrt[3]{81+44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt{289-145} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{39x^2y^2 + 25x^2y^2}$ $= \sqrt{64x^2y^2} = 8xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert

   a) $\sqrt{45796}$ b) $\sqrt{0{,}0065324}$ c) $\sqrt{1432{,}6225}$ d) $\sqrt[3]{39{,}785}$ e) $\sqrt[4]{42{,}424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben

   a) $2{,}8 \cdot \sqrt{3} + 1{,}9 \cdot \sqrt{5} - 2{,}1 \cdot \sqrt{5} - 1{,}6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22{,}5}$

   d) $(7+4\sqrt{3}) \cdot (7-\sqrt[4]{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie

   a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$

   h) $4{,}3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3{,}8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{3{,}9\,\text{m} - 2{,}7\,\text{m}}{3}\right)^2 + (0{,}3\,\text{m})^2}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

Der Logarithmus ist der Exponent n, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.

Numerus

$$\mathbf{n = \log_a c}$$

Logarithmus Basis

Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der **Potenzrechnung:**	Berechnet wird der Potenzwert c:	$c = a^n$	z. B.	$100 = 10^2$
Bei der **Wurzelrechnung:**	Berechnet wird die Basis a:	$a = \sqrt[n]{c}$	z. B.	$10 = \sqrt[2]{100}$
Beim **Logarithmieren:**	Berechnet wird der Exponent n:	$n = \log_a c$	z. B.	$2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen

$\log_2 8 = 3$	da $2^3 = 8$;	$\log_2 32 = 5$	da $2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2$	da $3^2 = 9$;	$\log_3 27 = 3$	da $3^3 = 27$
$\log_5 25 = 2$	da $5^2 = 25$;	$\log_5 125 = 3$	da $5^3 = 125$
$\log_{10} 10 = 1$	da $10^1 = 10$;	$\log_{10} 100 = 2$	da $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$	da $10^3 = 1000$	$\log_{10} 10\,000 = 4$	da $10^4 = 10\,000$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$	da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$	$\log_{10} 0{,}01 = -2$	da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$

Logarithmensysteme

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **BRIGG'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder $\log_{10}$ oder vereinfacht nur **log** oder **lg**.

Auf der Taschenrechnertastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste [log] oder [LOG].

In den Naturwissenschaften, wie z. B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: $\log_e$. Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **ln** geschrieben.

(e, die sogenannte Euler-Zahl, ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt e = 2,7182818...; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmenwerte mit der Taste [lnx] oder [LN].

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Umrechnen der Logarithmen

$\lg x = 0{,}4342945 \cdot \ln x$

$\ln x = 2{,}3029851 \cdot \lg x$

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (ln) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine [log]-Taste besitzt.

Lösung: Mit der [log]-Taste wird bestimmt: lg 126 = 2,1003705

Mit der Umrechnungsgleichung folgt:

ln 126 = 2,3025851 · lg 126 = 2,3025851 · 2,1003705 = **4,8362819**