EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe

Ernst Bartels, Klaus Brink, Gerhard Fastert, Eckhard Ignatowitz

7. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 71713

Autoren:
Dr. Ernst Bartels, StD — Winsen/Aller
Dr. Klaus Brink, StR † — Leverkusen
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR † — Stade
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a. D. — Waldbronn

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:
Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

7. Auflage 2018
Druck 5 4 3 2
Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-2560-9

http://www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: MediaCreativ, G. Kuhl, 40724 Hilden
Umschlagfoto: © kwanchaift – stock.adobe.com
Satz: rkt, 51379 Leverkusen, www.rktypo.com
Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK UND DATENAUSWERTUNG FÜR LABORBERUFE** ist ein Lehr- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Bereich fachbezogener Berechnungen sowie der Labordaten- und Prozessdatenauswertung.

Dieses Lehrbuch ist geeignet für Auszubildende zum Chemielaboranten, Lacklaboranten und Biologielaboranten. Auch in den Berufsfachschulen Chemisch-technischer Assistent/in, Biologisch-technischer Assistent/in, Pharmazeutisch-technischer Assistent/in und Umwelt-technischer Assistent/in, an Fachschulen für Biotechniker, Chemotechniker und Umweltschutztechniker sowie in der Fachoberschule Technik (Fachrichtung Chemie), der Berufsoberschule und in naturwissenschaftlich ausgerichteten Gymnasien ist es einsetzbar.

Die Auswahl der Inhalte orientiert sich an den Rahmenlehrplänen für die Ausbildungsberufe Chemielaborant/Chemielaborantin, Biologielaborant/Biologielaborantin und Lacklaborant/Lacklaborantin (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18. März 2005) und der Verordnung über die Berufsausbildung im Laborbereich Chemie, Biologie und Lack vom 25. Juni 2009.

Dieses Buch vermittelt neben den mathematischen Grundkenntnissen die Vielfalt der berufsbezogenen mathematischen Kenntnisse aus den Bereichen Chemie, Physik, Statistik, Reaktionskinetik, Analytik, Qualitätssicherung, Beschichtungsstoffe und Informatik. Es ist ein kompetenter Begleiter während der Ausbildung und ein guter Vorbereiter auf die Prüfung.

Durch seinen modularen Aufbau ist das Buch uneingeschränkt für den Lernfeld-orientierten Unterricht geeignet. Den Beispielen und Übungsaufgaben liegen konsequent Problemstellungen aus dem Berufsalltag der Laborberufe zugrunde. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die zahlreichen Vorgänge und Geräte durch Abbildungen zu veranschaulichen. Wichtige Gesetzmäßigkeiten und Formeln sind optisch hervorgehoben. Ebenso unterstützen graue und rote Unterlegungen des Textes bei den Beispielen und den Übungsaufgaben die rasche Orientierung im Buch. Am Ende eines Kapitels folgen zahlreiche praxisorientierte Übungsaufgaben, die zur Festigung des Erlernten, zur Leistungskontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.

Die Lösungen der Beispielaufgaben sind überwiegend mit Größengleichungen gerechnet. Wo es sinnvoll ist, wird alternativ auch die Schlussrechnung angewendet. Dabei wird das Runden der Ergebnisse auf die Anzahl signifikanter Ziffern oder Stellen konsequent berücksichtigt.

In zahlreichen Kapiteln werden die Möglichkeiten zur Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms bei der rechnerischen oder grafischen Auswertung von Daten und Datenreihen vorgestellt.

Die im Rahmenlehrplan der Laborberufe geforderte Kompetenz zur Nutzung fremdsprachlicher Informationsquellen wird durch die Angabe von Schlüsselbegriffen in englischer Sprache (jeweils in Klammern hinter der deutschen Bezeichnung) im Text unterstützt.

Bei den Bestimmungsmethoden physikalischer oder chemischer Größen sind im Text oder in den tabellarischen Übersichten die entsprechenden DIN-Normen angegeben. Die Bezeichnung von Stoffen folgt den Vorgaben der IUPAC, aber auch die in der Anlagen- und Laborpraxis üblichen technischen Namen werden aufgeführt, soweit sie von der IUPAC als weiterhin erlaubt gekennzeichnet sind.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind vertiefende Lerninhalte zu den Beschichtungsstoffen und zur Biometrie in eigenständigen Kapiteln am Ende des Buches angeordnet.

Zum Lehrbuch Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe gibt es ein **Lösungsbuch** mit vollständig durchgerechneten, teilweise auch alternativen Lösungswegen sowie methodischen Hinweisen (Europa-Nr. 71764).

In der **7. Auflage** wurden Fehler korrigiert, der Text überarbeitet und der Anhang aktualisiert.

Verlag und Autoren danken im Voraus den Benutzern des Buches für weitere kritisch-konstruktive Verbesserungsvorschläge und Fehlerhinweise (lektorat@europa-lehrmittel.de).

Sommer 2018 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen.** Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z. B. 3 , 9,5 , $^1/_2$ usw. stehen die allgemeinen Zahlen als Platzhalter für beliebige Zahlen, wie z. B. x, y, z.

Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürlichen Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind **positive ganze Zahlen** sowie die Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, 12, ..., 37, ..., 59, 60, 61, ..., 107, ...
Die **negativen ganzen Zahlen** erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. **Beispiel:** 5 – 7 = – 2; 15 – 29 = – 14	–1, –2, –3, ..., –18, –19, ...
Die **ganzen Zahlen** umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... –1, –2, –3, –4, ..., –21, –22, ...
Gebrochene Zahlen, auch **Bruchzahlen** genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d.h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \ldots$ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 2\frac{1}{3}, -\frac{7}{9}, \ldots$
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748, 0,250, –8,32, –2,0, –0,5, –7,8316, 4,57, 7,8, –3,942, ...

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man als **rationale Zahlen.**
Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen.** Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2}$ = 1,4142136...; $\sqrt{3}$ = 1,7320508...
Transzendente Zahlen	π = 3,1415927..., e = 2,7182818...
Die irrationalen Zahlen sind nicht-periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.	

Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe oben, Beispiele) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen **(Bild 1).** Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

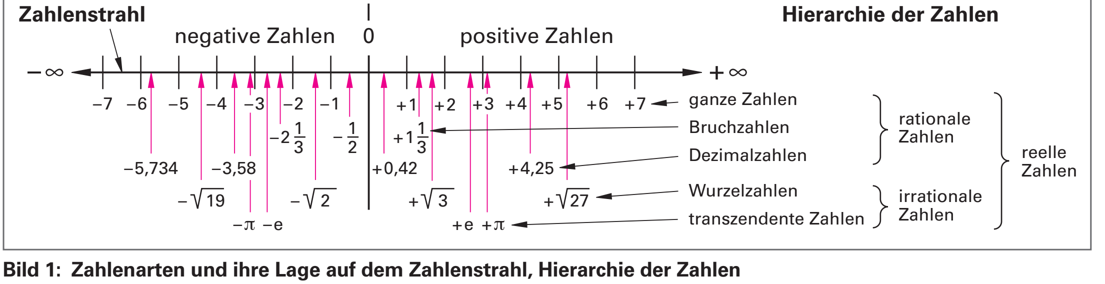

Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch **Variable** genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

Darstellung der allemeinen Zahlen	Beispiele
In der allgemeinen Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.	*a, b, c, … u, v, w, …, x, y, z*
In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen, die meist dem Anfangsbuchstaben der Variablen entsprechen. Man verwendet Buchstaben des lateinischen und des griechischen Alphabets.	*l, b, t, v, …, A, V, U, T, …* *l* Länge, *b* Breite, *t* Zeit, *h* Höhe *A* Fläche, *V* Volumen, *U* Umfang *T* thermodynamische Temperatur, ϑ Celsius-Temperatur, α Winkel

Aufgaben

1. Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen:
   $0{,}7$; -18; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{7}$; 0; -387; $-\pi$; $-0{,}32$?
2. Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen:
   $-3\frac{1}{3}$; $0{,}85$; e; $-0{,}25$; $\sqrt{9}$; $\frac{2}{4}$; $-3{,}50$?

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z.B. *l* für die Länge.

Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einer Einheit, z. B. 5,8 kg. Die Einheit wird mit einem Einheitenzeichen angegeben, z. B. kg.

Es gibt 7 **Basisgrößen,** auf die sich alle Größen zurückführen lassen **(Tabelle 1).**

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten

Physikalische Größen	Größenzeichen	Einheitennamen	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation **(Tabelle 2).**

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen das Kurzzeichen für „multiplizieren“ z. B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationszeichen $\times$ zugelassen.

Beispiel: 3 m $\times$ 5 m.

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (Auswahl)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
$+$, $-$	plus, minus	$<$, $>$	kleiner, größer
: , /	geteilt durch, pro	$\leq$ $\geq$	kleiner gleich größer gleich
$\cdot$, $\times$	mal	Δ	Differenz
$=$, $\neq$	gleich, ungleich	…	und so weiter
$\approx$	beträgt rund	∞	unendlich
$\equiv$	identisch gleich	$\pm$	plus/minus
$\sim$	proportional	$\lvert a \rvert$	Betrag von *a*
$\hat{=}$	entspricht	$\sqrt{\ }$	Wurzel

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (equations) oder Formeln (formula) ausgedrückt.

Mit Hilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die Größen berechnen (Seite 28).

Beispiel für Größengleichungen:

Fläche $A = l \cdot b$ Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$

Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer mathematischen Zeichen (+, –) auch als **Strichrechnungen** bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.

$$\underbrace{\overbrace{a + b}^{\text{Summe}}}_{\text{Summanden}} = \overset{\text{Summenwert}}{c}$$

$$\overbrace{\underset{\text{Minuend}}{d} - \underset{\text{Subtrahend}}{e}}^{\text{Differenz}} = \overset{\text{Differenzwert}}{f}$$

Rechenregeln zum Addieren und Subtrahieren	
Rechenregeln	**Beispiele**
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8\ m^2 + 72\ cm^2 + 7{,}5\ m^2 - 23\ cm^2$ $= 15{,}5\ m^2 + 49\ cm^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz). Erläuterung: Durch Vertauschen der Glieder kann die Aufgabe in eine für die Rechnung vorteilhafte Reihenfolge geordnet werden.	$5 - 16 + 7 = -16 + 7 + 5 = -4$ $11\ x - 3\ x + 9\ x = 11\ x + 9\ x - 3\ x$ $= 17\ x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 3 = 7 - 3 = 4$ $8\ u - 3\ v + 3\ u + 8\ v$ $= 8\ u + 3\ u - 3\ v + 8\ v = 11\ u + 5\ v$
Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Klammern, ( ) oder [ ], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.	
Steht ein +-Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27$ $7\ a + (3\ a - 9\ a) = 7\ a + 3\ a - 9\ a$ $= 1\ a = a$
Steht ein –-Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein –-Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5)$ $= 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$ $5\ x - (2\ x + 9\ a - 7\ b)$ $= 5\ x - 2\ x - 9\ a + 7\ b$

Aufgaben zu Addieren und Subtrahieren

1. Ermitteln Sie die Ergebnisse:
   a) $328 + 713 + 287 + 38 + 9 - 103$
   b) $59{,}30\ a - 27{,}53\ a + 7{,}83\ b - 21{,}04\ b$
   c) $22{,}2\ u + 38{,}9\ v - 17{,}8\ u + 3{,}6\ v + 9{,}8\ w$

2. Setzen Sie um das 2. bis 4. Glied eine Klammer:
   $8{,}3\ x - 7{,}8\ a + 2{,}5\ x - 9{,}2\ a$

3. Lösen Sie die Klammer auf:
   $25\ a - (36\ b - 19\ a - 11\ b - 12\ a)$

1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist · oder ×.

Bei allgemeinen Zahlen kann das Malzeichen weggelassen werden.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** $1\,a = a$

$$\overbrace{a \cdot b}^{\text{Produkt}} = \overset{\text{Produktwert}}{c}$$

$$\underbrace{a \quad b}_{\text{Faktoren}}$$

Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0. Die Faktoren können vertauscht werden. Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$ $a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$ $a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$ $15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$ $5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{m}^3$
Vorzeichen beim Multiplzieren Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt. Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$ $(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$2 \cdot 3 = 6$; $(-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$ $5 \cdot (-2) = -10$; $(-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab$; $(-4) \cdot \mathrm{m} = -4\,\mathrm{m}$
Multiplizieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36$ $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$
Ausklammern (Faktorisieren) Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Die Summe wird dadurch in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3\,\pi x + 3\,\pi y = 3\pi\,(x + y)$ $L_0 + L_0 \alpha \cdot \Delta\vartheta = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta\Delta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   a) $(+3) \cdot (-15)$ b) $(+9) \cdot (+7)$
   c) $(-7) \cdot (-12)$ d) $(+5) \cdot 0$
   e) $(0) \cdot (-16)$ f) $(-3\,a) \cdot (+8\,b) \cdot (+2\,c)$
   g) $(+9\,x) \cdot (-4\,y)$
   h) $(+13\,m) \cdot (+4\,m) \cdot (+2\,m)$

2. Führen Sie die Multiplikationen aus:
   a) $3\,(3\,a - 2\,b)$ b) $9\,(7\,u + 8\,v)$
   c) $(-5) \cdot (-4\,x - 7\,y)$ d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
   e) $(6\,c - 3\,d) \cdot (+2\,a)$ f) $-x\,(y - z)$
   g) $4\,uv\,(9\,r - 5\,s)$ h) $-(4\,ab + 7\,xy) \cdot (-12)$
   i) $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ j) $m_\mathrm{M} = \varrho_\mathrm{M} \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}\right)$

3. Multiplizieren Sie die Ausdrücke:
   a) $(7\,s + 5\,r) \cdot (3\,l - 6\,k)$
   b) $5\,(3\,u - 4\,v) \cdot 8 \cdot (2\,w - 9\,x)$
   c) $(-4) \cdot (9\,w + 3\,x) \cdot (-3) \cdot (8\,y - 5\,z)$
   d) $11\,a\,(-3\,b + 2\,x) \cdot (4\,c - 5\,y)$

4. Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x = 3$ und $y = 4$ gesetzt wird?
   $7\,(5 - 2\,x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6\,y)$

5. Klammern Sie aus:
   a) $2ab + 2ac + 2ad$
   b) $\pi n r_1 + \pi n r_2$
   c) $-30\,rs + 20\,ls$
   d) $\pi r_1^2 + \pi h^2$

1.3.3 Dividieren

Das Dividieren (Teilen, engl. divide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das Doppelpunkt-Zeichen : und der Bruchstrich sind gleichbedeutend.

Dividend und Divisor dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Divisor (Nenner) Null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.

$$\overbrace{\underbrace{a}_{\text{Dividend}} : \underbrace{b}_{\text{Divisor}}}^{\text{Quotient}} = \frac{a}{b} = \underbrace{c}_{\text{Wert des Quotienten}}$$

Zähler: a — Nenner: b

Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
Vorzeichen beim Dividieren		
Gleiche Vorzeichen bei Dividend und Divisor ergeben einen positiven Quotienten.	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	$(+2):(+3) = +\frac{2}{3}$; $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$
Ungleiche Vorzeichen von Dividend und Divisor ergeben einen negativen Quotienten.	$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}$; $\frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$
Dividieren von Klammerausdrücken		
Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Divisor geteilt wird.	$(a-b):x = a:x - b:x$ $\frac{a-b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$	$\frac{36\,xyz - 24\,xuv}{6\,x}$ $= \frac{36\,xyz}{6\,x} - \frac{24\,xuv}{6\,x}$
Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.	$\frac{a+b}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	$= 6\,yz - 4\,uv$
Kürzen, Erweitern		
Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt.	$\frac{4\,ab}{6\,ac} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot c}{\cancel{6} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot 3} = \frac{2\,b}{3\,c}$	$\frac{-48\,xy}{36\,x} = \frac{-4 \cdot \cancel{12} \cdot x \cdot \cancel{y}}{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{y}}$ $= -\frac{4}{3}x$
Es können nur Faktoren gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden.	$\frac{\cancel{a}(b+c)}{\cancel{a}} = b+c$ $\frac{\cancel{a}b + \cancel{a}c}{\cancel{a}} = b+c$	$\frac{9\,x - 2\,y}{5\,z}$ erweitern mit $(-3) \Rightarrow$
Beim **Erweitern** werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.	$b + c = \frac{(b+c)a}{a}$	$\frac{(9\,x - 2\,y) \cdot (-3)}{5\,z \cdot (-3)} = \frac{-27\,x + 6\,y}{-15\,z}$

Aufgaben zum Dividieren

1. a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$

2. a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$

3. a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$

4. Kürzen Sie soweit als möglich:
   a) $\frac{-12\,uv}{3\,v}$ b) $\frac{6\,a - 3\,b}{3}$ c) $\frac{81\,xyz}{-9\,yz}$ d) $\frac{-187\,rs + 153\,rs + 34\,rs}{-17\,s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4\,x}{(-35) \cdot (-2)}$
   f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7\,x - y) \cdot (3 + 2\,b)}{-2\,b - 3}$

5. Erweitern Sie:
   a) $\frac{7\,a}{5\,b}$ mit (-3) b) $\frac{3\,x}{-8\,y}$ mit (-1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Subtraktionen (Strichrechnungen + –) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen · :) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt.

1. Enthält der zu berechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

> Punkt vor Strich, d. h. Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40;$ $\quad \frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$

$\frac{122 - 66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 7 \cdot 14 = 98;$ $\quad 125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = 5$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

> Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$

$5\,a \cdot (11\,b - 8\,b) - 2\,b \cdot (3\,a + 4\,a) = 5\,a \cdot 3\,b - 2\,b \cdot 7\,a = 15\,ab - 14\,ab = ab$

$$\frac{7 \cdot (23{,}2 - 23{,}3)}{(2{,}4 + 4{,}6) \cdot (-0{,}5)} = \frac{\cancel{7} \cdot (-0{,}1)}{\cancel{7} \cdot (-0{,}5)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

> Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer zusammenfassen usw.

Beispiel: $4\,ac + [(3\,a + 7\,a) \cdot 5\,c + 5\,ac] = 4\,ac + [10\,a \cdot 5\,c + 5\,ac] = 4\,ac + 50\,ac + 5\,ac = 59\,ac$

4. Enthält ein Ausdruck Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt: Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausgerechnet.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

1. a) $-4 \cdot (0{,}2 - 3{,}2) + (14{,}5 - 8{,}5) \cdot (-0{,}1)$ b) $12\,x \cdot (-3\,y) + (0{,}75\,x - 0{,}50\,x) \cdot (+80)$

2. a) $\frac{(-2{,}5) \cdot (86 - 82)}{(1{,}3 - 0{,}8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0{,}125 \cdot (-85 + 117)}{(0{,}4) \cdot (-8) \cdot (2{,}5)}$ c) $24{,}7 \cdot \frac{(1 - 0{,}392)}{(1 - 0{,}065)}$

3. a) $(23{,}8 - 21{,}3) \cdot \frac{2{,}14 + 0{,}86}{4{,}52 - 4 \cdot 0{,}38}$ b) $\frac{18{,}06 - 17{,}56}{0{,}25} + \frac{27}{3{,}2 + 5{,}8} - \frac{(0{,}2 + 2{,}8) \cdot (5{,}4 - 3{,}4)}{2{,}4 \cdot 2{,}5}$

4. a) $2\,x - [5\,y - (3\,x - 4\,y) + 7\,x] - y$ b) $4{,}5\,a \cdot [(2\,b - c) - c] - 8\,a\,(c - b)$

   c) $[-0{,}2\,a - (1{,}7\,b - 1{,}9\,a)] : \left[\frac{5{,}5\,a}{10} - 0{,}85\,b + 0{,}3\,a\right]$

5. a) $2 \cdot [-2\,xy - (20\,a - 12\,xy)] + 5\,(2\,a - xy)$ b) $0{,}3\,a \cdot \{5\,xy - (92\,x - 87\,y) - (84\,y - 82\,x)\}$

   c) $\{-9{,}5\,x + [(1{,}5\,x - 4\,y) \cdot (0{,}5 + 6{,}5)] + 29\,y\} \cdot \frac{1}{x + y}$

1.5 Bruchrechnen

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist.
Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z. B. $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333...$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Es gibt verschiedene **Brucharten**:

Benennungen bei Brüchen

Zähler → a
Nenner → b

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Bruch}} = \underbrace{c}_{\text{Wert des Bruchs}}$$

Brucharten	Beispiele	Merkmale	**Brucharten**	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{5}{7}; \frac{2}{5}$	Zähler < Nenner	Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1	Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}; 3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch	Scheinbrüche	$\frac{3}{1}; \frac{6}{2}; \frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl

Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7}\ 1}{\cancel{21}\ 3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8\,ab}{14\,a} = \frac{\cancel{8}\ \cancel{a}\ b\ 4}{\cancel{14}\ \cancel{a}\ 7} = \frac{4\,b}{7}$; $\frac{32\,a + 4\,ab}{6\,a} = \frac{\cancel{4}\ \cancel{a}\ (8+b) \cdot 2}{\cancel{6}\ \cancel{a} \cdot 3} = \frac{2\,(8+b)}{3}$

Beispiele zum Erweitern: $\frac{2\,a - 3\,b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10\,a$ $\Rightarrow$ $\frac{(2\,a - 3\,b) \cdot 5\,a}{2 \cdot 5\,a} = \frac{5\,a\,(2\,a - 3\,b)}{10\,a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3\,x}{5\,b} + \frac{7\,x}{5\,b} - \frac{4\,x}{5\,b} = \frac{3\,x + 7\,x - 4\,x}{5\,b} = \frac{6\,x}{5\,b}$

Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a + b - c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner.** Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV** der einzelnen Nenner.

Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche: **Beispiel:** $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$

1. Zerlegung in Primzahlfaktoren

Nenner Primzahlfaktoren

$$\begin{array}{lcl} 8 & = & \boxed{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ 6 & = & \quad\ \ 2 \cdot \boxed{3} \\ 10 & = & \quad\ \ 2 \cdot \quad \boxed{5} \\ \hline \textbf{kgV} & = & \boxed{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5} = \mathbf{120} \end{array}$$

2. Hauptnenner (kgV) bestimmen
Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl.
(Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)

3. Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen
120 : 8 = 15
120 : 6 = 20
120 : 10 = 12

4. Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern

$$\frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} - \frac{7 \cdot 12}{10 \cdot 12}$$

5. Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche

$$\frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \mathbf{\frac{61}{120}}$$

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Zerlegen in Primzahlen und Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ 9ab &= 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ 18b &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \\ \hline \text{kgV} &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 18ab \end{aligned}$$

2. Erweiterungsfaktor bestimmen:

$$\begin{aligned} 18ab : 2a &= 9b \\ 18ab : 9ab &= 2 \\ 18ab : 18b &= a \end{aligned}$$

3. Erweitern und Zusammenfassen:

$$\frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} = \frac{27bx}{18ab} - \frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} = \frac{x(27b - 4 + 5a)}{18ab}$$

$$= \frac{x(5a + 27b - 4)}{18ab}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$ b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

2. a) $\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b}$ b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
Multiplizieren Brüche werden multipliziert, indem die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden. Gemischte Zahlen werden untereinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$; $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3\cancel{y} \cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
Dividieren Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird. Ganze Zahlen können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$; $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} : \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Fassen Sie zusammen: a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x + 4y}{4a + 6b} + \frac{9x}{9b + 6a} - \frac{5}{3}$

2. Multiplizieren Sie: a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{3}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$

2. Dividieren Sie: a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$

4. Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit als möglich zusammen
a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x + 8y}{3r - 3s} : \frac{4x + 4y}{9r - 9s}$
d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a - 3b}{6n} + \frac{5a - 3b}{3m}$ f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$
g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u + v}{l + k} + \frac{3(u + v)}{2(l + k)} - \frac{5(u - v)}{3(k + l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden.

Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.

gleiche Faktoren, Basis, Exponent

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}_{\text{Produkt}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenz}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste $\boxed{y^x}$ oder $\boxed{\wedge}$.

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3{,}25^3$

Eingabe	3,25	$\boxed{y^x}$ 3	$\boxed{=}$
Anzeige	3.25	3.25^3	34.328125

Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; usw.

Merke:
- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z. B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden.
Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$; $\frac{3^{-4}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0{,}1975$; $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1 **Beispiel:** $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

$$1^n = 1$$

Potenzen mit dem Exponent 0 **Beispiel:** $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$

Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.
Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100\,000\,000 = 10^8$; $7\,200\,000 = 7{,}2 \cdot 1\,000\,000 = 7{,}2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0{,}0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0{,}0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2{,}938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzform:
   a) $2l \cdot 4l \cdot 8l$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$
   c) 1,5 cm · 2,3 cm · 1,4 cm

2. Berechnen Sie den Potenzwert:
   a) $21^{2,5}$ b) $(-6{,}3)^3$
   c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2{,}4^{3,5}$

3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:
   a) 5 000 000 b) 0,0023
   c) 96 485 d) 0,000 082

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$x \cdot a^n + y \cdot a^n$ $= (x + y) \cdot a^n$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= (9 - 6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4{,}2\ \text{cm}^2 + 5{,}8\ \text{cm}^2$ $= (4{,}2 + 5{,}8) \cdot \text{cm}^2 = 10{,}0\ \text{cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 \cdot 10^{(-3+6)} = 10^3$ $\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-2} = \text{m}^{(3-2)} = \text{m}^1 = \text{m}$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ $4{,}0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4{,}0 \cdot \text{cm})^3 = 64\ \text{cm}^3$
Dividieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden dividiert, indem die Basis beibehalten und mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden dividiert, indem ihre Basen dividiert und der Exponent beibehalten wird.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1{,}728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $(r^2)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$ $(9 - 3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen

   a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12\,\text{m}^2 + 7\,\text{m}^3 - 7\,\text{m}^2 + 5\,\text{m}^3$ c) $6{,}2\,x^4 + 3{,}4\,y^2 + 7{,}5\,x^4 - 3{,}4\,y^2$

   d) $2{,}8\,\pi r^2 h + \frac{5}{4}\pi r^3 - 1{,}75\,\pi r^3 + 2{,}2 h r^2 \pi$ e) $-14{,}3 \cdot 7^3 + 6{,}9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1{,}1 \cdot 11^4 + 8{,}7 \cdot 7^3$

2. Muliplizieren von Potenzen

   a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0{,}4\,a^4 \cdot 0{,}5\,a^5$ c) $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2{,}5\,r^2) \cdot 2r^2$

   e) $d^{0{,}5x} \cdot d^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r + s)^2 \cdot (r + s)^3$ h) $(x + y)^a \cdot (x + y)^b$

3. Dividieren von Potenzen

   a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780\,x^5}{39\,y^5}$ e) $\frac{2\,r^3}{3\,a^2} \cdot \frac{12\,a^2}{16\,r^3}$ f) $\frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$

4. Potenzieren von Potenzen

   a) $(5^3)^2$ b) $(10^3)^{-2}$ c) $(4^2 \cdot axy^2)^3$ d) $5 \cdot (u^2 v^3)^5$ e) $(1^7)^2 \cdot (3^0)^3$ f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. Potenzieren von Summen

   a) $(3 + 7)^3$ b) $(22 - 17)^5$ c) $(23 - 14)^5$ d) $(5 + 9)^4$

1.7 Wurzeln

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z. B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt[2]{\ }$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[2]{16} = ?$; *Lösung*: $\sqrt[2]{16} = 4$, da $4^2 = 16$

$\sqrt[2]{9} = ?$; *Lösung*: $\sqrt[2]{9} = 3$, da $3^2 = 9$

Beispiel: Potenzieren

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Beispiel: Wurzelziehen

$x^2 = 25;\ \ x = ?$

Schreibweise mit Wurzelzeichen:

$\sqrt[2]{25} = ?$

Lösung:

$\sqrt[2]{25} = 5$, da $5^2 = 25$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert.

Es gilt eine Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, müssen die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Wurzelexponent Wurzelzeichen

$$\sqrt[n]{a} = c$$

Basis (Radikant) Wurzelwert

$a, c \geq 0$

$n \rightarrow$ natürliche Zahl

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, ...), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, ...).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{\ }$.

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel ($\sqrt[4]{\ }$), 5. Wurzel ($\sqrt[5]{\ }$) usw.

Außer bei 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Beispiel: Quadratwurzel

$\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$

(sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel

$\sqrt[3]{64} = 4$ (da $4^3 = 64$)

(sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 64 ist 4)

Beispiel: 4. Wurzel

$\sqrt[4]{16} = 2$ (da $2^4 = 16$)

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Wurzelziehen (Radizieren) und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer.

Wurzel als Potenzausdruck

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

Aufheben des Wurzelziehens

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Beispiel: $\left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 64$

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z.B. [$\sqrt{\ }$] oder [$\sqrt{x}$].

Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechnertasten berechnet, z. B. [$\sqrt[x]{\ }$], [$\sqrt[x]{y}$] oder [INV] [y^x].

Beispiel: Es ist zu berechnen: $\sqrt[4]{39{,}0625}$

a) Eingabe	4	[$\sqrt[x]{\ }$]	39,0625	[=]
Anzeige	4	$\sqrt[4]{\ }$	$\sqrt[4]{39.0625}$	2.5000

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleicher Basis (so genannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125}$ $= (5 + 12 - 14) \cdot \sqrt[3]{125}$ $= 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem ● entweder der Produktwert radiziert wird oder ● jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird.	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{2916} = 54$ oder $\sqrt{36} \cdot \sqrt{81}$ $= 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem ● entweder der Quotientenwert radiziert wird oder ● Zähler und Nenner getrennt radiziert werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man ● die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert, oder ● die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt.	$\sqrt[n]{a^x} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = \left(\sqrt{9}\right)^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt{9^4} = \sqrt[2]{9^4} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{(a + b)}$	$\sqrt[3]{81 + 44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{39\,x^2\,y^2 + 25\,x^2\,y^2}$ $= \sqrt{64\,x^2\,y^2} = 8\,xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert:

   a) $\sqrt{45\,796}$ b) $\sqrt{0{,}0065324}$ c) $\sqrt{1432{,}6225}$ d) $\sqrt[3]{39{,}785}$ e) $\sqrt[4]{42{,}424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben:

   a) $2{,}8 \cdot \sqrt{3} + 1{,}9 \cdot \sqrt{5} - 2{,}1 \cdot \sqrt{5} - 1{,}6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22{,}5}$

   d) $(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - \sqrt[4]{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7\,x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie:

   a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$

   h) $4{,}3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3{,}8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{3{,}9\text{ m} - 2{,}7\text{ m}}{3}\right)^2 + (0{,}3\text{ m})^2}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

$$\underset{\uparrow\ \text{Logarithmus}}{n} = \log_{\underset{\uparrow\ \text{Basis}}{a}} \overset{\text{Numerus}\ \downarrow}{c}$$

Der Logarithmus ist der Exponent n, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.

Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der **Potenzrechnung:**	berechnet wird der Potenzwert c:	$c = a^n$	z. B.	$100 = 10^2$
Bei der **Wurzelrechnung:**	berechnet wird die Basis a:	$a = \sqrt[n]{c}$	z. B.	$10 = \sqrt[2]{100}$
Beim **Logarithmieren:**	berechnet wird der Exponent n:	$n = \log_a c$	z. B.	$2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen:

$\log_2 8 = 3$	da $2^3 = 8$;	$\log_2 32 = 5$	da $2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2$	da $3^2 = 9$;	$\log_3 27 = 3$	da $3^3 = 27$
$\log_5 25 = 2$	da $5^2 = 25$;	$\log_5 125 = 3$	da $5^3 = 125$
$\log_{10} 10 = 1$	da $10^1 = 10$;	$\log_{10} 100 = 2$	da $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$	da $10^3 = 1000$	$\log_{10} 10\,000 = 4$	da $10^4 = 10\,000$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$	da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$	$\log_{10} 0{,}01 = -2$	da $10^{-2} = \frac{1}{10^{-2}} = 0{,}01$

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

Logarithmensysteme

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **BRIGG'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder $\log_{10}$ oder vereinfacht nur **lg.**

Auf der Taschenrechnertastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste: $\boxed{\text{log}}$ oder $\boxed{\text{LOG}}$.

In den Naturwissenschaften, wie z. B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: $\log_e$. Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **ln** geschrieben. (e ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt e = 2,7182818… ; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmen mit der Taste: $\boxed{\text{ln}}$ oder $\boxed{\text{LN}}$.

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (ln) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine $\boxed{\text{log}}$-Taste besitzt.

Lösung: Mit der $\boxed{\text{log}}$-Taste wird bestimmt: lg 126 = 2,1003705

Mit der Umrechnungsgleichung folgt:

ln 126 = 2,3025851 · lg 126 = 2,3025851 · 2,1003705 = **4,8362819**

Umrechnen der Logarithmen

$\lg x = 0{,}4342945 \cdot \ln x$

$\ln x = 2{,}3025851 \cdot \lg x$