



Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife Gesamtausgabe

1. Auflage

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85337

Autoren des Buches „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife
Gesamtband“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Frank-Michael Gumpert	Stuttgart
Gerhard Mack	Stuttgart, Esslingen
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Durbach

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG,
Ostfildern

1. Auflage 2015

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8533-7

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Durbach; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: fidus Publikations-Service, 86720 Nördlingen

Druck: Totem, 88-100 Inowroclaw (PL)

Vorwort zur 1. Auflage

Die „Methodischen Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife Gesamtausgabe“ sind ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband. Damit finden Fachbuch und Formelsammlung eine wertvolle Ergänzung, vor allem auch für Phasen des selbstorganisierten Lernens.

Für die schnelle, gezielte Orientierung im Buch sind jeweils Kapitel, Teilkapitel sowie spaltenweise die Aufgabennummern angegeben.

Um ein Maximum an Übersicht bei der Benutzung zu gewährleisten, wird eine klare Gliederung bei der Darstellung der Lösungswege verwendet und z. B. auch das Ende jeder Aufgabe durch einen Trennstrich markiert.

Für zeichnerische Lösungen von Aufgaben, die durch Selbsttätigkeit der Schüler gelöst werden sollen, sind jeweils entsprechend sorgfältig aufbereitete Darstellungen z. B. von

- ⇒ räumlichen Projektionen,
- ⇒ Vektordarstellungen oder
- ⇒ Schaubilder von Funktionen vorhanden.

Entsprechend den Hauptabschnitten des Lehrbuchs enthält das Lösungsbuch Lösungswege zu den Kapiteln

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Vektorrechnung**
- **Stochastik**
- **Matrizen**
- **Prüfungsaufgaben**
 - **Musteraufgaben**
 - **Testen Sie Ihr Wissen zur Prüfung!**
- **Anwendungsbezogene Aufgaben**

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: info@europa-lehrmittel.de

Herbst 2015

Die Verfasser

Arbeiten mit dem Buch „Methodische Lösungswege zu Mathematik für die Fachhochschulreife Gesamtband“

Wie arbeite ich mit dem Buch?

Aufbau der methodischen Lösungswege:

In der obersten Zeile finden Sie das **Kapitel**, zu dem die Aufgaben der Seite gehören.

1 Algebraische Grundlagen

Hier finden Sie die Angabe der **Teilkapitel** für die folgenden Lösungen.

1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

Werden Bilder aus dem Lehrbuch für die Lösung einer Aufgabe benötigt, findet man in der **Aufgabenspalte** ein entsprechendes Icon:



Seite Aufgabennummer

29.1



Ausführliche Lösung zu Beispielaufgabe 1, Ursprungsgeraden auf der Seite 29 im Lehrbuch.

Ein Hinweis auf eine Tabelle  im Lehrbuch zeigt Wege zur Aufgabenlösung auf.

50.5



Tabelle 1,
Seite 45

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 5 auf der Seite 50 mit der **Tabelle 1** im Lehrbuch.

Benötigt man eine Formel zur Lösung einer Aufgabe, findet man den entsprechenden Formelhinweis mit der Seitenangabe.

$$A = \pi r^2$$

49.1

$$A = \pi r^2$$

Seite 46

Ausführliche Lösung zu der Aufgabe 1 auf der Seite 49 im Lehrbuch.

Mit der Formel von **Seite 46** im Lehrbuch, $y = a \cdot x^2 + y_S$ zur Lösung der Aufgabe.

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Grundlagen	
1 Terme und Gleichungen	7
Überprüfen Sie Ihr Wissen!	7
1.4 Definitions- und Lösungsmenge	10
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	12
1.5 Potenzen	16
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	17
1.7.3 Basisumrechnung beim Logarithmus	17
1.8 Funktionen und Gleichungssysteme	20
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	20
1.8.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem	20
1.8.3.1 Ursprungsgeraden	21
1.8.3.2 Allgemeine Gerade	21
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	21
1.8.3.2 Allgemeine Geraden	22
Überprüfen Sie Ihr Wissen!	27
1.8.4.1 Lösungsverfahren für LGS	27
1.8.4.5 Sarrus-Regel	27
1.8.4.6 Grafische Lösung eines LGS	29
Überprüfen Sie Ihr Wissen!	43
1.8.5. Betragsfunktion	43
1.8.6 Ungleichungen	44
1.8.7 Quadratische Funktionen	47
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	47
2 Geometrische Grundlagen	
2.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen	53
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	53
2.2 Kreisförmig begrenzte Flächen	54
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	56
2.3.1 Körper gleicher Querschnittsfläche	56
2.3.2 Spitze Körper	56
2.3.3 Abgestumpfte Körper	57
2.3.4 Kugelförmige Körper	57
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	60
2.4.3 Einheitskreis	60
2.4.5 Winkelberechnung	61
3 Analysis	
3.1 Potenzfunktionen	68
3.2.1 Wurzelfunktionen	69
3.2.2 Arten von quadratischen Wurzelfunktionen	69
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	70
3.3.1 Funktion dritten Grades	70
3.3.3.1 Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen	71
3.3.3.2 Nullstellenberechnung mit dem Nullprodukt	72
3.3.3.3 Nullstellenberechnung durch Abspalten von Linearfaktoren	74
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	80
3.3.4 Arten von Nullstellen	80
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	86
3.4.1 Symmetrie bei Funktionen	86
3.4.2 Umkehrfunktionen	87
3.4.4 Stetigkeit von Funktionen	88
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	89
3.5.4 Grenzwerte	89
3.5.5 Grenzwertsätze	90
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	97
3.6–3.7 Exponentialfunktion, e-Funktion	97
3.8 Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion	101
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	101
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	107
3.10.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion	107
3.10.4 Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion	107
Übungsaufgaben	108
4 Differenzialrechnung	
4.1 Erste Ableitung $f'(x)$	111
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	111
4.2 Differenzialquotient	111
4.3 Änderungsraten	111
4.4 Ableitungsregeln	112
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	112
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	114
4.5.2 Regel von de l'Hospital	114
4.6 Höhere Ableitungen	115
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	118
4.7 Extremwerte und Wendepunkte	118
4.8 Extremwerte und Wendepunkte für die Sinusfunktion und e-Funktion	127
Überprüfen Sie Ihr Wissen!	127
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	131
4.9.1 Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt	131
4.9.2 Tangenten parallel zu einer Geraden	132
4.9.4 Zusammenfassung Tangentenberechnung	135
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	139
4.11.1 Von der Funktion zur Ableitungsfunktion	139
4.11.2 Von Ableitungsfunktion zur Funktion	141
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	143
4.12.1 Relatives Maximum, relatives Minimum	143
4.12.4 Randextremwerte	144
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	152
4.12.5 Relative Extremwerte bei gebrochen-rationalen Funktionen	152
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	162
4.12.6 Einparametrische Funktionenschar	162
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	165
5 Integralrechnung	
5.1 Einführung in die Integralrechnung	170
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	170
5.1.3 Stammfunktionen	170
5.3.2 „Krummlinig“ begrenzte Fläche	170
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	172
5.4.2 Flächen für Schaubilder mit Nullstellen	172
5.4.6 Vermischte Aufgaben zur Flächenberechnung	173
5.5.4 Gelifete Schaubilder	177
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	177
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	186
5.6.3 Flächenberechnung mit Näherungsverfahren	186
5.7.1 Rotation um die x-Achse	188
5.7.2 Rotation um die y-Achse	189
5.8.1 Zeitintegral der Geschwindigkeit	193
6 Komplexe Rechnung	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	194
6.1 Darstellung komplexer Zahlen	194
6.2 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	194
6.3 Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen	194
7 Vektorrechnung	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	199
7.1 Der Vektorbegriff	199
7.2 Darstellung von Vektoren im Raum	199
7.3.1 Vektoraddition	201
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	201
7.3.2 Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion	202
7.3.3 Skalare Multiplikation, S-Multiplikation	204
Überprüfen Sie Ihr Wissen!	204
7.3.4 Einheitsvektor	205

Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	205	8.9	Varianz und Standardabweichung	317
7.3.5.1 Strecke, Mittelpunkt	211	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	323	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	211	8.10	Bernoulli-Ketten	323
7.3.6 Skalarprodukt	213	9 Matrizenrechnung		
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	213	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	330	
7.4.1 Zwei Vektoren im Raum	219	9.1	Matrizen erstellen	330
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	219	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	330	
7.4.2 Drei Vektoren im Raum	219	9.2	Transponierte Matrizen	330
7.4.3 Vier Vektoren im Raum	219	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	332	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	219	9.5	Matrizenaddition	332
7.5 Orthogonale Projektion	224	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	333	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	224	9.6.1 – 9.6.2 Multiplikation eines Zeilenvektors mit Spaltenvektor, Matrix	333	
7.6.2 Lotvektoren einer Ebene	226	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	334	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	226	9.6.4	Multiplikation zweier Matrizen	334
7.7 Vektorprodukt	230	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	335	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	230	9.8	Matrizengleichungen	335
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	234	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	339	
7.8. Vektorgleichung einer Geraden im Raum	234	9.9	Einstufige und zweistufige Produktionsprozesse	339
7.9 Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene	238	Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	340	
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	238	9.10	Das Leontief-Modell	340
7.10 Gegenseitige Lage von Geraden	249	10 Prüfungsaufgaben		
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	249	10.2	Testen Sie Ihr Wissen zur Prüfung!	344
7.11.1 Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt	255	10.2.1	Aufgaben mit ganzzahligen Funktionen	344
7.11.2 Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden	256	10.2.2	Funktionsterme und Schaubilder	352
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	258	10.2.3	Gebrochenrationale Funktionen	354
7.11.3 Abstand zwischen parallelen Geraden	258	10.2.4	Aufgaben mit e-Funktionen	357
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	266	10.2.5	e-Funktion und ln-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion	360
7.12.1 Vektorielle Parameterform der Ebene	266	10.2.6	Vektorrechnung	364
7.12.2 Vektorielle Dreipunkteform der Ebene	267	10.2.7	Schaubilder ganzzahliger Funktionen	370
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	271	10.2.8	Schaubilder von e-Funktionen	373
7.13.2 Abstand eines Punktes P zur Ebene E	271	10.2.9	Schaubilder von Kreisfunktionen	375
7.14.1 Gerade parallel zur Ebene	271	11 Anwendungsbezogene Aufgaben		
7.15 Lagebezeichnung von Ebenen	274	11.1	Kostenrechnung	378
8 Stochastik				
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	280	11.2	Optimierung einer Oberfläche	380
8.1 Anwendungen der Stochastik	280	11.3	Optimierung einer Fläche	382
8.2.1–8.2.2 Einstufige Zufallsexperimente	280	11.4	Flächenmoment	383
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	283	11.5	Sammellinse einer Kamera	386
8.3.1 Ereignisarten	283	11.6	Abkühlvorgang	387
8.3.2 Logische Verknüpfung von Ereignissen	283	11.7	Entladevorgang	389
8.4.1 Häufigkeiten	285	11.8	Gebirgsmassiv	390
8.4.2 Statistische Wahrscheinlichkeit	286	11.9	Bolzplatz für die Jugend	391
8.5 Klassische Wahrscheinlichkeit	287	11.10	Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung	392
8.5.2 Wahrscheinlichkeit von verknüpften Ereignissen	287	11.11	Sinusförmige Wechselgrößen	393
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	289	11.12	Effektivwertberechnung	393
8.5.3 Baumdiagramm	289	11.13	Wintergarten	394
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	293	10.14	Bauvorhaben Kirche	395
8.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit	293	11.15	Aushub Freibad	397
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	295	11.16	Pyramide	398
8.6.1 Unabhängige und abhängige Ereignisse	295	11.17	Kugelfangtrichter für Luftgewehre	400
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	298	11.19	Anwendungen der Differenzialrechnung	403
8.6.2 Zusammenhang zwischen Baumdiagramm und der Vierfeldertafel	298	Arbeiten mit dem GTR		
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	300	1.1	GTR CASIO FX-9860	408
8.7.1 – 8.7.2 Stichproben	300	1.1.6	Flächenintegrale mit dem GTR berechnen	408
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	303	1.1.7	Programmerstellung mit dem GTR	409
8.7.3 – 8.7.4 Ungeordnete Stichproben	303	1.2.3.2	Werte eines Schaubildes grafisch ermitteln	409
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	307	1.2.4	Tangenten das Schaubild an K_f	410
8.8.1 Zufallsvariable	307	1.2.5	Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS) mit dem GTR	411
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Übungsaufgaben	308	1.2.6	Flächenintegrale berechnen	412
8.8.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion	308	1.2.7	Komplexe Rechnung mit dem TI-84 Plus	413
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	311	1.3.1	Übungsaufgaben zum GTR Casio fx	414
8.8.3 Erwartungswert einer Zufallsvariablen	311	1.3.2	Übungsaufgaben zum GTR TI-84 Plus	421
8.8.4 Faires und unfaires Gewinnspiel	312			
Überprüfen Sie Ihr Wissen! ⇒ Beispielaufgaben	317			

1.3–1.4 Terme und Gleichungen

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

14.1 Lösungsmenge

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$ | Terme ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann nach x auflösen

$$8x - 24 = 2x - x - 4$$

$$8x - 24 = x - 4 \quad | -x + 24$$

$$7x = 20 \quad | : 7$$

$$x = \frac{20}{7}$$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$ | Terme ausmultiplizieren, zusammenfassen und dann nach x auflösen

$$6x^2 - 7x + 2 = 6x^2 - 12x - 48 \quad | -6x^2 + 12x - 2$$

$$5x = -50 \quad | : 5$$

$$x = -10$$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$ | $\cdot 5$ Gleichung mit 5 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$x + 2 - 10 = 20 \quad | + 8$$

$$x = 28$$

d) $\frac{2-x}{2} + a = 1$ | $\cdot 2$ Gleichung mit 2 multiplizieren, um den Nenner wegzubringen

$$2 - x + 2a = 2 \quad | + x - 2$$

$$x = 2a$$

14.2 Lösen von Gleichungen

a) Auflösen nach g: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ | $\cdot 2$ | $: t^2 \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2}$

Auflösen nach t: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ | $\cdot 2$ | $: g$

$$t^2 = \frac{2h}{g} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

b) Auflösen nach R $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad | \text{Bruch „stürzen“} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Auflösen nach R_1 $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2} \quad | \text{Bruch „stürzen“} \Rightarrow R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$$

Auflösen nach R_2 $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$ | gemeinsamen Nenner bilden

$$\frac{1}{R_2} = \frac{R_1 - R}{R \cdot R_1} \quad | \text{Bruch „stürzen“} \Rightarrow R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$$