



Arbeitsbuch zum selbstorganisierten Lernen

Brüche, Potenzen, Binome, Wurzeln

Lehrerhandbuch

Ursula Pirkl

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co.KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85429

Autorin:
Ursula Pirkel, Büttelborn

Verlagslektorat:
Klaus Horn

1. Auflage 2017 Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8542-9 (Lehrerhandbuch)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2017 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Druck: Konrad Triltsch Print und digitale Medien GmbH, 97199 Ochsenfurt-Hohestadt

Vorwort	5
1 Bruchrechnung – Regeln, Tipps und Beispiele	7
1.1 Unechte Brüche und gemischte Zahlen	9
1.2 Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner	10
1.3 Kürzen von Brüchen	11
1.4 Dezimalzahlen und Brüche	12
1.5 Hauptnenner ermitteln	14
1.6 Brüche addieren und subtrahieren	17
1.7 Brüche multiplizieren	21
1.8 Brüche dividieren	23
1.9 Brüche und Vorzeichenregeln	26
Bruchrechnung auf einen Blick	27
2 Variablen und Terme	28
2.1 Addition und Subtraktion von Variablen und Vielfachen von Variablen	28
2.2 Einsetzen von Zahlen für Variablen	36
Variablen und Terme auf einen Blick	41
3 Potenzen	42
3.1 Multiplikation von ganzen Zahlen und Variablen – der Potenzbegriff	42
3.2 Grundlegendes zum Umgang mit Potenzen	43
3.3 Zehnerpotenzen	47
3.4 Summen und Produkte bei Potenzen	55
3.5 Produkte quadrieren	71
3.6 Division bei Potenzen	74
3.7 Der Exponent 0	76
3.8 Potenzieren von Brüchen	76
3.9 Division von Potenzen, wenn mehrere Variablen auftreten	78
Potenzen auf einen Blick	79

4	Quadratwurzeln	80
4.1	Quadratwurzeln berechnen	80
4.2	Quadratwurzeln addieren und subtrahieren	85
4.3	Quadratwurzeln multiplizieren	86
4.4	Quadratwurzeln dividieren	90
4.5	Quadratwurzeln und quadrierte Variablen	92
	Quadratwurzeln auf einen Blick	94

5	Höhere Wurzeln und die Verbindung mit Potenzen	95
5.1	Kubikwurzeln und Volumenberechnungen	95
5.2	Rechnen mit Kubikwurzeln	97
5.3	Verbindung von Potenzen und Wurzeln	101
	Kubikwurzeln auf einen Blick	104
	Zusammenhang zwischen Potenzen und Wurzeln auf einen Blick	104

6	Multiplikation von Summen und binomische Formeln	105
6.1	Multiplizieren von Summen mit einem Faktor	105
6.2	Das Distributivgesetz anwenden	106
6.3	Multiplizieren von Summen	113
6.4	Faktorisieren von Summen	117
6.5	Binomische Formeln – Herleitung	121
6.6	Anwenden der binomischen Formeln beim Auflösen von Klammern	123
6.7	Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formel	129
6.8	Quadratische Ergänzung	135
	Multiplikation von Summen und binomischen Formeln auf einen Blick	138

	Sachwortverzeichnis	139
--	----------------------------	------------

Arbeitsbuch zum selbstorganisierten Lernen

In diesem Arbeitsbuch sind auf dem Niveau der Sekundarstufe I die Themen Brüche, Potenzen, Binome und Wurzeln für das selbstorganisierte Lernen aufbereitet. Geleitet durch Erklärungen in Sprechblasen ergänzen die Lernenden Berechnungen oder führen sie selbst vollständig durch. Kurze Textpassagen, mit Lücken zum Ausfüllen, und Merksätze ergänzen die Beispiele und Übungen.

Wesentlich für Unterlagen zum selbstorganisierten Lernen der Mathematik ist, dass

- die Inhalte extrem kleinschrittig und nachvollziehbar aufbereitet sind
- die Beispiele und Übungen durchgängig so aufeinander aufbauen, dass das notwendige mathematische Handwerkszeug jeweils bereits zuvor erlernt wurde
- die Lösungen für die Lernenden zwecks Selbstkontrolle frei zugänglich sind.

So wird insgesamt erreicht, dass sich auch bei Lernenden mit Zugangsproblemen zum Fach Mathematik schnell Erfolgserlebnisse einstellen und sie motiviert werden, sich weiter mit Mathematik zu beschäftigen und die gestellten Aufgaben selbstständig zu lösen.

Das Arbeitsbuch ist vielseitig einsetzbar:

- Für selbstorganisierte Lernphasen in Berufsfachschulklassen
- In Förderkursen an Fachoberschulen und Fachschulen sowie in der gymnasialen Oberstufe
- Zur individuellen Vorbereitung auf den Besuch einer weiterführenden Schule
- In Integrationskursen für Lernende, die bereits über Deutschkenntnisse verfügen

Herbst 2017

die Autorin

Arbeitsbuch mit rotem Faden

Die Abschnitte bauen aufeinander auf, sie folgen einem roten Faden. Deshalb ist es wichtig, sie in der vorgegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Dabei müssen Sie alle grau hinterlegten Lücken ausfüllen und die dazugehörigen Texte aufmerksam lesen. Dann lernen Sie alles, was für die Bearbeitung der Aufgaben in den späteren Abschnitten benötigt wird.

Die in oranger Schrift gesetzten Ergänzungen und Vertiefungen sind für das Verständnis späterer Abschnitte nicht notwendig und können übersprungen werden. Sie sind für besonders interessierte Lernende gedacht, die sich auf den Besuch einer weiterführenden Schulform vorbereiten wollen.

Lösungsheft zur Selbstkontrolle

Das Lösungsheft erlaubt die Kontrolle der eigenen Ergebnisse. Zum Nachschlagen der Lösungen orientieren Sie sich zunächst an der Abschnittsnummer und der am Rand angegebenen Seitenzahl. Dann ermöglichen es die Nummern der Lücken, die kleinen Zahlen in der rechten unteren Ecke der grau hinterlegten Felder, das gesuchte Ergebnis zu finden. Bei einigen Übungen sind mehrere Lücken durch einen Rahmen zusammengefasst, in dessen unterer rechter Ecke eine gemeinsame Nummer steht. Beide Fälle sind im nachfolgenden Beispiel gezeigt.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2 \frac{1}{2}$$

Das Lösungsheft kann auch zu Rate gezogen werden, wenn man trotz intensiver eigener Bemühungen nicht weiterkommt; reines Abschreiben aus dem Lösungsheft führt aber zu keinem Lernerfolg.

Taschenrechner als Hilfsmittel



Die mit dem Taschenrechnersymbol gekennzeichneten Textstellen enthalten Hinweise zum sinnvollen Einsatz eines Taschenrechners bei den gerade besprochenen Aufgaben.

Da nicht auf die Bedienung einzelner auf dem Markt verfügbarer Modelle eingegangen werden kann, erfolgen die Erklärungen für einen heute typischen Taschenrechner.

Zusatzmaterialien auf der Internetseite zum Buch

Zusatzmaterialien und weitere Informationen zum Einsatz des Arbeitsbuchs im Unterricht finden Sie auf der Internetseite www.europa-lehrmittel.de/85429.html.

Bruchrechnung

Regeln, Tipps und Beispiele

1

Definitionen und Fachbegriffe

Lesen Sie die folgenden Informationen und merken Sie sich die Fachbegriffe.

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs ist der **Zähler**.

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs ist der **Nenner**.

Bruch:

Ein Bruch hat die Form
Zähler durch Nenner.

$$\frac{1}{2}$$

spricht „**ein halb**“

$$\frac{4}{3}$$

spricht „**vier drittel**“

Der **Bruchstrich** hat die gleiche Bedeutung wie ein Divisionszeichen (:).
Damit ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $1 : 2$
oder $\frac{4}{3}$ das Gleiche wie $4 : 3$.

echter Bruch :

Der **Zähler** ist kleiner als der **Nenner**

Bsp.: $\frac{8}{9}$

unechter Bruch:

Der **Zähler** ist größer als der **Nenner**

Bsp.: $\frac{16}{9}$

Man kann jede ganze Zahl in einen unechten Bruch umwandeln, indem man sie mit dem Nenner **1** versieht.

Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$

gemischte Zahl:

Die Summe aus einem ganzzahligen und einem gebrochenen Teil nennt man gemischte Zahl.

Bsp.: $2\frac{1}{2}$

Achtung!

Bei gemischten Zahlen steht zwischen der ganzen Zahl, hier der 2, und dem Bruch ein gedachtes Additionszeichen (+) und kein Malpunkt (·).

$$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} \quad \text{aber} \quad 2\frac{1}{2} \neq 2 \cdot \frac{1}{2}$$



Einen Bruch als echten oder unechten Bruch oder auch als gemischte Zahl darstellen

echter/unechter Bruch:

gemischte Zahl:

Je nach gewählter Einstellung werden gemischte Zahlen automatisch als unechte Brüche angezeigt. Prüfen Sie die Anzeige bei Ihrem Taschenrechner, indem Sie den Bruch $2\frac{1}{2}$ als gemischte Zahl eingeben.

Kehrwert:

Man erhält den Kehrwert eines Bruches, indem man den Bruch „umdreht“, das heißt den Zähler und den Nenner vertauscht.

Bsp.: Der Kehrwert des Bruchs $\frac{4}{5}$ ist der Bruch $\frac{5}{4}$.

Dezimaldarstellung:

Man kann Brüche auch als Zahlen mit Vor- und Nachkommastellen angeben. Dazu muss man den Zähler durch den Nenner dividieren, denn der Bruchstrich hat die gleiche Bedeutung wie das Divisionszeichen (:). Dabei können sich periodische Dezimalzahlen ergeben. Informieren Sie sich auch, wie man bei Ihrem Taschenrechner zwischen Dezimalzahl und Bruch umschalten kann.

Beispiele

$\frac{1}{4}$ umrechnen:

$$1 : 4 = 0,25$$

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 10 \\
 \underline{8} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$

$\frac{1}{6}$ umrechnen:

$$1 : 6 = 0,1666... \approx 0,167$$

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 10 \\
 \underline{6} \\
 40 \\
 \underline{36} \\
 40 \\
 \underline{36} \\
 40
 \end{array}$$

Hier entsteht eine periodische Dezimalzahl. Diese Zahlen werden meist gerundet.

Umgekehrt kann man auch Dezimalzahlen als Brüche angeben. Das ist vor allem bei den modernen Taschenrechnermodellen der Fall, die standardmäßig Ergebnisse als Bruch darstellen. Die Vorgehensweise beim Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche wird in Abschnitt 1.4 erklärt.

Umschalten zwischen Bruch und dezimaler Darstellung

In der Grundeinstellung, die bei einem neuen Taschenrechner oder nach einem Reset vorliegt, werden Ergebnisse automatisch als echte oder unechte Brüche angezeigt. Mit der Taste kann man zwischen einem Bruch und seiner dezimalen Darstellung hin und her wechseln. Verdeutlichen Sie sich den Umgang mit dieser Taste, indem Sie die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ eingeben. Die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen kann man verändern. Informieren Sie sich, wie das bei Ihrem Taschenrechner eingestellt wird.

1.1 Unechte Brüche und gemischte Zahlen

Verdeutlichen Sie sich die Rechenwege zum Umwandeln von Brüchen. Wenden Sie die Verfahren anschließend bei den Übungen an.

1. Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Beispiel: Umwandeln von $3\frac{4}{5}$

1. Schritt

Im Kopf den **Nenner** des Bruchs mit der **ganzen Zahl** vor dem Bruch multiplizieren.
Hier: $3 \cdot 5$

2. Schritt

Im Kopf das berechnete Produkt zum **vorhandenen Zähler** des Bruchs addieren.
Der **Nenner** bleibt gleich.

Im Kopf:

$$\frac{3 \cdot 5 + 4}{5} = \frac{15 + 4}{5}$$

$$3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$

2. Umwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl

Beispiel: Umwandeln von $\frac{29}{6}$

1. Schritt

Im Kopf den Zähler durch den Nenner teilen.

2. Schritt

Den ganzzahligen Teil notieren. Hier 4.

3. Schritt

Den Rest schreibt man als Bruch mit dem ursprünglichen Nenner. Hier $\frac{5}{6}$. Wenn kein Rest bleibt, entsteht eine ganze Zahl.

Im Kopf:

$$29 : 6 = 4 \text{ Rest } 5$$

$$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$$

Übung zu 1.1

Wandeln Sie **ohne Verwendung des Taschenrechners** den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, bzw. die gemischte Zahl in einen unechten Bruch, um.

a $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ **b** $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ **c** $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ **d** $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$ **e** $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

f $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$ **g** $\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$ **h** $9\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ **i** $10\frac{3}{10} = \frac{103}{10}$ **j** $\frac{49}{15} = 3\frac{4}{15}$

1.2 Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

Verdeutlichen Sie sich das Beispiel und wenden Sie das Verfahren anschließend bei den Übungen an.

Beispiel: Erweitern von $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 20

1. Schritt

Wie oft passt der **gegebene Nenner** in den neuen, vorgegebenen Nenner?

2. Schritt

Zähler und **Nenner** mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Im Kopf:
Die 4 passt 5 mal
in die 20.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Übung zu 1.2

Erweitern Sie auf den angegebenen Nenner.

	Gegebene Brüche	Neuer Nenner	Erweiterter 1. Bruch	Erweiterter 2. Bruch
a	$\frac{5}{6}; \frac{3}{4}$	12	$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$	$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$
b	$\frac{5}{12}; \frac{3}{8}$	48	$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{20}{48}$	$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{18}{48}$
c	$\frac{3}{15}; \frac{6}{25}$	75	$\frac{3}{15} = \frac{3 \cdot 5}{15 \cdot 5} = \frac{15}{75}$	$\frac{6}{25} = \frac{6 \cdot 3}{25 \cdot 3} = \frac{18}{75}$

Beachten Sie, dass man 5 auch als $\frac{5}{1}$ darstellen kann.

d	$5; \frac{3}{8}$	16	$\frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 16}{1 \cdot 16} = \frac{80}{16}$	$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{6}{16}$
e	$4; \frac{2}{3}$	12	$\frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 12} = \frac{48}{12}$	$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$
f	$\frac{2}{5}; 3$	15	$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$	$\frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 15}{1 \cdot 15} = \frac{45}{15}$

... und jetzt mit drei Zahlen:

g	$\frac{3}{8}; \frac{1}{4}; \frac{7}{12}$	24	$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$	$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24}$	$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{14}{24}$
h	$\frac{4}{9}; \frac{5}{6}; \frac{7}{12}$	36	$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{16}{36}$	$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{30}{36}$	$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}$

1.3 Kürzen von Brüchen

Verdeutlichen Sie sich die Informationen zum Kürzen von Brüchen und bearbeiten Sie anschließend die Übungen. Lesen Sie dazu auch die Information zum Fachbegriff ggT.

Info: Fachbegriff ggT

Der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** von zwei oder mehreren Zahlen ist die **größte ganze Zahl**, durch die man alle diese Zahlen dividieren kann. Im folgenden Beispiel ist 12 der ggT von 24 und 36.

Beispiel: Kürzen des Bruchs $\frac{24}{36}$

1. Schritt

Den größten gemeinsamen Teiler (**ggT**) von den Zahlen im Nenner und im Zähler suchen.

2. Schritt

Zähler und Nenner durch diesen größten gemeinsamen Teiler teilen und Ergebnis notieren.

Im Kopf:
12 ist der **ggT**
von 24 und 36.

$$\frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$$

Schreibweise beim Kürzen:

Man darf beim Kürzen die Zahlen im Zähler und Nenner durchstreichen und das Ergebnis des Kürzens, hier der Division durch 12, jeweils als kleine Zahl über dem Zähler bzw. unter dem Nenner notieren.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3}$$

Tipps für das Kürzen:

Wenn man den **ggT** nicht „im Kopf hat“ oder nicht erkennt, einfach mit irgendeinem gemeinsamen Teiler anfangen und dann Schritt für Schritt kürzen.

$$\frac{\overset{12}{\cancel{24}}}{\underset{18}{\cancel{36}}} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{6}{\cancel{18}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{2}{3}$$

kürzen
mit 2

kürzen
mit 3

kürzen
mit 2

Einen Bruch so weit wie möglich kürzen:

Ein Bruch ist so weit wie möglich gekürzt, wenn der Zähler und der Nenner keine gemeinsamen Faktoren mehr haben. In diesem Beispiel ist $\frac{2}{3}$ der so weit wie möglich gekürzte Bruch.

$$\frac{\overset{4}{\cancel{24}}}{\underset{6}{\cancel{36}}} = \frac{4}{6}$$

Der Bruch wurde zwar mit 6 gekürzt, ist aber nicht so weit wie möglich gekürzt, da der Zähler und der Nenner noch den gemeinsamen Faktor 2 haben.

Übung zu 1.3

Kürzen Sie die angegebenen Brüche so weit wie möglich.

a $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ 1

b $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ 2

c $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 3

d $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 4

e $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ 5

f $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ 6

g $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ 7

h $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$ 8

i $\frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ 9

1.4 Dezimalzahlen und Brüche

Am Anfang des Kapitels haben Sie die Umrechnung eines Bruchs in eine Dezimalzahl kennengelernt.

Erinnerung

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{umschreiben}} 1 : 4 \xrightarrow{\text{ausrechnen}} 0,25$$

Nun lernen Sie, wie man eine Dezimalzahl in einen Bruch umwandeln kann. Ergänzen Sie in den Erklärungen zu den Zeilen ① bis ④ die Lücken im Text. Führen Sie jeweils mit der schriftlichen Division die Probe durch.

Beispiel 1

① $0,8 = \frac{0,8}{1}$

Probe: $4 : 5 = 0,8$

② $= \frac{0,8 \cdot 10}{1 \cdot 10}$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 40 \\ \hline 40 \\ 0 \end{array}$$

③ $= \frac{8}{10}$

④ $= \frac{4}{5}$

zu ① Dezimalzahl als Bruch ₁ mit dem Nenner 1₂ schreiben.

zu ② Den Bruch mit 10₃ erweitern.

zu ③ Die Zahlen im Zähler und Nenner getrennt voneinander multiplizieren₄.
Danach kürzen mit 2₅.

zu ④ Ergebnis notieren.

Beispiel 2

$$\textcircled{1} \quad 0,75 = \frac{0,75}{1}$$

$$\textcircled{2} \quad = \frac{0,75 \cdot 100}{1 \cdot 100}$$

$$\textcircled{3} \quad = \frac{\overset{3}{75}}{\underset{4}{100}}$$

$$\textcircled{4} \quad = \frac{3}{4}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 3 : 4 = 0,75 \\ 0 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

zu $\textcircled{1}$ Dezimalzahl als Bruch $\frac{\quad}{\quad}$, mit dem Nenner 1 schreiben.

zu $\textcircled{2}$ Den Bruch mit 100 erweitern $\frac{\quad}{\quad}$.

zu $\textcircled{3}$ Die Zahlen im Zähler und Nenner getrennt voneinander multiplizieren $\frac{\quad}{\quad}$.
Danach kürzen mit 25 .

zu $\textcircled{4}$ Ergebnis notieren.

Beispiel 3

$$\textcircled{1} \quad 0,375 = \frac{0,375}{1}$$

$$\textcircled{2} \quad = \frac{0,375 \cdot 1000}{1 \cdot 1000}$$

$$\textcircled{3} \quad = \frac{\overset{15}{375}}{\underset{40}{1000}} = \frac{\overset{3}{15}}{\underset{8}{40}}$$

$$\textcircled{4} \quad = \frac{3}{8}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 3 : 8 = 0,375 \\ 0 \\ \hline 30 \\ 24 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

zu $\textcircled{1}$ Dezimalzahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben.

zu $\textcircled{2}$ Den Bruch mit 1000 erweitern.

zu $\textcircled{3}$ Die Zahlen im Zähler und Nenner getrennt voneinander multiplizieren.
Danach mit 25 und dann mit 5 kürzen.

zu $\textcircled{4}$ Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4

Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie als Probe den Bruch mit Hilfe der schriftlichen Division wieder in eine Dezimalzahl umwandeln.

$$\mathbf{a} \quad 0,2 = \frac{0,2}{1} = \frac{0,2 \cdot 10}{1 \cdot 10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{b} \quad 0,4 = \frac{0,4}{1} = \frac{0,4 \cdot 10}{1 \cdot 10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbf{c} \quad 0,6 = \frac{3}{5}$$

$$\mathbf{d} \quad 0,25 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{e} \quad 0,08 = \frac{2}{25}$$

$$\mathbf{f} \quad 0,125 = \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{g} \quad 0,625 = \frac{5}{8}$$

Probe zu ...

$$\mathbf{a} \quad 1 : 5 = 0,2$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{b} \quad 2 : 5 = 0,4$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{c} \quad 3 : 5 = 0,6$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{d} \quad 1 : 4 = 0,25$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{e} \quad 2 : 25 = 0,08$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 20 \\ 0 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{f} \quad 1 : 8 = 0,125$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\mathbf{g} \quad 5 : 8 = 0,625$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 50 \\ 48 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

1.5 Hauptnenner, kurz HN, ermitteln

Verdeutlichen Sie sich die Schritte für das Ermitteln eines Hauptnenners am folgenden Beispiel und wenden Sie das Verfahren anschließend in den Übungen an. Lesen Sie dazu die Information zum Fachbegriff kgV.

Info: Fachbegriffe Hauptnenner und kgV

Der **Hauptnenner** ist der kleinste gemeinsame Nenner von zwei oder mehreren Brüchen. Man berechnet dazu das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** dieser Nenner. Im folgenden Beispiel ist 24 das kgV von 8 und 6.

Beispiel: Hauptnenner von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$

1. Schritt

Den Nenner mit der größeren Zahl auswählen.

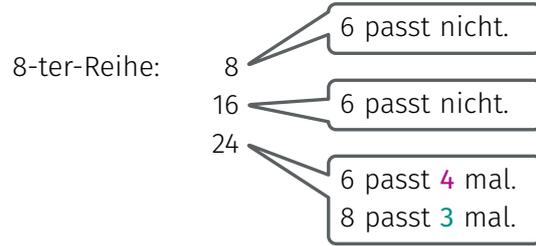
2. Schritt

Die Reihe dieser Zahl im Kopf hochzählen, bis die Zahl vom kleineren Nenner das erste Mal hineinpasst. Das ist der Hauptnenner bzw. das kgV. Merken, wie oft beide Nenner in den gefundenen Hauptnenner passen.

3. Schritt

Jeden Bruch so erweitern, dass er den **Hauptnenner** hat.

Größerer Nenner: 8



$$\frac{7}{8} = \frac{21}{24} \quad \text{und} \quad \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

Im Kopf: $\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3}$ Im Kopf: $\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}$

Übung zu 1.5

1 Bringen Sie die folgenden Brüche auf den Hauptnenner. Notieren Sie in der Sprechblase, wie Sie den Bruch erweitern und geben Sie das Endergebnis anschließend an.

<p>a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ Hauptnenner: 6</p>	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ <p>Im Kopf: $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}$</p>	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ <p>Im Kopf: $\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$</p>
<p>b $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ Hauptnenner: 4</p>	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ <p>Im Kopf: $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$</p>	$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ <p>4 ist schon der HN. Da ändert man nichts.</p>
<p>c $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ Hauptnenner: 10</p>	$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ <p>Im Kopf: $\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5}$</p>	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ <p>Im Kopf: $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2}$</p>
<p>d $\frac{2}{9}, \frac{5}{6}$ Hauptnenner: 18</p>	$\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$ <p>Im Kopf: $\frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2}$</p>	$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ <p>Im Kopf: $\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}$</p>

2 Hauptnenner bei drei Brüchen ermitteln.

a $\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ Hauptnenner: 24 $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$

b $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}$ Hauptnenner: 36 $\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$ $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$

c $\frac{4}{5}, 1\frac{2}{3}, \frac{9}{10}$ Hauptnenner: 30 $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ $1\frac{2}{3} = 1\frac{20}{30}$ $\frac{9}{10} = \frac{27}{30}$

Tipp

Bei einer gemischten Zahl muss man die ganze Zahl vor dem Bruch beim Suchen des Hauptnenners nicht beachten.

3 Ordnen Sie die Brüche nach ihrer Größe. Beginnen Sie beim kleinsten Bruch.

Tipp

Um Brüche nach ihrer Größe ordnen zu können, muss man sie in einem ersten Schritt auf den Hauptnenner bringen. Dann kann man sie nach der Größe der Zähler ordnen.

Beispiel: $\frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$

1. Schritt

Alle Brüche auf den Hauptnenner bringen.

$$\frac{16}{24}, \frac{22}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{12}{24}, \frac{9}{24}$$

2. Schritt

Auf den Hauptnenner gebrachte Brüche nach der Größe der Zähler sortieren.

$$\frac{9}{24} < \frac{12}{24} < \frac{16}{24} < \frac{18}{24} < \frac{20}{24} < \frac{22}{24}$$

3. Schritt

Die sortierten Brüche kürzen, um sie wieder auf den ursprünglichen Nenner zu bringen.

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{11}{12}$$

a $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$

1. Schritt

$$\frac{10}{30}, \frac{20}{30}, \frac{6}{30}, \frac{12}{30}, \frac{18}{30}, \frac{24}{30}, \frac{3}{30}, \frac{9}{30}, \frac{21}{30}, \frac{27}{30}$$

2. Schritt

$$\frac{3}{30} < \frac{6}{30} < \frac{9}{30} < \frac{10}{30} < \frac{12}{30} < \frac{18}{30} < \frac{20}{30} < \frac{21}{30} < \frac{24}{30} < \frac{27}{30}$$

3. Schritt

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$$

b $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}$

1. Schritt $\frac{12}{36}, \frac{24}{36}, \frac{9}{36}, \frac{27}{36}, \frac{6}{36}, \frac{30}{36}, \frac{8}{36}, \frac{16}{36}, \frac{20}{36}, \frac{28}{36}$

2. Schritt $\frac{6}{36} < \frac{8}{36} < \frac{9}{36} < \frac{12}{36} < \frac{16}{36} < \frac{20}{36} < \frac{24}{36} < \frac{27}{36} < \frac{28}{36} < \frac{30}{36}$

3. Schritt $\frac{1}{6} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$

1.6 Brüche addieren und subtrahieren

1.6.1 Echte Brüche mit gleichem Nenner addieren und subtrahieren

Verdeutlichen Sie sich das Beispiel. Ergänzen Sie die Erklärungen der Rechenschritte von Zeile ① nach ② sowie von Zeile ② nach ③ und den Merksatz.

① $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} - \frac{7}{9}$ ①→② Alle Brüche auf einen , Bruchstrich schreiben. Die Zähler der Brüche als Summe , bzw. Differenz notieren. Der Nenner wird nur ein mal notiert.

② $= \frac{2+4+5-7}{9}$

③ $= \frac{4}{9}$ ②→③ Alle Zahlen im Zähler , addieren bzw. subtrahieren. Der Nenner bleibt gleich.

Merke

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert bzw. subtrahiert, indem man nur die Zahlen im Zähler addiert bzw. subtrahiert. Der Nenner bleibt gleich .

Übung zu 1.6.1

Ergänzen Sie die Sprechblase. Addieren Sie die Brüche und stellen Sie das Ergebnis als unechten Bruch dar. Kürzen Sie, wenn möglich. Überprüfen Sie Ihre Rechnung mit dem Taschenrechner.

a $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7-3+5+1}{8} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$

Der Nenner bleibt gleich .

$$\text{b } \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{5}{9} + \frac{8}{9} = \frac{2+4-5+8}{9} = \frac{9}{9} = 1_{11}$$

$$\text{c } \frac{5}{12} - \frac{7}{12} - \frac{11}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5-7-11+1}{12} = \frac{-12}{12} = -1_{12}$$

$$\text{d } \frac{3}{25} - \frac{7}{25} - \frac{12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{3-7-12+1}{25} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}_{13}$$

1.6.2 Echte Brüche mit unterschiedlichem Nenner addieren und subtrahieren

Haben die zu addierenden Brüche unterschiedliche Nenner, kommt ein Schritt hinzu. Man muss die Brüche in einem ersten Schritt auf den gleichen Nenner bringen.

Beispiel

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \quad \text{Der HN ist } 12.$$

$$\textcircled{2} \quad = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$$

$$\textcircled{3} \quad = \frac{6-9-10}{12} \quad \text{erweitern}$$

$$\textcircled{4} \quad = -\frac{13}{12}$$

$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$ Alle Brüche auf den Hauptnenner 1 bringen.

$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ Brüche auf einen 2 gemeinsamen Bruchstrich schreiben.

$\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$ Die Zahlen im Zähler 3 subtrahieren. Der Nenner 4 bleibt gleich.

Übung zu 1.6.2

Berechnen Sie die Summen bzw. Differenzen.

Notieren Sie bei **a** und **b** das Erweitern zum Hauptnenner an den vorgesehenen Stellen schriftlich.

Ab Aufgabe **c** können Sie das Erweitern auch im Kopf durchführen.

$$\text{a } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}_5$$

$$\text{b } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{4}_6$$

$$\text{c } \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}_7$$

$$d \quad \frac{1}{15} - \frac{1}{25} + \frac{3}{5} = \frac{47}{75}$$

8

$$e \quad \frac{4}{5} - \frac{7}{15} - \frac{7}{10} = -\frac{11}{30}$$

9

$$f \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

10

$$g \quad \frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{7}{9}$$

11

$$h \quad \frac{2}{5} - \frac{5}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{3} = -\frac{19}{45}$$

12

$$i \quad \frac{5}{11} - \frac{5}{22} + \frac{5}{44} - \frac{5}{88} = \frac{25}{88}$$

13

$$j \quad \frac{4}{5} - \frac{4}{15} - \frac{4}{25} - \frac{4}{75} = \frac{8}{25}$$

14

$$k \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{1}{54} = \frac{7}{18}$$

15

1.6.3 Echte und unechte Brüche addieren

Beispiel

$$3\frac{2}{5} + 5\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + 2 = 3 + 5 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = 10 + \frac{15}{10} = 10 + 1\frac{5}{10} = 11\frac{1}{2}$$

1. Schritt

Alle ganzen Zahlen zusammenfassen.

2. Schritt

Brüche auf den Hauptnenner bringen.

3. Schritt

Ganze Zahlen und gleichnamige Brüche addieren.

4. Schritt

Bruch mit ganzer Zahl zusammenfassen. Dazu ggf. kürzen und/oder als gemischte Zahl schreiben.

Übung zu 1.6.3

Berechnen Sie und stellen Sie das Ergebnis als unechten Bruch dar. Kürzen Sie, wenn möglich. Überprüfen Sie Ihre Rechnung mit dem Taschenrechner.

$$a \quad \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + 4 = \boxed{} = \frac{50}{9}$$

$$b \quad 1\frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + 1 = \boxed{1} + \boxed{1} + \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} = 2 + \frac{15}{7} = 4\frac{1}{7} = \frac{29}{7}$$

2

$$\text{c } 2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 3 = 6 + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = 6 + \frac{6}{12} = \frac{13}{2}$$

Hier wurde gekürzt.

$$\text{d } 1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{7} + 1\frac{1}{14} = \frac{34}{7} = 4\frac{6}{7}$$

$$\text{e } 1\frac{1}{2} + 2\frac{4}{9} + 1\frac{15}{18} = \frac{52}{9} = 5\frac{7}{9}$$

Tipp

$$4 + \frac{16}{9} = 4 + 1\frac{7}{9}$$

1.6.4 Echte und unechte Brüche subtrahieren

Beim Subtrahieren von Brüchen ist es oft am günstigsten, wenn man alle ganzen und gemischten Zahlen als Bruch darstellt und dann alle Zahlen im Zähler zusammenfasst.

Beispiel 1

$$1\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} - 3 = \frac{7}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} - \frac{15}{5} = \frac{7+4+5-15}{5} = \frac{1}{5}$$

Tipp 1

Gemischte Zahlen als unechte Brüche schreiben.

Tipp 2

Wenn ganze Zahlen und Brüche subtrahiert werden, ist es meistens günstig, die ganzen Zahlen als unechte Brüche zu schreiben. Hier 3 als $\frac{15}{5}$.

Beispiel 2

$$2\frac{4}{9} - \frac{5}{6} - 1 = \frac{22}{9} - \frac{5}{6} - 1 = \frac{44}{18} - \frac{15}{18} - \frac{18}{18} = \frac{44-15-18}{18} = \frac{11}{18}$$

Tipp 3

Bei unterschiedlichen Nennern alle gemischten Zahlen, echte Brüche und ganze Zahlen auf den Hauptnenner bringen.

Übung zu 1.6.4

Berechnen Sie und stellen Sie das Ergebnis als unechten Bruch dar. Kürzen Sie, wenn möglich. Überprüfen Sie Ihre Rechnung mit dem Taschenrechner.

$$\text{a } 1\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{b } 2\frac{3}{4} - 5 - 1\frac{1}{6} + 3\frac{1}{2} = \frac{11}{4} - \frac{5}{1} - \frac{7}{6} + \frac{7}{2} = \frac{33}{12} - \frac{60}{12} - \frac{14}{12} + \frac{42}{12} = \frac{1}{12}$$