Mathematik
FOS Bayern Jahrgangsstufe 11
Ausbildungsrichtung Technik

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 87461

Autor des Buches
„Mathematik FOS Bayern Jahrgangsstufe 11, Ausbildungsrichtung Technik“

Patrick Drössler, Amberg

Lektorat:
Josef Dillinger

Bildentwürfe: Der Autor

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2020
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8746-1

http://www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald
unter Verwendung einer Grafik von © Senoldo – stock.adobe.com
Layout und Satz: Daniela Schreuer, 78256 Steißlingen
Druck: RCOM Print GmbH, 97222 Würzburg-Rimpar

Vorwort zu „Mathematik FOS Bayern Jahrgangsstufe 11, Ausbildungsrichtung Technik“

Seit dem Schuljahr 2017/18 gilt an den beruflichen Oberschulen in Bayern der LehrplanPLUS. Mit der Änderung der Fachlehrpläne geht eine Änderung der didaktischen Konzeption des Mathematikunterrichts einher, der im vorliegenden Lehr- und Übungsbuch Rechnung getragen wurde.

Inhalte
Das vorliegende Werk besteht inhaltlich aus den drei Teilen „Ganzrationale Funktionen“, „Differenzialrechnung“ und „Lineare Algebra und analytische Geometrie“. Die mit Asterisken (*) versehenen Inhalte und Aufgaben stellen Ergänzungen dar und können ohne Bedenken weggelassen werden.

Konzept
Nie war es so einfach, mathematische Inhalte durch den Einsatz elektronischer Medien unterstützend zu vermitteln. Nutzen Sie die (kostenlosen) Programme *GeoGebra* und *wxMaxima*, die plattformunabhängig auf jedem Rechner betrieben werden können (zum Einsatz der portablen Versionen der Software ist keine Installation notwendig). Das vorliegende Lehrbuch „lebt“ davon, dass diese Programme sinnvoll eingesetzt werden. Insbesondere bei der Einführung in die Differenzialrechnung kann damit auf langwierige Berechnungen verzichtet werden, die vielen Schülerinnen und Schülern ohnehin den Blick auf das Wesentliche (die Bedeutung der Ableitung einer Funktion) versperrt haben.

Zum Arbeiten mit dem Buch
Die Anfangsphase der beruflichen Oberschule ist erfahrungsgemäß geprägt von einer sehr heterogenen Schülerschaft. Aus diesem Grund sind die beiden Themen „Lineare Funktionen“ und „Quadratische Funktionen“ sehr ausführlich gehalten. Dennoch kann nicht erwartet werden, sich ohne jegliche Vorkenntnisse aus der Mittelstufe einarbeiten zu können. Die ersten beiden Abschnitte dieses Lehrbuches sind als Zusammenfassung und Ergänzung der Mittelstufeninhalte gedacht.

Beim Lernen mit diesem Buch können die folgenden Tipps helfen:

- **Kopiervorlagen**
  Einige Seiten des Buches sind als Kopiervorlage freigegeben. Sie dienen der Bereicherung des Unterrichts und unterstützen den Methodenwechsel.

- **Beispiele**
  „Die einzige überzeugende Lehre ist die des Beispiels.“ (Romain Rolland)
  Ausführlich durchgerechnete Beispiele führen die Schüler systematisch in die Thematik ein und bereiten die Grundlage, Aufgaben und Problemstellungen in oberstufengerechten Schwierigkeitsgraden zu bewältigen. Zu jedem Aufgabenbeispiel sollten Papier und Bleistift bereit gehalten werden!

- **Aufgaben**
  Beachten Sie die Randspalte mit den Verweisen zu den Aufgaben, die einen Lerninhalt sinnvoll abrunden. Dort finden Sie auch viele praktische Anwendungen.

- **Tests**
  Zusätzlich zu den Aufgaben finden sich im Buch einige Tests, die unbedingt innerhalb der vorgesehenen Zeitvorgabe bearbeitet werden sollten, um zu einer realistischen Selbsteinschätzung des eigenen Könnens zu gelangen. Da die Abschlussprüfung aus einem hilfsmittelfreien Teil bestehen wird, sollte zudem – wenn gefordert – auf Taschenrechner und Formelsammlung verzichtet werden.

Förderunterricht
Neben der Vertiefung der eigentlichen Unterrichtsinhalte kann mit dem Anhang dieses Buches unterstützend sowohl für schwache als auch starke Schülerinnen und Schüler der Förderunterricht gestaltet werden.
Ich wünsche Ihnen viel Freude bei der Arbeit und zögern Sie bitte nicht, Anmerkungen, Kritik (oder Lob) an den Verlag zu richten!

Patrick Drössler — Amberg, im Herbst 2020

Inhaltsverzeichnis

I Ganzrationale Funktionen

1 Lineare Funktionen und Gleichungssysteme

Arbeitsblatt lineare Funktionen

Mit linearen Funktionen sind Sie bereits aus der Mittelstufe vertraut. Wir beginnen das Kapitel mit einem Arbeitsblatt, dessen Bearbeitung Ihnen nicht schwer fallen sollte.

Erinnerung: Steigungsdreieck (Abb. 1)

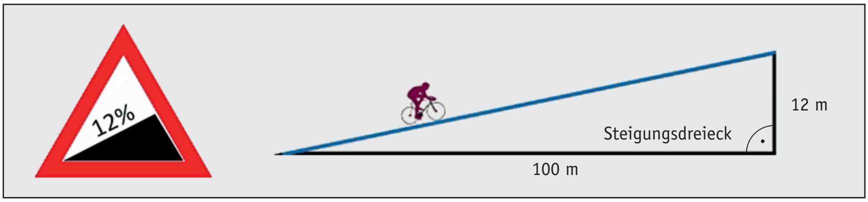

Abb. 1 Steigung und Steigungsdreieck

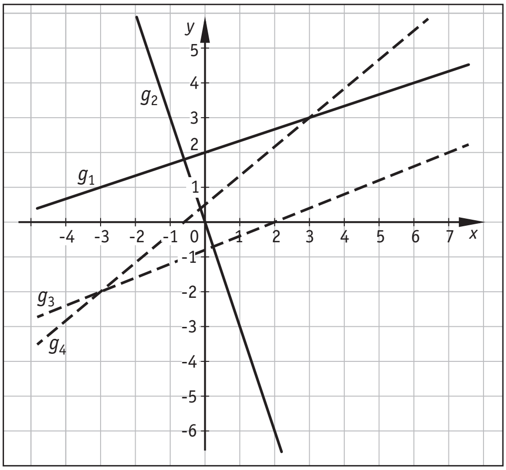

Abb. 2 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4

Geradengleichungen
Ermitteln Sie Gleichungen der Geraden g_1 bis g_4 in Abb. 2!

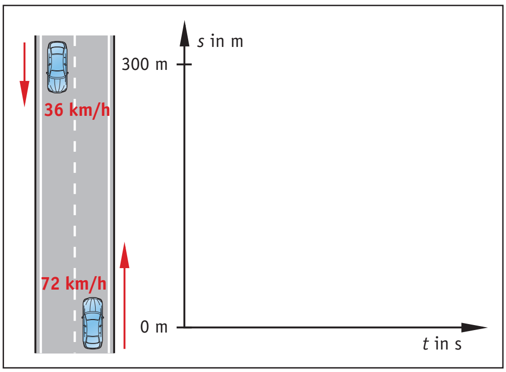

Abb. 3 Begegnungsvorgang

Zeit-Ort-Diagramm
In Abb. 3 ist ein Begegnungsvorgang dargestellt. Formulieren Sie die Aufgabe selbst!

Lösungsvorschlag

Steigungsdreieck (vgl. Kap. 1.2)

$$m = \frac{\text{Hochwert}}{\text{Rechtswert}} = \frac{12\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0{,}12 \mathrel{\hat{=}} 12\,\%$$

Geradengleichungen (vgl. Kap. 1.2)
- geeignete Steigungsdreiecke eintragen und Steigung ablesen
- y-Achsenabschnitt ablesen (falls möglich) oder berechnen
- alternativ: Punkt-Richtungsform der Gerade verwenden (vgl. Kasten auf S. 18)

Zeit-Ort-Diagramm
Eine Aufgabe könnte lauten, wann ($t = ?$) und wo ($s = ?$) sich die Autos treffen.

- Zunächst ist es hilfreich, die Geschwindigkeiten in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ umzurechnen:
  $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72\,000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36\,000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Lässt man das „untere“ Auto mit „positiver Geschwindigkeit“ im Ursprung starten, dann hat das „obere“ Auto den y-Achsenabschnitt 300 m und „negative Geschwindigkeit“, also gilt
  $s_1(t) = +20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ und $s_2(t) = -10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 300\,\text{m}$.

Wenn beide Autos sich treffen, befinden sie sich zur selben Zeit am selben Ort, also

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= s_2(t) && \text{(gleichsetzen)}\\
+20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t &= -10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 300\,\text{m} && \Big|\, +10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t\\
30\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t &= 300\,\text{m} && \Big|\, :30\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\\
t &= 10\,\text{s}\\
\Rightarrow s &= +20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = 200\,\text{m}
\end{aligned}$$

Die Autos treffen sich also nach 10 s. Das „untere“ Auto hat dann 200 m zurückgelegt, das „obere“ 100 m.

1.1 Einführungsbeispiel

Abbrennen einer Kerze

Eine 12 cm lange Kerze brennt pro Stunde um 1,5 cm herunter.
An diesem Beispiel werden die folgenden Begriffe aus der Mittelstufe wiederholt:

- abhängige und unabhängige Variable
- Wertetabelle
- Funktionsgraph
- Funktionsterm und -gleichung
- Nullstelle und y-Achsenabschnitt
- Definitions- und Wertemenge

Variablen
Wir führen t für die Zeit („time“) und L für die Länge („length“) ein.
Da die Länge von der Zeit abhängt, ist L die **abhängige** Variable, t die **unabhängige** Variable.

Wertetabelle
Die zeitliche Änderung der Länge der Kerze kann entweder in einer Tabelle (Tab. 1) oder in einem Diagramm (Abb. 1) erfasst werden.

t in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L in cm	12	10,5	9,0	7,5	6,0	4,5	3,0	1,5	0

Tab. 1 zeitliche Abhängigkeit der Kerzenlänge

Funktionsgraph (Abb. 1)
Die unabhängige Variable wird auf der Abszisse (x-Achse), die abhängige Variable auf der Ordinate (y-Achse) angetragen.

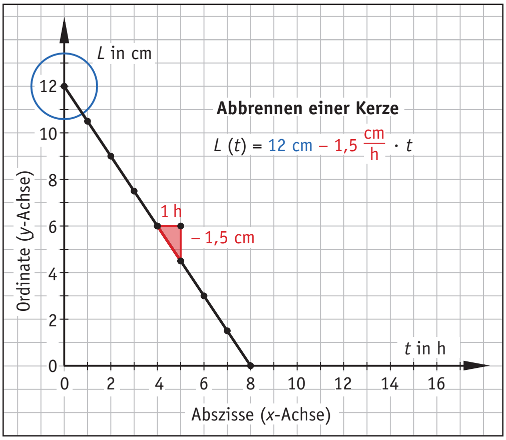

Abb. 1 Funktionsgraph und -gleichung (blau: y-Achsenabschnitt; rot: Steigung) zu Tab. 1

Funktionsterm
Welche Länge hat die Kerze nach einer bestimmten Zeit?

- Nach 1 h gilt $L = 12\,\text{cm} - 1{,}5\,\text{cm}$,
- nach 2 h gilt $L = 12\,\text{cm} - 2 \cdot 1{,}5\,\text{cm}$,

  ⋮
- zum Zeitpunkt t gilt $L(t) = 12\,\text{cm} - t \cdot 1{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}$.

Dabei bedeutet $L(t)$ (lies: „L von t“) die Länge der Kerze zum Zeitpunkt t.

Beispiel
Nach 45 min, also $t = \frac{3}{4}\,\text{h} = 0{,}75\,\text{h}$, ist

$$L\,(0{,}75\,\text{h}) = 12\,\text{cm} - 0{,}75\,\cancel{\text{h}} \cdot 1{,}5\,\frac{\text{cm}}{\cancel{\text{h}}} = 12\,\text{cm} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}\,\text{cm} = 10\,\frac{7}{8}\,\text{cm} \approx 10{,}9\,\text{cm}.$$

***y*-Achsenabschnitt:** Den y-Achsenabschnitt erhält man für den x-Wert null.
Hier: $L(0) = 12 - 1{,}5 \cdot 0 = 12$ (Zentimeter).

Nullstelle: Als Nullstelle wird derjenige x-Wert bezeichnet, für den der y-Wert null wird.

Hier: $L(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 1{,}5 \cdot t = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{12}{1{,}5} = 8$ (Stunden).

Definitionsmenge: Damit wird die Menge aller zulässigen Einsetzungen („x-Werte“) bezeichnet.

Da die Kerze nach 8 h heruntergebrannt ist, sind für t nur Werte zwischen 0 und 8 möglich (Grenzen jeweils eingeschlossen). Diese Werte können als Intervall oder in der Mengenschreibweise (vgl. auch Tab. 1) angegeben werden:

$D = [0; 8]$ („abgeschlossenes Intervall von 0 bis 8“)

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 8\}$ („Menge aller x mit der Eigenschaft …“)

Dabei steht das Symbol $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen. Weitere wichtige Zahlenmengen können Tab. 1 entnommen werden und sind aus der Mittelstufe bekannt.

Wertemenge: Dabei handelt es sich um die Menge aller möglichen Funktionswerte („y-Werte“).

Da die Kerze anfangs 12 cm lang ist und auf die Länge 0 cm herunterbrennt, ist die Wertemenge $W = [0; 12] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 12\}$.

Symbol	Bezeichnung	Elemente
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Z}$	… der ganzen Zahlen	…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Q}$	… rationalen Zahlen (Quotienten)	$\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$; z. B. $\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{10}{5} = 2, \ldots$
$\mathbb{R}$	… reellen Zahlen	alle aus $\mathbb{Q}$, ergänzt um die irrationalen Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}, \pi, \log_2(3), \sin(8°), \ldots$
$\mathbb{R}^+$	… positiven reellen Zahlen	$]0; +\infty[$
$\mathbb{R}_0^+$	… positiven reellen Zahlen mit null	$[0; +\infty[$
$\mathbb{R}^-$	… negativen reellen Zahlen	$]-\infty; 0[$
$\mathbb{R}_0^-$	… negativen reellen Zahlen mit null	$]-\infty; 0]$
$[a, b]$	geschlossenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b, einschließlich a und b
$]a, b[$	offenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b, a und b ausgeschlossen
$[a, b[$	halboffenes Intervall (rechts offen)	alle reellen Zahlen zwischen a und b, a eingeschlossen, b ausgeschlossen
$]a, b]$	halboffenes Intervall (links offen)	alle reellen Zahlen zwischen a und b, a ausgeschlossen, b eingeschlossen

Tab. 1 in der Mathematik häufig verwendete Zahlenmengen und Intervalle

Merke: Als **Funktion** wird in der Mathematik eine Vorschrift bezeichnet, die einem x-Wert eindeutig einen y-Wert zuordnet. Die Menge aller **zulässigen** x-Werte wird **Definitionsmenge D** genannt, die Menge aller **möglichen** y-Werte **Wertemenge W**. Funktionen können durch **Wertetabellen** ($x \mapsto y$) und/oder **Graphen** anschaulich dargestellt werden. Eine algebraische Beschreibung erfolgt durch eine **Funktionsgleichung** $y = f(x)$.

Auf die Bedingung der Eindeutigkeit gehen wir an dieser Stelle nicht weiter ein, sondern verweisen auf Grundwissen aus der Mittelstufe. Außerdem gibt es Funktionen, die **nicht** durch Gleichungen beschrieben werden können (z. B. Fieberkurve).

1.2 Geradengleichung und Steigungsdreieck

Im Einführungsbeispiel (Kap. 1.1) war $L(t) = 12\,\text{cm} - 1{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{h}} \cdot t$ die Länge der Kerze abhängig von der Zeit t. Bei Verallgemeinerung des Problems wird t durch x (Abszisse) und L durch y (Ordinate) ersetzt. Unterdrücken der Einheiten führt dann zu

$$y(x) = 12 - 1{,}5 \cdot x = -1{,}5 \cdot x + 12 \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{12}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Geradengleichung („Steigung mal x plus y-Achsenabschnitt"):

$$y = m \cdot x + t;\; x \in \mathbb{R}.$$

Berechnung der Steigung

$$m = \frac{\text{Hochwert}}{\text{Rechtswert}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel

Steigung der Gerade durch die Punkte A(–5|1) und B(0|3) (vgl. Abb. 1):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{0-(-5)} = \frac{2}{5}.$$

Da Punkt B die x-Koordinate null hat, ist der y-Achsenabschnitt $t = y_B = 3$, also gilt

$$y(x) = \frac{2}{5} \cdot x + 3.$$

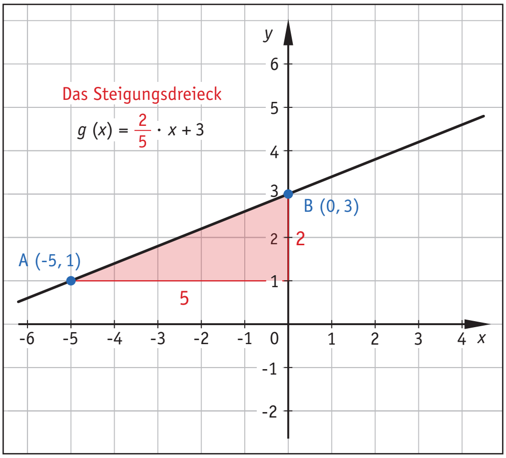

Abb. 1 Steigungsdreieck

⚠ **Achtung:** Der y-Achsenabschnitt muss oft erst berechnet werden!

Beispiel

Gleichung der Geraden $g = AB$ durch die Punkte A(2|3) und B(5|7)

- Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$ („Hochwert durch Rechtswert")
- Zwischenergebnis: $g(x) = \frac{4}{3}x + t$
- A und B liegen auf g, also erfüllen die Koordinaten die Geradengleichung, d. h.

$$y = \frac{4}{3}x + t \xrightarrow{A \in g} \underbrace{3}_{y_A} = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{2}_{x_A} + t \Leftrightarrow 3 = \frac{8}{3} + t \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

- Lösung: $g(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ (Geradengleichung)

Merke: Gerade zeichnen in zwei Schritten:

1. Markiere den y-Achsenabschnitt t.
2. Zeichne dort ein *geeignetes* Steigungsdreieck. Hierfür sollte der Steigungswert (Bruch!) ggf. erweitert werden, um die Zeichengenauigkeit zu erhöhen.

Beispiel

Die Gerade mit $y = -1{,}2 \cdot x + 2$ soll in ein Koordinatensystem eingetragen werden.

1. Ablesen aus der Funktionsgleichung liefert $t = +2$ als y-Achsenabschnitt …
2. … und Steigung $m = -1{,}2 = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$ (negative Steigung ≙ Gefälle).

Die Gerade zeigt Abb. 1.

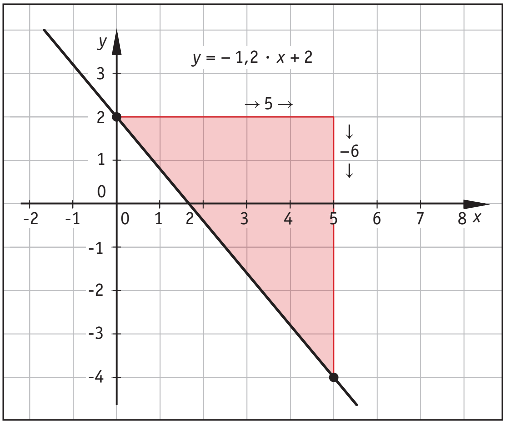

Abb. 1 Negative Steigung

Besondere Geraden (Abb. 2)

- $y = x$ ist die Winkelhalbierende (WH) des I. und III. Quadranten,
- $y = -x$ ist die WH des II. und IV. Quadranten,
- $y = a$ ist Parallele zur x-Achse:
  - für $a > 0$ oberhalb der x-Achse,
  - für $a < 0$ unterhalb der x-Achse.
- $x = a$ ist Parallele zur y-Achse:
  - für $a > 0$ rechts von der y-Achse,
  - für $a < 0$ links von der y-Achse.

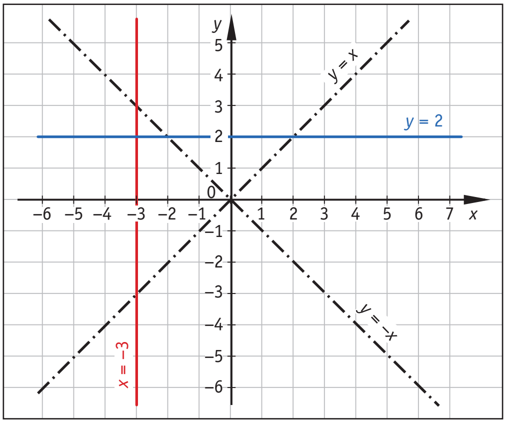

Abb. 2 Besondere Geraden

Sonderfälle

- $y = 0$ ist die Gleichung der x-Achse,
- $x = 0$ ist die Gleichung der y-Achse.

Quadranten

Das Koordinatensystem wird in vier Quadranten eingeteilt, die Nummerierung beginnt „rechts oben“ (x, y beide positiv) und erfolgt mathematisch positiv, also gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 3).

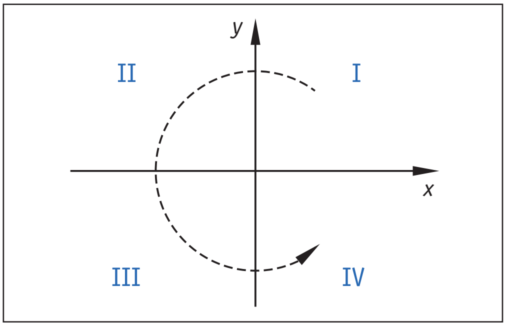

Abb. 3 Die vier Quadranten des Koordinatensystems werden gegen den UZS durchnummeriert

⊗ **Aufgaben S. 36**

1.3 Lagebeziehung von Geraden

Parallele Geraden

... haben offensichtlich die gleiche Steigung:

$$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Zueinander senkrechte Geraden

In Abb. 1 gilt für die Steigungen m_1 und m_2 zweier zueinander senkrechten Geraden:

$$m_1 = \frac{1}{3} \wedge m_2 = -3$$
$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.$$

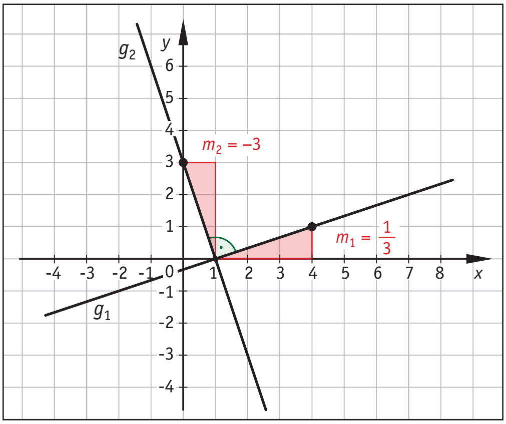

Abb. 1 Zueinander senkrechte Geraden ($g_1 \perp g_2$)

Das Beispiel lässt sich verallgemeinern (Drehung des Steigungsdreiecks um 90°, wobei Δx und Δy vertauscht werden und Δy sein Vorzeichen ändert).

Senkrechte Geraden: Zwei Geraden g_1 und g_2 sind genau dann orthogonal (senkrecht), wenn das Produkt ihrer Steigungen (m_1 und m_2) den Wert –1 hat, also

$$g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Schnittpunkt zweier Geraden

Bei sich schneidenden Geraden kann der Schnittpunkt nicht nur abgelesen, sondern auch rechnerisch bestimmt werden. Das Verfahren ist aus der Mittelstufe bekannt.

Beispiel

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden $g_1(x) = \frac{1}{3}x + 1$ und $g_2(x) = -x + 4$.

1. **Gleichsetzen:**

$$g_1 \cap g_2: \quad \frac{1}{3}x + 1 = -x + 4 \quad \Big| + x - 1$$
$$\frac{4}{3}x = 3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{4} \quad \text{(Kehrbruch)}$$
$$x = \frac{9}{4}$$

2. **Einsetzen** (z. B. in g_2, da einfacher):

$$y = g_2\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} + 4 = -\frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{7}{4}$$

3. **Probe** (optional):

$$g_1\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} \checkmark$$

Lösung: Schnittpunkt $S\left(\frac{9}{4}\middle|\frac{7}{4}\right) = (2{,}25|1{,}75)$, in Übereinstimmung mit Abb. 2!

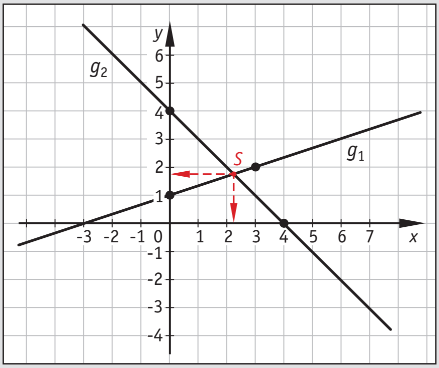

Abb. 2 Schnitt $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ zweier Geraden ($\cap$ ist Schnittmenge, $\cup$ wäre Vereinigungsmenge; Eselsbrücke: Sch$\cap$ittmenge, $\cup$ereinigungsmenge)

Schnittpunktberechnung zweier Geraden

1. Beide Geradengleichungen gleichsetzen und nach x auflösen.
2. Den x-Wert in eine der Geradengleichungen einsetzen $\rightsquigarrow$ erhalte y-Wert.
3. Probe (optional): Die Koordinaten des Schnittpunktes müssen auch die andere Geradengleichung erfüllen!

⊳ **Aufgaben S. 36**

Die Berechnung der Schnittkoordinaten ist gleichbedeutend mit dem Lösen einer linearen Gleichung. Hierbei können folgende Fälle auftreten.

Allgemeine lineare Gleichung

$$a \cdot x + b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{a}, \text{ falls } a \neq 0.$$

Falls $a = 0$, dann folgt $0 \cdot x + b = 0$. Und nun:

✓ Falls $b = 0$, dann ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, d. h. die Gleichung ist allgemeingültig (sie hat unendlich viele Lösungen).

Geometrisch: Die zugehörigen Geraden sind identisch.

✓ Falls $b \neq 0$, dann ist $\mathbb{L} = \{\ \}$ (leere Menge), d. h. die Gleichung ist unlösbar.

Geometrisch: Die zugehörigen Geraden sind echt parallel.[1]

Fallunterscheidung

Die durchgeführte Überlegung wird als Fallunterscheidung bezeichnet: Abhängig vom Wert der Variablen (a und/oder b) ergeben sich unterschiedliche Lösungsmengen. Die Variablen, die *nicht* Lösungsvariablen sind, werden auch als Parameter bezeichnet (vgl. Kap. 1.5).

Beispiel

Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2}tx - t = 0$ nach x auf.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}tx - t &= 0 && \mid + t \\ \tfrac{1}{2}tx &= t && \mid \cdot 2;\ : t \quad (t \neq 0!) \\ x &= 2, && \text{falls } t \neq 0 \end{aligned}$$

Falls $t = 0$ ist, dann erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x - 0 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0 \text{ (allgemeingültig)} \;\Rightarrow\; \mathbb{L} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ergebnis: } \mathbb{L} = \begin{cases} \{2\}, & \text{falls } t \neq 0 \\ \mathbb{R}, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

⊳ **Aufgaben S. 243**

[1] Der Zusatz „echt“ parallel ist notwendig, denn „identisch“ bedeutet in gewisser Weise ebenfalls „parallel“ (Abstand null).

1.4 Lineare Ungleichungen

Aus der TIMSS-Studie[2]

Gemeinsame Kasse in Japan: Zwei Brüder A und B zahlen in eine gemeinsame Kasse ein. A besitzt anfangs 180 Yen, B nur 110 Yen. Dafür zahlt B wöchentlich nur 5 Yen ein, A hingegen 10 Yen. Ab wann hat A weniger Geld als B?

Lösen durch Probieren

Am einfachsten lässt sich die Frage mit Hilfe einer Tabelle (Tab. 1) lösen. Dabei stellt man schnell fest, dass die einfachste Lösung nicht unbedingt die effizienteste ist. Also ist es sinnvoll, ein mathematisches Verfahren zur Lösung des Problems zu entwickeln.

Zeit	A	B
0 (zu Beginn)	180 Yen	110 Yen
nach 1 Woche	170	105
nach 2 Wochen	160	100
3 Wochen	150	95
4	140	90
⋮	⋮	⋮
t	$180 - 10 \cdot t$	$110 - 5 \cdot t$

Tab. 1 Tabelle zur „gemeinsamen Kasse“

Lösen durch Rechnen

Wie in Tab. 1 ersichtlich (letzte Zeile), ist die Ungleichung $180 - 10 \cdot t < 110 - 5 \cdot t$ (Zeit t in Wochen) zu lösen. Grundmenge ist $G = \mathbb{N}$ (nur positive ganze Wochen). Aus der Mittelstufe ist das folgende Lösungsverfahren bekannt:

Lösungsverfahren für lineare Ungleichungen

Löse wie eine Gleichung, aber beachte, dass bei Multiplikation oder Division durch eine negative Zahl das Ungleichheitszeichen (Tab. 2) umgedreht werden muss!

Beispiel

$$-2x - 3 < 1 \quad | + 3$$
$$-2x < 4 \quad | : (-2)$$
$$x > -2$$

oder $L =]-2; +\infty[$ in Intervallschreibweise.

Symbol	Bedeutung
$<$	kleiner
$>$	größer
$\leq$	kleiner oder gleich
$\geq$	größer oder gleich

Tab. 2 Ungleichheitszeichen

Graphische Lösung

Bruder A besitzt anfangs 180 Yen, Bruder B 110 Yen. Dies sind die y-Achsenabschnitte zweier Geraden. Das eingangs gestellte Problem lässt sich auch so formulieren: „Ab welchem Wert von t verläuft Gerade A **unterhalb** von Gerade B?“ – Denn:

$$\underbrace{180 - 10 \cdot t}_{y_A} \underbrace{\quad<\quad}_{\text{unterhalb}} \underbrace{110 - 5 \cdot t}_{y_B}.$$

Aus Abb. 1 entnimmt man $t > 14$, also hat A nach 15 Wochen weniger als B!

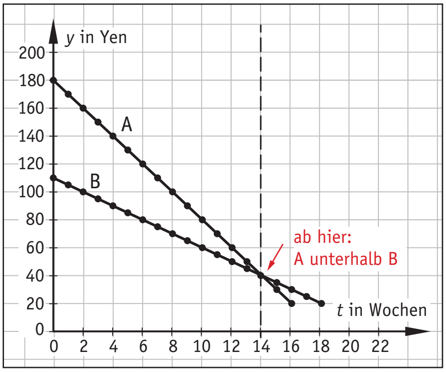

Abb. 1 Graphische Lösung zur „gemeinsamen Kasse“

⊙ **Aufgaben S. 245**

[2] **T**rends in **I**nternational **M**athematics and **S**cience **S**tudy, eine Studie, die im regelmäßigen Turnus die Leistungen von Schülern international vergleicht.

1.5 Geradenscharen

Wir betrachten einige einführende Aufgaben, die Sie mit Ihrem bereits erworbenen Wissen und ein wenig Allgemeinbildung lösen können.

Geradenbüschel

Abb. 1 gibt den Bewegungsablauf dreier Fahrzeuge wieder.

1. Ordnen Sie die Graphen den Verkehrsteilnehmern Auto, Mofa und Fahrrad zu (mit Begründung).
2. Stellen Sie die Gleichungen $s = s(t)$ der drei Geraden auf.
3. Tragen Sie die Bewegung eines Läufers $\left(12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ mit ein.

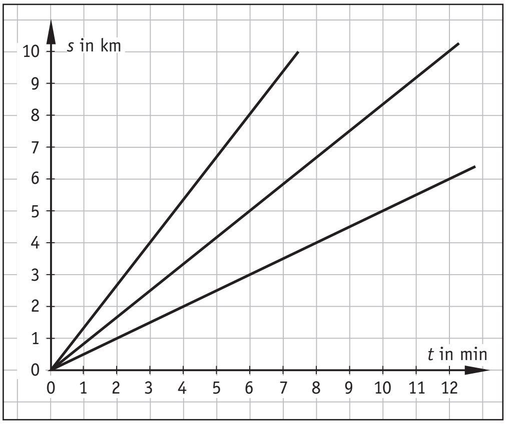

Abb. 1 Geradenbüschel

Parallelenschar

Beschreiben Sie den Bewegungsablauf der drei Verkehrsteilnehmer in Abb. 2 und stellen Sie die Geradengleichungen auf.

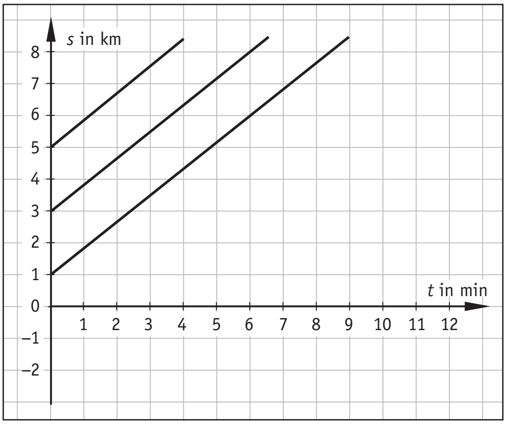

Abb. 2 Parallelenschar

Und noch ein Büschel ...?

Bestimmen Sie die „Steigungen" der verwendeten Stoffe!

Geben Sie deren pysikalische Bedeutung an.

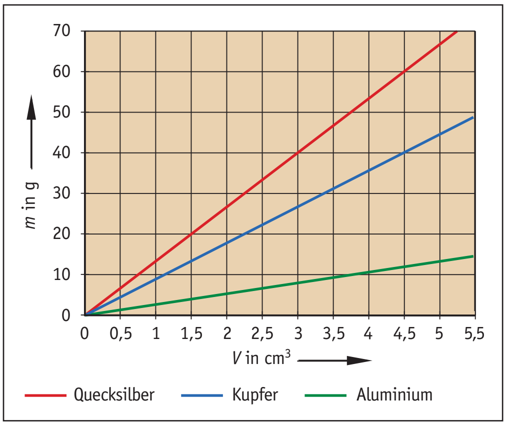

Abb. 3 Geradenbüschel

Lösungshinweise

Abb. 1, S. 16

1. Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung im $s(t)$-Diagramm, also „Auto, Mofa, Fahrrad" (von oben nach unten).
2. $s_A(t) = \frac{4}{3}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t$ fürs Auto

   $s_M(t) = \frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t$ fürs Mofa

   $s_F(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t$ fürs Fahrrad

   $s(t) = v \cdot t$ (v für *velocity*, Geschwindigkeit)
3. Eine Umrechnung in „passende" Einheiten ergibt

   $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{12}{60}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{1}{5}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{2}{10}\,\frac{\text{km}}{\text{min}},$

   Der Läufer hat also eine Geschwindigkeit von 2 km in 10 min (Ursprungs-Halbgerade durch den Punkt $(10|2)$).

Abb. 2, S. 16

Alle Fahrzeuge haben dieselbe Geschwindigkeit $\left(\text{nämlich } v = \frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \text{ bzw. } 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, starten jedoch an unterschiedlichen Positionen.

Die Geradengleichungen lauten

$s_5(t) = \frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 5\,\text{km}$ („oben")

$s_3(t) = \frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 3\,\text{km}$ („Mitte")

$s_1(t) = \frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t + 1\,\text{km}$ („unten")

Allgemein in physikalischer Schreibweise: $s(t) = v \cdot t + x_0$ mit x_0 = Startposition.

Abb. 3, S. 16

Die „Steigung" hat die Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (Hochwert geteilt durch Rechtswert), deswegen handelt es sich um die Dichte ρ (lies: „rho") des Materials.

Ablesen aus dem Diagramm ergibt:

$$\rho_{\text{Al}} = \frac{13\,\text{g}}{5\,\text{cm}^3} = 2{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = \frac{40\,\text{g}}{4{,}5\,\text{cm}^3} \approx 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = \frac{67\,\text{g}}{5\,\text{cm}^3} = 13{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die Werte können mit einer Formelsammlung verglichen werden …

Beispiele für Geradenscharen

Zur Beschreibung von Geradenscharen wird neben x und y eine weitere Variable benötigt. Diese Variable wird als Parameter[3] bezeichnet.

Geradenbüschel (Abb. 1 bis Abb. 3)

- … mit Büschelpunkt im Ursprung: $y = m \cdot x$; Steigung $m \in \mathbb{R}$ ist Parameter.
- … mit Büschelpunkt auf der y-Achse, z. B. $y = m \cdot x + 2$ ($m \in \mathbb{R}$ ist Parameter)
- … mit Büschelpunkt beliebig, z. B. B(2|1) $\Rightarrow$ $y = m \cdot (x - 2) + 1$, $m \in \mathbb{R}$

Allgemein gilt:

Punkt-Steigungsform der Geraden g:

$$y = m \cdot (x - x_P) + y_P, \quad P\,(x_P \,|\, y_P) \in g.$$

Parallelenschar (Abb. 4)

… z. B. mit Steigung $m = \frac{3}{2}$: Gleichung $y = \frac{3}{2}\,x + t$ mit y-Achsenabschnitt $t \in \mathbb{R}$ als Parameter

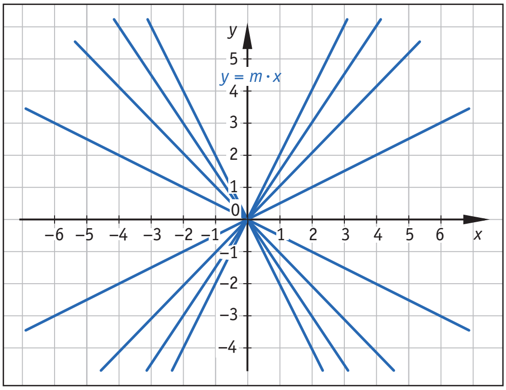

Abb. 1 Büschel mit Büschelpunkt (0|0)

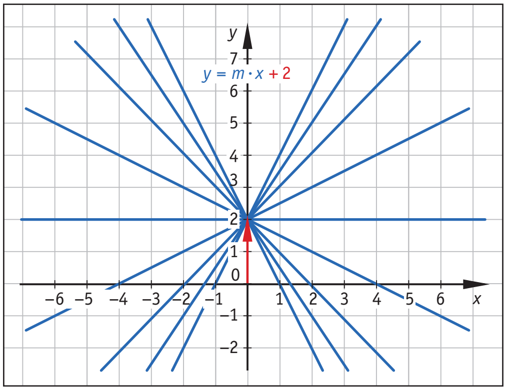

Abb. 2 Büschel mit Büschelpunkt (0|2)

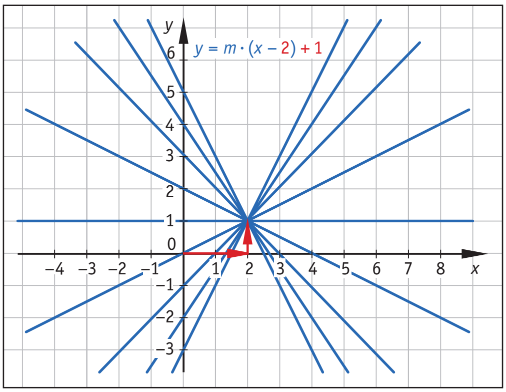

Abb. 3 Büschel mit Büschelpunkt (2|1)

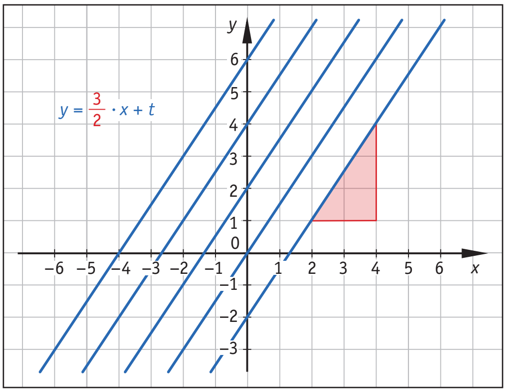

Abb. 4 Parallelenschar mit Steigung $\frac{3}{2}$

[3] Definition des Begriffs laut Duden: „in Funktionen und Gleichungen neben der eigentlichen Variablen auftretende, entweder unbestimmt oder konstant gehaltene Größe“

Aufgabenbeispiel zu „Geradenscharen“

Das Diagramm in Abb. 1 zeigt das Ausdehnungsverhalten dreier Gase bei Normaldruck (Volumenänderung bei Erwärmung).

1. Zeigen Sie, dass alle drei Geraden dieselbe Nullstelle haben.
2. Stellen Sie eine Gleichung des dargestellten Büschels auf.

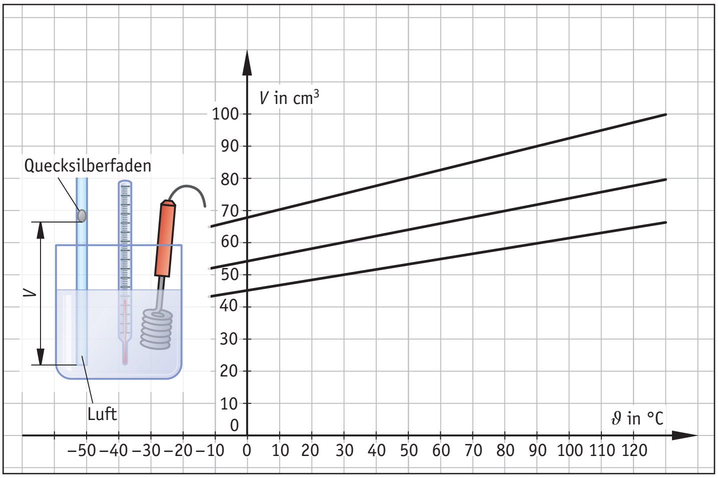

Abb. 1 $V(\theta)$-Diagramm idealer Gase bei p = const

Lösung

1. Wir stellen die Gleichungen aller Geraden (z. B. in der Punkt-Steigungsform) auf und vergleichen deren Nullstellen miteinander. – Von oben nach unten gilt:

$$V_1(\vartheta) = \frac{10\,\text{cm}^3}{40\,°\text{C}} \cdot (\vartheta - 50\,°\text{C}) + 80\,\text{cm}^3$$

$$V_2(\vartheta) = \frac{10\,\text{cm}^3}{50\,°\text{C}} \cdot (\vartheta - 30\,°\text{C}) + 60\,\text{cm}^3$$

$$V_3(\vartheta) = \frac{10\,\text{cm}^3}{60\,°\text{C}} \cdot (\vartheta - 30\,°\text{C}) + 50\,\text{cm}^3$$

Nullstellen (der besseren Übersicht wegen unterdrücken wir die Einheiten):

von V_1: $\frac{1}{4} \cdot (\vartheta - 50) + 80 = 0 \xRightarrow{-80;\ \cdot 4;\ +50} \vartheta_1 = -270$

von V_2: $\frac{1}{5} \cdot (\vartheta - 30) + 60 = 0 \xRightarrow{-60;\ \cdot 5;\ +30} \vartheta_2 = -270$

von V_3: $\frac{1}{6} \cdot (\vartheta - 30) + 50 = 0 \xRightarrow{-50;\ \cdot 6;\ +30} \vartheta_3 = -270$

Alle drei Nullstellen sind also identisch ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = -270\,°\text{C}$). Vielleicht wissen Sie auch, dass die gemeinsame Nullstelle als absoluter Nullpunkt der Temperatur bezeichnet wird und den exakten Wert –273,15 °C hat?!

2. Zum Beispiel mit Steigung m als Parameter (gemeinsame Nullstelle beachten!) gilt:

$$V(\vartheta) = m \cdot (\vartheta + 270\,°\text{C})\ .$$

⊙ **Aufgaben S. 38**

1.6 Betrag und Betragsfunktion*

Definition des Betrags

Unter dem *Betrag* $|x|$ einer Zahl x versteht man auf der Zahlengeraden deren Abstand von der Null.

Beispiele (vgl. Abb. 1)

$|-10| = 10$, $|10| = 10$, $|0| = 0$, …

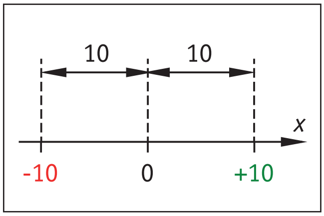

Abb. 1 Definition des Betrags

Betragsfunktion $y = |x|$

Aus der Definition des Betrags erhält man sofort den Graphen der *Betragsfunktion* (Abb. 2). Offensichtlich gilt $|x| = x$ für $x \geq 0$ (Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten) und $|x| = -x$ für $x < 0$ (WH des II. und IV. Quadranten).

Beachte: $|-5| = -(-5)$ für negative Zahlen!

Man schreibt daher kompakt:

Betragsfunktion (abschnittsweise)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

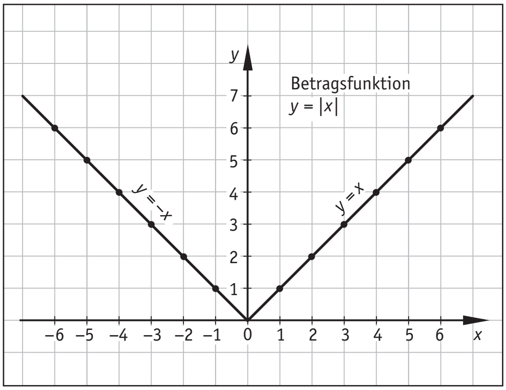

Abb. 2 Betragsfunktion („V-Funktion“)

Rechenregeln für Beträge

Multiplikation und Division

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (falls $b \neq 0$)

Beispiel:

$|-5 \cdot 2| = |-5| \cdot |2| = 5 \cdot 2 = 10$ und $|-5 \cdot 2| = |-10| = 10$ ✓

Sonderfall: $|a - b| = |b - a|$

Beweis (durch Ausklammern von –1 und Anwendung der Multiplikationsregel):

$|a - b| = |-1 \cdot (b - a)| = |-1| \cdot |b - a| = 1 \cdot |b - a| = |b - a|$

Beispiel:

$|10 - 17| = |-7| = 7$ und $|17 - 10| = |7| = 7$ ✓

Addition und Subtraktion

⚠ **Achtung:** Es gilt i. Allg. $|a + b| \neq |a| + |b|$ und $|a - b| \neq |a| - |b|$!

Beispiel:

$|-5 + 2| = |-3| = 3$ Aber: $|-5| + |2| = 5 + 2 = 7 \neq 3$ ↯