



EUROPA-FACHBUCHREIHE  
für Metallberufe

J. Burmester  
J. Dillinger

W. Escherich  
R. Gomeringer

B. Schellmann  
C. Scholer

# Rechenbuch Metall

**Lehr- und Übungsbuch**

**34. Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 10307**

**Autoren:**

Burmester, Jürgen	Dipl.-Ing., Oberstudienrat	Neheim
Dillinger, Josef	Studiendirektor	München
Escherich, Walter	Studiendirektor	Bad Neustadt a. d. Saale
Gomeringer, Roland	Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Balingen
Schellmann, Bernhard	Oberstudienrat	Wangen i. A.
Scholer, Claudius	Dipl.-Ing., Dipl.-Gwl., Studiendirektor	Metzingen

**Lektorat und Leitung des Arbeitskreises:**

Claudius Scholer, Metzingen

**Bildentwürfe: Die Autoren**

**Bildquellen:**

CASIO Europe GmbH, Norderstedt: S. 22, Bild 1

CASIO Europe GmbH, Norderstedt: S. 32, Bild 1

CASIO Europe GmbH, Norderstedt: S.167, Bild 1

Andreas Maier GmbH & Co. KG, Fellbach: S. 274, Bild 3

Universal Transmissions GmbH, Mühlhausen, © Gates: S. 276, Bild 1

Heron Gruppe, Dornbirn, Österreich; [www.robotunits.com](http://www.robotunits.com): S. 276, Bild 3

Schellmann, Bernhard, Wangen: S. 275, Bild 4

**Bildbearbeitung:**

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

34. Auflage 2024

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-7585-1412-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2024 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
[www.europa-lehrmittel.de](http://www.europa-lehrmittel.de)



Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt  
Umschlag: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar  
Umschlagfotos: Sauter Feinmechanik GmbH, 72555 Metzingen  
Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

## Vorwort


Das Rechenbuch Metall ist ein Lehr- und Übungsbuch für die Aus- und Weiterbildung in Fertigungs- und Werkzeugberufen. Es vermittelt rechnerische Grund- und Fachkenntnisse, fördert und vertieft das Verständnis für technische Abläufe und technologische Zusammenhänge. Das Buch eignet sich sowohl für den unterrichtsbegleitenden Einsatz als auch zum Selbststudium.

### Angehende Zielgruppen:

- Industriemechaniker
- Feinwerkmechaniker
- Zerspanungsmechaniker
- Werkzeugmechaniker
- Fertigungsmechaniker
- Technischer Produktdesigner
- Verfahrensmechaniker
- Meister und Techniker

Die Lerninhalte wurden durch **Animationen**  und **interaktive Simulationen**  ergänzt, um die Lernfeldkonzeption mit digitalen Medien im Unterricht zu realisieren. Die digitalen Inhalte sind auch zur Darstellung auf kleinen Displays (Smartphone, Tablet) geeignet.

Eine klare Gliederung in **Teil A Fachrechnen**, **Teil B Simulationsaufgaben**, **Teil C Vertiefungsaufgaben** und **Teil D Projektaufgaben** unterstützt die Arbeit des Anwenders.

Im **Teil A Fachrechnen** bildet jeder Lernbereich eine in sich geschlossene Einheit mit identischem methodischem Aufbau. Nach der Einführung in das Fachgebiet werden die notwendigen Formeln hergeleitet und erläutert. Wichtige mathematische und physikalische Zusammenhänge werden durch Animationen verdeutlicht. Nachfolgende Musterbeispiele zeigen die technische Anwendung. Daran schließen sich Übungsaufgaben an, die nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet sind. Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad sind durch einen roten Punkt ● gekennzeichnet. Auf Simulationsaufgaben und weitere Vertiefungsaufgaben  wird auf den einzelnen Seiten verwiesen.

Der **Teil B Simulationsaufgaben** ermöglicht durch einfache Aufgaben einen schnellen Einstieg in die entsprechenden Themen. Durch den Einsatz der Simulationen werden Zusammenhänge erkennbar und die Lösungen können selbstständig überprüft werden.

Der **Teil C Vertiefungsaufgaben** stellt einen Querschnitt durch alle Stoffgebiete dar und kann zur Leistungskontrolle und zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden.

Im **Teil D Projektaufgaben** wird die Unterrichtskonzeption nach Lernfeldern in besonderer Weise unterstützt. Die Projektaufgaben umfassen neben den fachmathematischen Aufgaben auch Fragen der Technologie, Werkstofftechnik, Steuerungstechnik und Arbeitsplanung.

Der Inhalt des Rechenbuches wurde in der **34. Auflage** dem Stand der Technik angepasst und um 8 Seiten erweitert. Die folgenden Lernbereiche wurden ergänzt bzw. neu aufgenommen:

- **Beschleunigungskraft**
- **Zustandsgrößen der Gase**
- **Werkstattprojekt Papierlocher**
- **Gewichtskraft**
- **Maßtoleranzen**
- **Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine**

Die „**Lösungen**“ zum Rechenbuch Metall ermöglichen nicht nur das Überprüfen der Ergebnisse, sondern enthalten außerdem den ausführlichen Lösungsweg der Aufgaben.

Kritische Hinweise und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen über [lektorat@europa-lehrmittel.de](mailto:lektorat@europa-lehrmittel.de).

**Technische Mathematik**  
9 ... 64

**Technische Physik**  
65 ... 155

**Prüftechnik und Qualitätsmanagement**  
156 ... 176

**Maschinenelemente**  
177 ... 191

**Fertigungsplanung**  
192 ... 208

**Fertigungstechnik**  
209 ... 264

**Simulationsaufgaben**  
265 ... 277

**Vertiefungsaufgaben**  
278 ... 301

**Projektaufgaben**  
302 ... 341

# Inhaltsverzeichnis

Lernfelder für Industrie- und Werkzeugmechaniker .....	6
Lernfelder für Zerspanungs- und Feinwerkmechaniker .....	7
Mathematische und physikalische Begriffe .....	8

## Teil A – Fachrechnen

### Technische Mathematik

<b>Zahlensysteme</b> .....	9
Dezimals Zahlensystem .....	9
Duales (binäres) Zahlensystem .....	9
Hexadezimals Zahlensystem .....	10

<b>Grundrechnungsarten</b> .....	11
Variable .....	11
Klammerausdrücke (Klammerterm) .....	11
Runden .....	11
Strich- und Punktrechnungen .....	11
Bruchrechnen .....	14
Potenzieren .....	15
Radizieren (Wurzelziehen) .....	17

<b>Allgemeine Berechnungen</b> .....	19
Schlussrechnung (Dreisatz- rechnung) .....	19
Prozentrechnung .....	20
Zeitberechnungen .....	21
Winkelberechnungen .....	22

<b>Technische Berechnungen</b> .....	24
Formeln (Größengleichungen) .....	24
Zahlenwertgleichungen .....	24
Größen und Einheiten .....	25
Darstellung großer und kleiner Zahlenwerte .....	25
Rechnen mit physikalischen Größen .....	26
Umrechnen von Einheiten .....	26
Umstellen von Formeln .....	29
Technische Berechnungen mit dem Taschenrechner .....	32

<b>Berechnungen im Dreieck</b> .....	35
Lehrsatz des Pythagoras .....	35
Winkelfunktionen .....	38

<b>Längen, Flächen, Volumen, Gewichtskraft</b> .....	44
Längen und Teilung .....	44
Flächen und Verschnitt .....	48
Volumen .....	54
Masse und Dichte .....	55
Gleichdicke Körper, Masse- berechnung mithilfe von Tabellenwerten .....	57
Volumenänderung beim Umformen .....	60

<b>Diagramme und Funktionen</b> .....	61
Kreisdiagramm .....	61
Balkendiagramm .....	61
Histogramm und Paretodiagramm Grafische Darstellungen von Funktionen und Messreihen .....	62

### Technische Physik

<b>Bewegungen</b> .....	65
Konstante Bewegungen .....	65
Beschleunigte und verzögerte Bewegungen .....	70

<b>Kräfte</b> .....	72
Darstellen von Kräften .....	72
Grafische Ermittlung von Kräften ..	72
Rechnerische Ermittlung von Kräften .....	74
Beschleunigungskraft .....	76
Gewichtskraft .....	76
Drehmoment, Hebelgesetz .....	78
Lagerkräfte .....	80
Umfangskraft und Drehmoment ..	82
Reibung .....	84

<b>Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad</b> .....	86
Mechanische Arbeit .....	86
Mechanische Energie .....	87
Mechanische Leistung .....	89
Wirkungsgrad .....	90
Einfache Maschinen .....	93

<b>Rollen und Flaschenzüge</b> .....	96
<b>Fluidmechanik und Automation</b> ..	97
Druck – Einheiten und Druckarten ..	97
Kolbenkraft in Pneumatik und Hydraulik .....	98
Luftverbrauch in der Pneumatik ..	101
Hydrostatik – Prinzip der hydraulischen Presse .....	103
Hydrodynamik – Volumenstrom ..	105
Leistungsberechnung in der Hydraulik .....	107
Logische Verknüpfungen .....	109

<b>Werkstoffprüfung</b> .....	116
Zugversuch .....	116
Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz .....	119

<b>Festigkeitslehre</b> .....	122
Beanspruchung auf Zug .....	122
Beanspruchung auf Druck .....	124
Beanspruchung auf Flächen- pressung .....	125
Beanspruchung auf Abscherung, Schneiden von Werkstoffen .....	126
Beanspruchung auf Biegung .....	128
Beanspruchung auf Torsion (Verdrehung) .....	130

<b>Wärmelehre</b> .....	132
Temperatur .....	132
Längen- und Volumenänderung ..	132
Schwindung beim Gießen .....	133
Wärmemenge .....	135
Zustandsänderung idealer Gase ..	138

<b>Elektrotechnik</b> .....	140
Ohmsches Gesetz .....	140
Leiterwiderstand .....	141
Temperaturabhängige Wider- stände .....	142
Schaltung von Widerständen .....	143
Elektrische Leistung bei Gleich- spannung .....	147

Wechselspannung und Wechsel- strom .....	149
Elektrische Leistung bei Wechsel- strom und bei Drehstrom .....	152
Elektrische Arbeit und Energie- kosten .....	154
Transformator .....	155

### Prüftechnik und Qualitätsmanagement

<b>Maßtoleranzen und Passungen</b> ..	156
Maßtoleranzen .....	156
Allgemeintoleranzen .....	157
Passungen .....	159
ISO-Passungen .....	160

<b>Qualitätsmanagement</b> .....	163
Prozesskennwerte aus Stichpro- benprüfung .....	163
Statistische Berechnungen mit dem Taschenrechner .....	167
Maschinen- und Prozessfähigkeit ..	169
Statistische Prozesslenkung mit Qualitätsregelkarten .....	173

### Maschinenelemente

<b>Zahnradmaße</b> .....	177
Stirnräder mit Geradverzahnung ..	177
Stirnräder mit Schrägverzahnung ..	178
Achsabstand bei Zahnradern .....	179

<b>Übersetzungen bei Antrieben</b> .....	181
Einfache Übersetzungen .....	181
Mehrfache Übersetzungen .....	184

<b>Welle-Nabe-Verbindung</b> .....	186
Passfederverbindung .....	186

<b>Schraubenverbindung</b> .....	188
Schraubenverbindungen mit axialer Betriebskraft $F_B$ .....	188
Schraubenverbindungen ohne Betriebskraft .....	190

### Fertigungsplanung

<b>Standgrößen (Standzeit, Standmenge, Standweg, Standvolumen)</b> .....	192
----------------------------------------------------------------------------------	-----

<b>Durchlaufzeit, Belegungszeit</b> .....	193
-------------------------------------------	-----

<b>Auftragszeit</b> .....	196
---------------------------	-----

<b>Kostenrechnung</b> .....	198
-----------------------------	-----

<b>Maschinenstundensatz</b> .....	202
-----------------------------------	-----

<b>Deckungsbeitrag (Teilkosten- rechnung)</b> .....	204
---------------------------------------------------------	-----

<b>Lohnberechnung</b> .....	206
-----------------------------	-----

**Fertigungstechnik**

<b>Drehen</b> .....	209	Schnittdaten und Drehzahl beim Bohren .....	225	Streifenmaße und Streifenanwendung .....	246
Schnittdaten und Anzahl der Schnitte beim Drehen .....	209	Schnittkraft beim Bohren .....	226	<b>Biegen</b> .....	248
Drehzahl beim Drehen .....	210	Schnittleistung und Antriebsleistung beim Bohren .....	227	Zuschmittmittlung .....	248
Schnittkraft beim Drehen .....	211	Hauptnutzungszeit beim Bohren, Senken, Reiben .....	228	Rückfederung .....	250
Schnittleistung und Antriebsleistung beim Drehen .....	212	<b>Schleifen</b> .....	230	<b>Tiefziehen</b> .....	252
Rautiefe .....	214	Hauptnutzungszeit beim Längs-Rundschleifen .....	230	Zuschnittedurchmesser .....	252
Hauptnutzungszeit beim Drehen mit konstanter Drehzahl .....	215	Hauptnutzungszeit beim Umfangs-Planschleifen .....	232	Ziehstufen und Ziehverhältnisse ..	253
Kegelmaße .....	217	<b>Indirektes Teilen</b> .....	234	<b>Exzenter- und Kurbelpressen</b> .....	255
<b>Fräsen (Stirnfräsen)</b> .....	219	<b>Koordinaten in NC-Programmen</b> ..	236	Pressenauswahl .....	255
Schnittdaten und Drehzahl für das Stirnfräsen .....	219	Geometrische Grundlagen .....	236	Schneidarbeit .....	255
Schnittkraft beim Fräsen (Stirnfräsen) .....	220	<b>Abtragen und Schneiden, Hauptnutzungszeit</b> .....	242	<b>Spritzgießen</b> .....	257
Schnittleistung und Antriebsleistung beim Fräsen .....	221	<b>Trennen durch Schneiden</b> .....	244	Schwindung .....	257
Hauptnutzungszeit beim Fräsen ..	223	Schneidspalt .....	244	Kühlung .....	258
<b>Bohren</b> .....	225			Dosierung der Formmasse .....	259

**Teil B – Simulationsaufgaben**

Konstante geradlinige Bewegungen .....	265	Druck und Kolbenkraft .....	269	Gemischte Schaltung von Widerständen .....	273
Konstante kreisförmige Bewegungen .....	266	Hydraulische Presse .....	270	ISO-Toleranzen .....	274
Hebelgesetz .....	267	Ohmsches Gesetz .....	271	ISO-Passungen .....	275
Schiefe Ebene .....	268	Reihenschaltung und Parallelschaltung von Widerständen .....	272	Einfache Übersetzungen .....	276
				Biegen .....	277

**Teil C – Vertiefungsaufgaben**

<b>Lernfeldkompass</b> .....	278	Maßtoleranzen, Passungen und Teilen .....	285	Wärmeausdehnung und Wärmemenge .....	295
Berechnungen im Dreieck .....	279	Statistische Auswertungen .....	286	Hydraulik und Pneumatik .....	296
Längen, Flächen, Volumen, Masse und Gewichtskraft .....	280	Maschinen- und Prozessfähigkeit ..	288	Grundlagen der Elektrotechnik .....	298
Bewegungen, Übersetzungen .....	281	Bohren, Senken, Reiben .....	289	Elektrische Leistung und Wirkungsgrad .....	299
Kräfte, Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad .....	282	Drehen, Fräsen, Schleifen .....	290	Elektrische Antriebe und Steuerungen .....	300
Kräfte, Flächenpressung, Kennwerte .....	283	Koordinaten in NC-Programmen ..	292	Kalkulation .....	301
Kräfte an Bauteilen .....	284	Schneiden und Umformen .....	293		
		Schraub-, Stift-, Passfeder- und Lötverbindungen .....	294		

**Teil D – Projektaufgaben**

<b>Papierlocher</b> .....	302	<b>Hydraulische Spannklau</b> .....	314	<b>Pneumatische Steuerung</b> .....	329
<b>Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine</b> .....	304	<b>Folgeschneidwerkzeug</b> .....	317	<b>Elektropneumatik – Sortieren von Materialien</b> .....	332
<b>Hubeinheit</b> .....	308	<b>Tiefziehwerkzeug</b> .....	320	<b>Frästeil Spannplatte</b> .....	335
<b>Zahnradpumpe</b> .....	311	<b>Spritzgießwerkzeug</b> .....	323	<b>Drehteil Ritzelwelle</b> .....	338
		<b>Qualitätsmanagement</b> .....	326		

Lernfelder für Industrie- und Werkzeugmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall																
Lernfeld	Industrie-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch		Werkzeug-mechaniker	Kapitel im Rechenbuch											
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen ..... S. 44	Flächen ..... S. 48	Volumen ..... S. 54	Masse ..... S. 55	Gewichtskraft ..... S. 76	Maßtoleranzen ..... S. 156	Umformen, Biegen ..... S. 248	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen ..... S. 44	Flächen ..... S. 48	Volumen ..... S. 54	Masse ..... S. 55	Gewichtskraft ..... S. 76	Maßtoleranzen ..... S. 156	Umformen, Biegen ..... S. 248
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen ..... S. 159	Konstante Bewegungen ..... S. 65	Drehen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 209	Bohren ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 225	Fräsen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 219	Kostenrechnen ..... S. 198	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen ..... S. 159	Konstante Bewegungen ..... S. 65	Drehen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 209	Bohren ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 225	Fräsen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 219	Kostenrechnen ..... S. 198		
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte ..... S. 72	Hebel ..... S. 78	Einfache Maschinen ..... S. 93	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte ..... S. 72	Hebel ..... S. 78	Einfache Maschinen ..... S. 93								
4	Warten technischer Systeme	Diagramme ..... S. 61	Ohmsches Gesetz ..... S. 140	Schaltung v. Widerständen ..... S. 143	Warten technischer Systeme	Diagramme ..... S. 61	Ohmsches Gesetz ..... S. 140	Schaltung v. Widerständen ..... S. 143								
5	Fertigen von Einzelteilen mit Werkzeugmaschinen	Prozesskennwerte Stichproben ..... S. 163	Drehen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 209	Bohren ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 225	Fräsen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 219	Formgeben von Bauelementen durch spanende Fertigung	Drehen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 209	Bohren ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 225	Fräsen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 219	Indirektes Teilen ..... S. 234						
6	Installieren und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte ..... S. 97	Logische Verknüpfungen ..... S. 109	Projekt: Pneumatische Steuerung ..... S. 329	Hydraulische Presse ..... S. 103	Herstellen technischer Teilsysteme des Werkzeugbaus	Biegen, Rückfedern ..... S. 248	Tiefziehen ..... S. 252	Exzenter- und Kurbelpressen ..... S. 255							
7	Montieren von technischen Teilsystemen	Festigkeitslehre ..... S. 122	Lagerkräfte ..... S. 80	Zugversuch ..... S. 116	Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck ..... S. 35	Koordinaten in NC-Programmen ..... S. 236									
8	Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck ..... S. 35	Koordinaten in NC-Programmen ..... S. 236	Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte ..... S. 97	Logische Verknüpfungen ..... S. 109	Ohmsches Gesetz ..... S. 140	Leiterwiderstand ..... S. 141								
9	Instandsetzen von technischen Systemen	Reibung ..... S. 84	Wärmelehre ..... S. 132	Kostenrechnung ..... S. 198	Herstellen von formgebenden Werkzeugoberflächen	Hauptnutzungszeit beim Schneiden ..... S. 242	Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad ..... S. 86	Wechselspannung und Wechselstrom ..... S. 149								
10	Herstellen und Inbetriebnehmen von technischen Systemen	Zahnradmaße ..... S. 177	Übersetzungen ..... S. 181	Arbeit, Energie, Leistung, Wirkungsgrad ..... S. 86	Wechselspannung und Wechselstrom ..... S. 149	El. Leistung ..... S. 152	El. Energiekosten ..... S. 154	Fertigen von Bauelementen in der rechnergestützten Fertigung	Berechnungen im Dreieck ..... S. 35	Koordinaten in NC-Programmen ..... S. 236						
11	Überwachen der Produkt- und Prozessqualität	Qualitätsmanagement ..... S. 163	Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes ..... S. 326	Herstellen der technischen Systeme des Werkzeugbaus	Trennen durch Schneiden ..... S. 244	Werkstoffprüfung ..... S. 116	Festigkeitslehre ..... S. 122									
12	Instandhalten von technischen Systemen	Werkstoffprüfung ..... S. 116	Festigkeitslehre ..... S. 122	Inbetriebnehmen und Instandhalten von technischen Systemen des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement ..... S. 163	El. Leistung ..... S. 152	El. Energiekosten ..... S. 154	Projekt: Folgeschneidwerkzeug ..... S. 317								
13	Sicherstellen der Betriebsfähigkeit automatisierter Systeme	Logische Verknüpfungen ..... S. 109	Projekt: Pneumatische Steuerung ..... S. 329	Projekt: Elektropneumatik ..... S. 332	Planen und Fertigen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Spritzgießen ..... S. 257	Projekt: Spritzgießwerkzeug ..... S. 323	Projekt: Tiefziehwerkzeug ..... S. 320								
14	Planen und Realisieren technischer Systeme	Projekt: Vorschubantrieb einer CNC-Fräsmaschine ..... S. 304	Projekt: Hubeinheit ..... S. 308	Ändern und Anpassen technischer Systeme des Werkzeugbaus	Qualitätsmanagement ..... S. 163	Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes ..... S. 326										
15	Optimieren von technischen Systemen	Projekt: Zahnradpumpe ..... S. 311	Projekt: Hydraulische Spannklaue ..... S. 314	–	–											

Lernfelder für Zerspanungs- und Feinwerkmechaniker und die hierzu passenden Abschnitte im Rechenbuch Metall				
Lernfeld	Zerspanungsmechaniker	Kapitel im Rechenbuch	Feinwerkmechaniker	Kapitel im Rechenbuch
1	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen ..... S. 44 Flächen ..... S. 48 Volumen ..... S. 54 Masse ..... S. 55 Dichte ..... S. 55 Gewichtskraft ..... S. 76 Maßtoleranzen ..... S. 156 Umformen, Biegen ..... S. 248	Fertigen von Bauelementen mit handgeführten Werkzeugen	Längen ..... S. 44 Flächen ..... S. 48 Volumen ..... S. 54 Masse ..... S. 55 Dichte ..... S. 55 Gewichtskraft ..... S. 76 Maßtoleranzen ..... S. 156 Umformen, Biegen ..... S. 248
2	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen ..... S. 159 Konstante Bewegungen ..... S. 65 Drehen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 209 Bohren ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 225 Fräsen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 219 Kostenrechnen ..... S. 198	Fertigen von Bauelementen mit Maschinen	Passungen ..... S. 159 Konstante Bewegungen ..... S. 65 Drehen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 209 Bohren ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 225 Fräsen ( $v_c; n; f$ ) ..... S. 219 Kostenrechnen ..... S. 198
3	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte ..... S. 72 Hebel ..... S. 78 Einfache Maschinen ..... S. 93	Herstellen von einfachen Baugruppen	Kräfte ..... S. 72 Hebel ..... S. 78 Einfache Maschinen ..... S. 93
4	Warten technischer Systeme	Diagramme ..... S. 61 Ohmsches Gesetz ..... S. 140 Schaltung v. Widerständen ..... S. 143	Warten technischer Systeme	Diagramme ..... S. 61 Ohmsches Gesetz ..... S. 140 Schaltung v. Widerständen ..... S. 143
5	Herstellen von Bauelementen durch spanende Fertigungsverfahren	Passungen ..... S. 159 Drehen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 209 Bohren ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 225 Fräsen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 219	Herstellen von Dreh- und Frästeilen	Passungen ..... S. 159 Drehen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 209 Bohren ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 225 Fräsen ( $F_c; P_c; t_h$ ) ..... S. 219
6	Warten und Inspizieren von Werkzeugmaschinen	Standgrößen ..... S. 192 Durchlauf-, Belegungszeit ..... S. 193 Flächenpressung ..... S. 125 Lagerkräfte ..... S. 80 Reibung ..... S. 84	Programmieren und Fertigen auf numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Berechnungen im Dreieck ..... S. 35 Koordinaten in NC-Programmen ..... S. 236 Maschinenstundensatz ..... S. 202 Deckungsbeitrag ..... S. 204
7	Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte ..... S. 97 Logische Verknüpfungen ..... S. 109 Projekt: Zahnradpumpe ..... S. 311 Hydraulische Presse ..... S. 103	Herstellen technischer Teilsysteme	Zugversuch ..... S. 116 Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz ..... S. 119 Längen- und Volumenänderung ..... S. 132 Flächenpressung ..... S. 125 Lagerkräfte ..... S. 80 Reibung ..... S. 84
8	Programmieren und Fertigen mit numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen	Koordinaten in NC-Programmen ..... S. 236 Qualitätsmanagement ..... S. 163	Planen und Inbetriebnehmen steuerungstechnischer Systeme	Druck und Kolbenkräfte ..... S. 97 Logische Verknüpfungen ..... S. 109 Projekt: Pneumatische Steuerung ..... S. 329 Projekt: Elektropneumatik ..... S. 332
9	Herstellen von Bauelementen durch Feinbearbeitungsverfahren	Schleifen ( $t_s$ ) ..... S. 230 Abtragen und Schneiden ( $t_h$ ) ..... S. 242 ISO-Passungen ..... S. 160	Instandhalten von Funktionseinheiten	Lagerkräfte ..... S. 80 Standgrößen ..... S. 192 Durchlauf-, Belegungszeit ..... S. 193 Flächenpressung ..... S. 125
10	Optimieren des Fertigungsprozesses	Mechanische Leistung ..... S. 89 Maschinen- und Prozessfähigkeit ..... S. 169 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) ..... S. 209 Fertigungsplanung ..... S. 192	Feinbearbeiten von Flächen	Schleifen ( $t_s$ ) ..... S. 230 Abtragen und Schneiden ..... S. 242 Auftragszeit ..... S. 196 Kostenrechnung ..... S. 198
11	Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwerte aus Stichprobenprüfung ..... S. 163 Statistische Prozesslenkung ..... S. 173	Herstellen von Bauteilen und Baugruppen aus Kunststoff	Spritzgießen ..... S. 257 Projekt: Spritzgießwerkzeug ..... S. 323 Projekt: Folgschneidwerkzeug ..... S. 317
12	Vorbereiten und Durchführen eines Einzelfertigungsauftrages	Fertigungstechnik: Schnittdaten, Schnittkräfte ..... S. 209 Projekt: Hydraulische Spannklaue ..... S. 314 Maschinenstundensatz ..... S. 202 Deckungsbeitrag ..... S. 204	Planen und Organisieren rechnergestützter Fertigung	Prozesskennwert aus Stichprobenprüfung ..... S. 163 Statistische Prozesslenkung ..... S. 173
13	Organisieren und Überwachen von Fertigungsprozessen in der Serienfertigung	Projekt: Frästeil Spannplatte ..... S. 335 Projekt: Drehteil Ritzelwelle ..... S. 338 Projekt: Qualitätsmanagement am Bsp. eines Stirnradgetriebes ..... S. 326	Instandhalten technischer Systeme	Maschinen- und Prozessfähigkeit ..... S. 169 Fertigungstechnik (Schnittleistung, Hauptnutzungszeit) ..... S. 209 Fertigungsplanung ..... S. 192
14	–	–	Fertigen von Schweißkonstruktionen <sup>1)</sup>	Schmelzschweißen ..... S. 262
15	–	–	Montieren, Demontieren und Inbetriebnehmen technischer Systeme <sup>1)</sup>	Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad ..... S. 86 Qualitätsmanagement ..... S. 163 Elektrotechnik ..... S. 140
16	–	–	Programmieren automatisierter Systeme und Anlagen <sup>1)</sup>	Projekt: Elektropneumatik ..... S. 332

1) Schwerpunkt Maschinenbau

Mathematische und physikalische Begriffe			
Begriffe	Erklärung	Beispiele	
<b>Größen und Einheiten</b>			
<b>Physikalische Größen</b>	Physikalische Größen sind objektiv messbare Eigenschaften von Zuständen und Vorgängen. Eine physikalische Größe ist das Produkt eines Zahlenwertes mit einer Einheit.	Bei der Länge $l = 30$ mm ist 30 der Zahlenwert und mm (Millimeter) die Einheit.	
<b>Basisgröße</b>	Man unterscheidet Basisgrößen und Basiseinheiten. Sie sind im internationalen Einheitensystem (SI = <b>S</b> ystème <b>I</b> nternational) festgelegt.	<b>Basisgröße</b>	<b>Formelzeichen</b>
<b>Basiseinheit</b>		<b>Basiseinheit</b>	<b>Zeichen</b>
		Länge Masse	$l$ $m$
		Meter Kilogramm	m kg
<b>Abgeleitete Größen und abgeleitete Einheiten</b>	Die abgeleiteten Größen und deren Einheiten setzen sich aus den Basisgrößen und deren Einheiten zusammen.	Kraft = Masse · Beschleunigung $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$	
<b>Umrechnung von Einheiten</b>	Einheiten können in größere oder kleinere Einheiten oder andere Maßsysteme umgerechnet werden.	$1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = 1000 \text{ g}$ $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ dl} = 0,001 \text{ m}^3$	
<b>Gleichungen und Formeln</b>			
<b>Gleichungen</b>	Gleichungen beschreiben die Abhängigkeit mathematischer oder physikalischer Größen voneinander.	$16 + 9 = 100 - 75$ $x + 15 = 25$	
<b>Formeln</b>	Technische oder physikalische Gleichungen mit Formelzeichen bezeichnet man als Formeln.	$s = v \cdot t$ (Weg = Geschwindigkeit · Zeit)	
<b>Formelzeichen</b>	Formelzeichen bestehen aus <i>kursiv</i> gedruckten Buchstaben und kennzeichnen Größen. Sie ersetzen Wörter und dienen zum Rechnen mit Formeln.	$m$ für Masse $A$ für Fläche	
<b>Größengleichungen</b>	Größengleichungen stellen Beziehungen zwischen physikalischen Größen dar. Sie sind unabhängig von der Wahl der Einheit und können Zahlenwerte, z. B. $\pi$ , mathematische Zeichen, z. B. $\sqrt{\quad}$ , enthalten. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$	
<b>Zahlenwertgleichungen</b>	Die Zahlenwerte aller Formelzeichen sind an vorgegebene Einheiten gebunden. Der Zahlenwert des Ergebnisses erhält die gewünschte Einheit nur dann, wenn alle Zahlenwerte der Gleichung in den jeweils vorgeschriebenen Einheiten eingesetzt werden. Kennzeichnung in diesem Buch: rote Umrandung.	$P = \frac{Q \cdot p}{600}$ $P$ in kW $Q$ in l/min $p$ in bar	
<b>Zahlenwerte</b>			
<b>Konstanten</b>	Konstanten sind gleichbleibende Zahlenwerte oder Größen bei Berechnungen in der Mathematik und Physik.	$\pi = 3,141592654\dots$ (Kreiszahl) $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)	
<b>Koeffizienten</b>	Koeffizienten sind Größen, die den Einfluss einer Stoffeigenschaft auf einen physikalischen Vorgang kennzeichnen.	$\alpha = 0,000\,012 \text{ 1/K}$ ( $\alpha$ = Längenausdehnungskoeffizient für Stahl)	
<b>Runden</b>	Es gilt DIN 1333: Ist die über die angegebene Stellenzahl hinausgehende Ziffer = 5 oder > 5, wird aufgerundet. Ist die Ziffer < 5, wird abgerundet.	25,5 N $\approx$ 26 N 18,79 kg $\approx$ 18,8 kg 164,4 cm <sup>3</sup> $\approx$ 164 cm <sup>3</sup>	

# Technische Mathematik

## Zahlensysteme

Beim Rechnen wird allgemein das dezimale Zahlensystem verwendet. Die elektronische Datenverarbeitung (EDV) und die Automatisierungstechnik bauen jedoch auf dem dualen und hexadezimalen Zahlensystem auf, weil die elektronischen Bauelemente nur binäre<sup>1)</sup> Informationen, d. h. die Zustände 0 und 1, verarbeiten können.

Zahlensysteme setzen sich aus der Basis und den Zeichen zusammen (**Tabelle 1**).

**Bezeichnungen:**  
 $z_{10}$  Kurzzeichen für eine Dezimalzahl<sup>2)</sup>  
 $z_2$  Kurzzeichen für eine Dualzahl<sup>3)</sup>  
 $z_{16}$  Kurzzeichen für eine Hexadezimalzahl<sup>2)</sup>

### Dezimales Zahlensystem

Beim dezimalen Zahlensystem werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Alle Zahlen können als Zehnerpotenzen geschrieben werden.

● **Beispiel:**  
 Dezimalzahl  $z_{10} = 857$   

$$z_{10} = 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$= 800 + 50 + 7 = 857$$

Die Zehnerpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren (**Tabelle 2**).

### Duales (binäres) Zahlensystem

Beim dualen Zahlensystem werden lediglich die Ziffern „0“ und „1“ verwendet. Alle Zahlen werden als Potenzen der Basis 2 dargestellt (**Tabelle 2**).

### Umwandlung von Dezimal- in Dualzahlen

● **Beispiel:**  
 Die Dezimalzahl  $z_{10} = 14$  ist in eine Dualzahl umzuwandeln.  
**Lösung:** Es wird das **Restverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 2 (**Tabelle 3**). Als Rest ergibt sich jeweils die „0“ oder die „1“. Die Zweierpotenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren, so erhält man:  $z_2 = 1110$ .

### Umwandlung von Dual- in Dezimalzahlen

● **Beispiel:**  
 Die Dualzahl  $z_2 = 10110$  ist in eine Dezimalzahl  $z_{10}$  umzuwandeln.  
**Lösung:** Der Dualzahl  $z_2$  werden ihre Zweierpotenzen von  $2^0$  bis  $2^4$  von rechts nach links steigend zugeordnet (**Tabelle 4**).  
 Alle Stellenwerte, z. B. 16 der Zweierpotenz  $2^4$ , werden mit der zugehörigen Dualzahl, hier „1“, multipliziert. Alle Produkte zusammen addiert ergeben die Dezimalzahl  $z_{10} = 22$ .

1) binär (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend  
 2) hexa (griech.) = sechs, dezimal (lat.) = 10  
 3) dual (lat.) = aus zwei Einheiten bestehend

**Tabelle 1: Zahlensysteme**

Zahlensystem	Basis	Zeichen
Dual	2	0, 1
Dezimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Hexadezimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

**Tabelle 2: Dezimal-, Dual- und Hexadezimalzahlen**

Zahlen im Dezimalsystem		Zahlen im Dualsystem					Zahlen im Hexadezimalsystem		
Zehnerpotenzen		Zweierpotenzen					Sechzehnerpotenzen		
$10^1$	$10^0$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$16^2$	$16^1$	$16^0$
	0	0	0	0	0	0			0
	1	0	0	0	0	1			1
	2	0	0	0	1	0			2
	3	0	0	0	1	1			3
	4	0	0	1	0	0			4
	5	0	0	1	0	1			5
	6	0	0	1	1	0			6
	7	0	0	1	1	1			7
	8	0	1	0	0	0			8
	9	0	1	0	0	1			9
1	0	0	1	0	1	0			A
1	1	0	1	0	1	1			B
1	2	0	1	1	0	0			C
1	3	0	1	1	0	1			D
1	4	0	1	1	1	0			E
1	5	0	1	1	1	1			F
1	6	1	0	0	0	0		1	0

**Tabelle 3: Umwandlung der Dezimalzahl  $z_{10}$  in eine Dualzahl  $z_2$**

$14 : 2 = 7$ Rest 0	
$7 : 2 = 3$ Rest 1	
$3 : 2 = 1$ Rest 1	
$1 : 2 = 0$ Rest 1	
Ergebnis: $z_2 = 1110$	

**Tabelle 4: Umwandlung einer Dualzahl  $z_2$  in eine Dezimalzahl  $z_{10}$**

Dualzahl $z_2$	1	0	1	1	0
Zweierpotenz	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
Stellenwert	16	8	4	2	1

Addition:  
 $z_{10} = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 22$

## Hexadezimals Zahlensystem

Bei Mikroprozessoren verwendet man häufig auch das hexadezimale Zahlensystem. Bei diesem werden neben den Ziffern 0 bis 9 auch die Buchstaben A bis F benützt. Es hat den Vorteil, dass weniger Zeichen benötigt werden, als dies beim dezimalen und dualen Zahlensystem der Fall ist.

Die Zahlen werden in Potenzen der Basis 16 angegeben:  $16^0$ ,  $16^1$ ,  $16^2$  usw. (**Tabelle 2, vorherige Seite**). Die Hexadezimalzahl  $z_{16} = A$  ergibt eine Dezimalzahl  $z_{10} = 10$  oder  $z_{16} = F$  ergibt  $z_{10} = 16$ .

### ■ Umwandlung von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen

#### ● Beispiel:

Die Dezimalzahl  $z_{10} = 2016$  ist in eine Hexadezimalzahl  $z_{16}$  umzuwandeln.

**Lösung:** Auch hier wird das **Restverfahren** verwendet. Dazu teilt man die Dezimalzahl jeweils durch die Basiszahl 16 (**Tabelle 1**). Als Rest ergibt sich jeweils Zahlen von 0 bis 15. Die Zahlen von 10 bis 15 müssen in Buchstaben umgewandelt werden. Die 16er-Potenzen werden nicht geschrieben, sondern nur die Faktoren.

So erhält man das Ergebnis  $z_{16} = 7 E 0$ .

**Tabelle 1: Umwandlung einer Dezimalzahl  $z_{10}$  in eine Hexadezimalzahl  $z_{16}$**

2016 : 16 = 126 Rest 0  
 126 : 16 = 7 Rest 14  
 7 : 16 = 0 Rest 7

Ergebnis:  $z_{16} = 7 E 0$

(aus dem Rest 14 wird die Ziffer 0, siehe **Tabelle 2, vorherige Seite**)

### ■ Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen

#### ● Beispiel:

Die Hexadezimalzahl  $z_{16} = A2F$  ist in eine Dezimalzahl  $z_{10}$  umzuwandeln.

**Lösung:** Der Hexadezimalzahl  $z_{16}$  werden ihre 16er-Potenzen von  $16^0$  bis  $16^2$  von rechts nach links steigend zugeordnet (**Tabelle 2**).

Von den Buchstabenwerten A und F werden ihre Zifferwerte gebildet. Diese Zifferwerte werden jeweils mit ihren Stellenwerten multipliziert und alle Produkte addiert.

So ergibt sich die Dezimalzahl  $z_{10} = 2607$ .

**Tabelle 2: Umwandlung der Hexadezimalzahl  $z_{16}$  in eine Dezimalzahl  $z_{10}$**

Hexadezimalzahl $z_{16}$	A	2	F
Zifferwert	10	2	15
16er Potenz	$16^2$	$16^1$	$16^0$
Stellenwert	256	16	1

Addition:  $z_{10} = 10 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 2560 + 32 + 15 = 2607$

## Aufgaben | Zahlensysteme

1. **Umwandlung von Dezimalzahlen (Tabelle 3).** Die Dezimalzahlen sind in Dualzahlen sowie in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 3	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Dezimalzahl	24	30	48	64	100	144	150	255	2000

2. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 4).** Wandeln sie die folgenden Dualzahlen in Dezimalzahlen um.

Tabelle 4	a	b	c	d	e	f
Dualzahl	100	1010	11111	110011	11110000	11111111

3. **Umwandlung von Hexadezimalzahlen (Tabelle 5).** Die Hexadezimalzahlen sind in Dezimalzahlen und in Dualzahlen umzuwandeln.

Tabelle 5	a	b	c	d	e	f
Hexadezimalzahl	68	A0	96	8F	ED	FF

4. **Umwandlung von Dualzahlen (Tabelle 6).** Die Dualzahlen sind in Hexadezimalzahlen umzuwandeln.

Tabelle 6	a	b	c	d	e	f
Dualzahlen	101010	111000	11001100	11100011	10010010	10000111

## Grundrechnungsarten

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zählen zu den Grundrechnungsarten. In diesem Abschnitt werden außerdem das Potenzieren, Radizieren (Wurzelziehen) und das Bruchrechnen behandelt. Die Einführung der Rechenregeln wird mit Zahlenbeispielen erläutert. Die daraus abgeleiteten Beispiele aus der Algebra führen in das technische Rechnen mit Formeln ein.

### Variable

In der Algebra werden **Variable** (Platzhalter) eingesetzt, die beliebige Zahlenwerte darstellen können (**Tabelle 1**). Als Variable werden meist Kleinbuchstaben verwendet.

**Tabelle 1: Schreibweisen von Variablen**

Zeichen	Beispiele
Das <b>Multiplikationszeichen</b> zwischen Zahl und Variable kann weggelassen werden.	$3 \cdot a = 3a$ $a \cdot b = ab$
Der <b>Faktor 1</b> wird meist nicht geschrieben.	$1 \cdot b = b$

### Klammerausdrücke (Klammerterm)

Mathematische Ausdrücke können mit Klammern zusammengefasst werden. Die in Klammern stehenden Werte müssen zuerst berechnet werden. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 2** beschrieben.

**Tabelle 2: Klammerausdrücke**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
<b>Pluszeichen vor der Klammer</b> Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht, können weggelassen werden. Die Vorzeichen der Glieder bleiben unverändert.	$16 + (9 - 5)$ $= 16 + 9 - 5$ $= 20$	$a + (b - c)$ $= a + b - c$
<b>Minuszeichen vor der Klammer</b> Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht, können nur aufgelöst (weggelassen) werden, wenn alle Glieder in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.	$16 - (9 - 5)$ $= 16 - 9 + 5$ $= 12$	$a - (b - c)$ $= a - b + c$

### Runden

Das Runden ist zum Beispiel erforderlich, um Platz zu sparen oder das Ergebnis einer Einheit sinnvoll anzupassen. Weit verbreitet ist das kaufmännische Runden.

Wird die **wegfallende Dezimalstelle** betrachtet, wird bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4 **abgerundet**, d. h. die voranstehende Ziffer ändert sich nicht. Bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 wird **aufgerundet**. Die voranstehende Ziffer erhöht sich.

Beispiel: 1,574 € ~ 1,57 € (abgerundet)    1,575 € ~ 1,58 € (aufgerundet)

### Strich- und Punktrechnungen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division können aufgrund ihrer Rechenzeichen in Strich- (–, +) und Punktrechnungen (·, :) unterteilt werden.

#### ■ Strichrechnungen

Zu den Strichrechnungen zählen die Addition und die Subtraktion. Die Rechenregeln für Strichrechnungen können **Tabelle 3** entnommen werden.

**Tabelle 3: Rechenregeln für die Strichrechnungen**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
<b>Vertauschungsgesetz</b> Zahlen und Buchstaben können vertauscht werden.	$3 - 9 + 7$ $= 7 + 3 - 9$ $= -9 + 3 + 7$ $= 1$	$a - b + c$ $= a + c - b$ $= -b + a + c$
<b>Zusammenfassung</b> Einzelne Glieder können zu Teilsummen zusammengefasst werden.	$3 + 7 - 9$ $= (3 + 7) - 9$	$a + b - c$ $= (a + b) - c$
<b>Summieren von Variablen</b> Nur gleiche Variable können addiert oder subtrahiert werden.	–	$18a - 3a + 2b - 5b$ $= 15a - 3b$

## Punktrechnungen

Multiplikationen und Divisionen bezeichnet man als Punktrechnungen. Die Rechenregeln für die Multiplikation sind in der **Tabelle 1** zusammengestellt.

**Tabelle 1: Rechenregeln für die Multiplikation**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
<b>Vertauschungsgesetz</b> Faktoren dürfen vertauscht werden.	$3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ $= 5 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3$	$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$ $= c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$
<b>Vorzeichenregeln</b>		
<b>Gleiche Vorzeichen</b> Haben zwei Faktoren gleiche Vorzeichen, so wird das Produkt positiv; + mal + = +; - mal - = +	$2 \cdot 5 = 10$ $(-2) \cdot (-5) = +10 = 10$	$a \cdot x = ax$ $(-a) \cdot (-x) = +ax = ax$
<b>Ungleiche Vorzeichen</b> Haben zwei Faktoren verschiedene Vorzeichen, so wird das Produkt negativ; - mal + = -; + mal - = -	$3 \cdot (-8) = -24$ $(-3) \cdot 8 = -24$	$a \cdot (-x) = -ax$ $(-a) \cdot x = -ax$
<b>Produkte mit Klammern</b>		
<b>Faktor mit Klammer</b> Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, in dem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert. Wenn möglich, sollte man zuerst den Inhalt der Klammer zusammenfassen und dann den Wert der Klammer mit dem Faktor multiplizieren.	$7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5$ $= 63$ oder: $7 \cdot (4 + 5)$ $= 7 \cdot 9 = 63$	$a \cdot (b + 2b)$ $= ab + 2ab$ $= 3ab$ oder: $a \cdot (b + 2b)$ $= a \cdot 3b$ $= 3ab$
<b>Klammer mit Klammer</b> Zwei Klammerausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Bei Zahlen können auch zuerst die Klammerausdrücke berechnet und danach kann das Produkt gebildet werden.	$(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 3 \cdot 10 + 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 10 + 5 \cdot (-7)$ $= 30 - 21 + 50 - 35$ $= 24$ oder: $(3 + 5) \cdot (10 - 7)$ $= 8 \cdot 3 = 24$	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$

Die Rechenregeln für die Division sind in **Tabelle 2** dargestellt. Das Rechenzeichen für die Division ist der Doppelpunkt (:) oder der Bruchstrich.

**Tabelle 2: Rechenregeln für die Division**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
<b>Bruchstrich entspricht Klammer</b> Der Bruchstrich fasst Ausdrücke in gleicher Weise zusammen wie eine Klammer und ersetzt das Divisionszeichen.	$= 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$
<b>Vertauschungsgesetz gilt nicht!</b> Zähler und Nenner dürfen nicht vertauscht werden.	$3 : 4 \neq 4 : 3$ $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3}$	$a : b \neq b : a$ $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$
<b>Vorzeichenregel</b>		
<b>Gleiche Vorzeichen</b> Haben Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv. + geteilt durch + = + - geteilt durch - = +	$\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$ $\frac{-15}{-3} = (-15) : (-3) = +5$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
<b>Ungleiche Vorzeichen</b> Haben Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen, so ist das Ergebnis negativ. + geteilt durch - = - - geteilt durch + = -	$\frac{15}{-3} = 15 : (-3) = -5$ $\frac{-15}{3} = (-15) : 3 = -5$	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
<b>Klammerausdrücke</b>		
<b>Klammer geteilt durch Wert</b> Ein Klammerausdruck wird durch einen Wert (Zahl, Buchstabe, Klammerausdruck) dividiert, indem man jedes einzelne Glied in der Klammer durch diesen Wert dividiert. Man kann auch den Klammerausdruck erst berechnen und danach dividieren.	$(16 - 4) : 4$ $= 16 : 4 - 4 : 4$ $= 4 - 1 = 3$ oder $(16 - 4) : 4 = 12 : 4 = 3$	$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a}{b} - 1$

### ■ Gemischte Punkt- und Strichrechnungen

Kommen in einer Rechnung sowohl Strich- als auch Punktrechnungen oder Klammern vor, so ist die Reihenfolge der Lösungsschritte zu beachten. Die Rechenregeln sind in **Tabelle 1** zusammengestellt.

**Tabelle 1: Rechenregeln für gemischte Punkt- und Strichrechnungen**

Reihenfolge der Lösungsschritte	Zahlenbeispiele	Algebraische Beispiele
1. Punktrechnungen 2. Strichrechnungen	$8 \cdot 4 - 18 \cdot 3$ $= 32 - 54$ $= -22$	$3a \cdot 2b - 4a \cdot 6b$ $= 6ab - 24ab$ $= -18ab$
	$\frac{16}{4} + \frac{20}{5} - \frac{18}{3} = 4 + 4 - 6 = 2$	$\frac{16a}{4} + \frac{3b}{b} - \frac{6c}{2c} = 4a + 3 - 3 = 4a$
<b>Klammerausdrücke sowie gemischte Punkt- und Strichrechnungen:</b> 1. Klammern 2. Punktrechnungen 3. Strichrechnungen	$8 \cdot (3 - 2) + 4 (16 - 5)$ $= 8 \cdot 1 + 4 \cdot 11$ $= 8 + 44 = 52$	$a \cdot (3x + 5x) - b \cdot (12y - 2y)$ $= a \cdot 8x - b \cdot 10y$ $= 8ax - 10by$

### Aufgaben | Gemischte Punkt- und Strichrechnung

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 5 sind zu berechnen und auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma zu runden.

1. a) $217,583 - 27,14 \cdot 0,043 + 12$ c) $7,1 + 16,27 + 14,13 \cdot 17,0203$ e) $857 - 3,52 \cdot 97,25 - 16,386 + 1,1$	b) $16,25 + 14,12 \cdot 6,21$ d) $74,24 - 1,258 \cdot 12,8$ f) $119,2 + 327,351 - 7,04 \cdot 7,36$
2. a) $17,13 + 13,25 + 15,35 : 2$	b) $34,89 + 241,17 : 21,35 - 12,46 : 2,2$
3. a) $243 : 0,04 - 92,17 - 13,325 + 124,3 : 3,5$	b) $507 : 0,05 - 261,17 - 114,325 + 142,3 : 18,4$
4. a) $18 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$ c) $\frac{-96}{16} + \frac{65}{-15}$	b) $120 : (-6) - (-15) : 5$ d) $\frac{148}{37} - \frac{-85}{17}$
5. a) $\frac{24,75 + 15}{12,6} + \frac{38,7 - 2,08}{0,36} - \frac{44,2 \cdot 13,1}{20,05 - 1,7}$ c) $(23,7 - 2,8) \cdot \frac{15,1 - 3,7}{16,9}$	b) $34,2 \cdot \frac{23,4 - 8,6}{2,4} - \frac{13,8 + 22,7}{27 - 3,5} \cdot 20,6$ d) $\frac{25 \cdot (20,1 - 16,58)}{(34,85 - 2,97) \cdot 4,6}$

Die Ergebnisse der Aufgaben 6 bis 8 sind zu berechnen.

6. a) $3a \cdot 4b - 10a \cdot 2b$ c) $-8m \cdot 2n + 7,5m \cdot (-2n)$	b) $25x \cdot (-10y) + 13x \cdot (-5y)$ d) $(-16a) \cdot (-5c) - (-5a) \cdot (-2c)$
7. a) $\frac{30x}{10y} + \frac{15x}{2y}$ c) $\frac{7,5x}{2,5y} + \frac{33x}{22y}$	b) $\frac{12m}{15n} - \frac{30m}{1,5n}$ d) $\frac{-2x}{-8y} - \frac{-15x}{-60y}$
8. a) $-3a \cdot (8x - 5x) - 2a \cdot (20x - 12x)$	b) $-3x \cdot (8x - 5x) + 3x \cdot (-12x - 33x)$




## Bruchrechnen

Der Bruchterm ist ein Zahlenverhältnis und besteht aus dem Zähler und dem Nenner. Der Nenner ist die Bezugsgröße und gibt die Gesamtheit der Teile an. Der Zähler bezeichnet die Anzahl der Teile.

$$\text{Bruchterm} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Das Bruchrechnen wird in der technischen Mathematik z. B. bei Teilkopf-, Kegel- oder Wechselläderberechnungen angewandt. Es wird hier nur so weit behandelt, als es für die genannten Anwendungen notwendig ist. In **Tabelle 1** sind verschiedene Arten von Brüchen aufgeführt.

**Tabelle 1: Brucharten**

Art	Beispiel	Kennzeichen	Wert	Bild
Echter Bruch	$\frac{1}{3}$	Zähler < Nenner	<1	
Unechter Bruch	$\frac{5}{4}$	Zähler > Nenner	>1	
Gemischte Zahl	$1\frac{1}{4}$	Ganze Zahl und ein echter Bruch	>1	
Dezimalbruch	0,75	Dezimalkomma	<1	

### ■ Erweitern, Kürzen und Umwandlung von Bruchtermen

Brüche können erweitert, gekürzt oder umgewandelt werden. Dabei bleibt ihr Wert unverändert (**Tabelle 2**).

**Tabelle 2: Rechenregeln für Bruchterme**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel
<b>Erweitern</b> Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert.	$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{6}{24}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
<b>Kürzen</b> Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (bzw. denselben Buchstaben) dividiert.	$\frac{6}{24} = \frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$	$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{(a \cdot c):c}{(b \cdot c):c} = \frac{a}{b}$
<b>Summen oder Differenzen</b> Summen oder Differenzen sind vor dem Kürzen oder Erweitern zu berechnen.	$\frac{18-24}{260+20} = \frac{-6}{280} = \frac{-3}{140} = -\frac{3}{140}$	$\frac{c-b}{c+b}$ kann nicht gekürzt werden.
<b>Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch</b> Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.	$\frac{3}{8} = 3:8 = 0,375$	-
<b>Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch</b> Ein endlicher Dezimalbruch wird in einen Bruch verwandelt, indem man in den Zähler alle Ziffern nach dem Komma schreibt. Der Nenner erhält eine 1 mit so vielen Nullen, wie der Zähler Stellen hat.	$0,48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$	-

### Aufgaben | Bruchrechnen

- Die folgenden Brüche sind so zu erweitern, dass sich der Nenner 24 ergibt.  
a)  $\frac{3}{4}$     b)  $\frac{1}{2}$     c)  $\frac{5}{4}$     d)  $\frac{5}{12}$     e)  $\frac{6}{8}$     f)  $\frac{7}{6}$     g)  $\frac{8}{3}$
- Die folgenden Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen.  
a)  $\frac{3}{21}$     b)  $\frac{4}{48}$     c)  $\frac{33}{66}$     d)  $\frac{36}{45}$     e)  $\frac{40}{132}$     f)  $\frac{210}{315}$     g)  $\frac{84}{588}$
- Die folgenden Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln.  
a)  $\frac{3}{21}$     b)  $\frac{4}{48}$     c)  $\frac{33}{66}$     d)  $\frac{36}{45}$     e)  $\frac{40}{132}$     f)  $\frac{210}{315}$     g)  $\frac{84}{336}$
- Die folgenden Dezimalbrüche sind in Brüche zu verwandeln.  
a) 0,9375    b) 0,375    c) 0,85    d) 0,2    e) 0,333    f) 0,125    g) 0,25

## Potenzieren

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren kann abgekürzt geschrieben werden. Die abgekürzte Schreibweise nennt man Potenz; der Rechenvorgang wird als Potenzieren bezeichnet. Eine Potenz (**Bild 1**) besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Man unterscheidet Potenzen mit positiven und Potenzen mit negativen Exponenten.

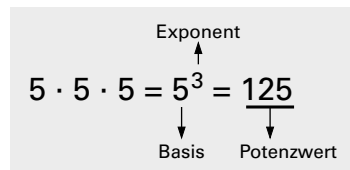


Bild 1: Potenz

### ■ Potenzen mit positiven Exponenten

#### ● Beispiele:

Fläche des Quadrats (**Bild 2**)  $A = l \cdot l = l^2$   
 $= 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} = (5 \text{ mm})^2 = 25 \text{ mm}^2$

Volumen des Würfels (**Bild 3**)  $V = l \cdot l \cdot l = l^3$   
 $= 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} = (5 \text{ mm})^3$   
 $= 125 \text{ mm}^3$

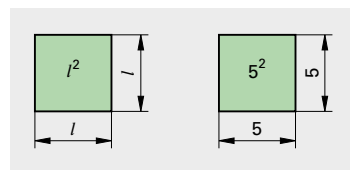


Bild 2: Quadrat

Auch Produkte, Brüche oder Klammerausdrücke können die Basis von Potenzen sein.

#### ● Beispiele:

**Produkt:**  $(5a)^2 = 5a \cdot 5a = 25a^2$

**oder**  $(5a)^2 = 5^2 \cdot a^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 25a^2$

**Bruch:**  $\frac{3^3}{b^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{b \cdot b \cdot b} = \frac{27}{b^3}$

**Klammer:**  $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

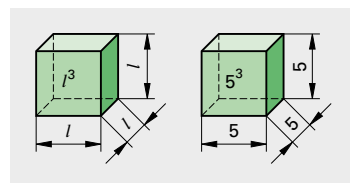


Bild 3: Würfel

### ■ Potenzen mit negativen Exponenten

Eine Potenz, die im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

#### ● Beispiele:

$\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$      $15^{-3} = \frac{1}{15^3}$ ;     $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ;     $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$ ;     $\text{g} \cdot (\text{kW} \cdot \text{h})^{-1} = \frac{\text{g}}{\text{kW} \cdot \text{h}}$

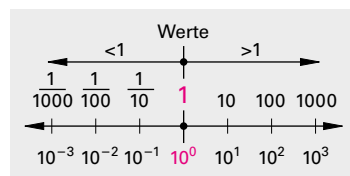


Bild 4: Zehnerpotenzen

### ■ Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 4 und Tabelle 1**).

Die Zahl vor der Zehnerpotenz wird meist im Bereich zwischen 1 und 10 angegeben.

#### ● Beispiele:

$4\,200\,000 = 4,2 \cdot 1\,000\,000 = 4,2 \cdot 10^6$   
 $0,000\,0042 = 4,2 \cdot 0,000\,001 = 4,2 \cdot 10^{-6}$   
 Die Schreibweise  $4,2 \cdot 10^6$  ist übersichtlicher als  $0,42 \cdot 10^7$  oder  $42 \cdot 10^5$ .

Tabelle 1: Zehnerpotenzen

Schreibweise als		
ausgeschriebene Zahl	Zehnerpotenz	Vorsatzname
1000000	$10^6$	Mega (M)
100000	$10^5$	–
10000	$10^4$	–
1000	$10^3$	Kilo (k)
100	$10^2$	Hekto (h)
10	$10^1$	Deka (da)
1	$10^0$	–
0,1	$10^{-1}$	Dezi (d)
0,01	$10^{-2}$	Zenti (c)
0,001	$10^{-3}$	Milli (m)
0,0001	$10^{-4}$	–
0,00001	$10^{-5}$	–
0,000001	$10^{-6}$	Mikro (μ)

Beim Rechnen mit Potenzen gelten besondere Regeln (**Tabelle 1**):

<b>Tabelle 1: Potenzieren</b>			
<b>Rechenregel</b>	<b>Zahlenbeispiel</b>	<b>Algebraisches Beispiel</b>	<b>Formel</b>
<p><b>1. Addition und Subtraktion von Potenzen</b></p> <p>Potenzen dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl denselben Exponenten als auch dieselbe Basis haben.</p>	$2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2$ $= 5^2 \cdot (2 + 4)$ $= 5^2 \cdot 6$ $\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	$a^3 + a^3 = 2a^3$ $\frac{7}{d^n} - \frac{4}{d^n} = \frac{3}{d^n} = 3 \cdot d^{-n}$	$ax^n + bx^n$ $= (a + b) \cdot x^n$ $\frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^n} = \frac{a+b}{x^n}$ $= (a + b) \cdot x^{-n}$
<p><b>2. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis</b></p> <p>Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.</p>	$3^2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 3^5$ <p>oder:</p> $3^2 \cdot 3^3$ $= 3^{(2+3)} = 3^5$	$x^4 \cdot x^2$ $= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ $= x^6$ <p>oder:</p> $x^4 \cdot x^2$ $= x^{(4+2)} = x^6$	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
<p><b>3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten</b></p> <p>Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.</p>	$4^2 \cdot 6^2$ $= (4 \cdot 6)^2$ $= 24^2$ $= 576$	$6x^2 \cdot 3y^2$ $= 18x^2y^2$ $= 18(x \cdot y)^2$	$x^n \cdot y^n = (xy)^n$
<p><b>4. Division von Potenzen mit gleicher Basis</b></p> <p>Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.</p>	$\frac{4^3}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4$ <p>oder:</p> $4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$	$\frac{m^3}{m^2} = \frac{m \cdot m \cdot m}{m \cdot m} = m$ <p>oder:</p> $m^3 : m^2 = \frac{m^3}{m^2} = m^3 \cdot m^{-2}$ $= m^{3-2} = m^1 = m$	$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n}$ $= x^{m-n}$
<p><b>5. Division von Potenzen mit gleichen Exponenten</b></p> <p>Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.</p>	$\frac{15^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2$ $= 25$	$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
<p><b>6. Multiplikation von Potenzen mit einem Faktor</b></p> <p>Werden Potenzen mit einem Faktor multipliziert, so muss zuerst der Wert der Potenz berechnet werden.</p>	$6 \cdot 10^3$ $= 6 \cdot 1000$ $= 6000$ $7 \cdot 10^{-2} = \frac{7}{100} = 0,07$	-	-
<p><b>7. Potenzwert mit dem Exponenten Null</b></p> <p>Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Wert 1.</p>	$\frac{10^4}{10^4} = 10^{4-4} = 10^0 = 1$	$(m + n)^0 = 1$	$a^0 = 1$ $a \neq 0$

## Radizieren (Wurzelziehen)

Das Radizieren<sup>1)</sup> oder Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden und dem Wurzelexponenten (**Bild 1**). Der Radikand steht unter dem Wurzelzeichen; aus dieser Zahl wird die Wurzel gezogen. Der Wurzelexponent steht über dem Wurzelzeichen und gibt an, in wie viel gleiche Faktoren der Radikand aufgeteilt werden soll.

Eine Wurzelrechnung kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Der Radikand erhält im Exponenten einen Bruch. Der Zähler entspricht dem Exponenten des Radikanden, der Nenner entspricht dem Wurzelexponenten.

**Beispiel:**  $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1} = 9^{\frac{1}{2}}$

### ■ Quadratwurzel

$\sqrt{16}$  (sprich Quadrat-Wurzel aus 16 oder Wurzel aus 16) bedeutet, man sucht eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Wert 16 ergibt.

**Beispiel:**  $\sqrt{16} = 4$ , denn  $4 \cdot 4 = 16$

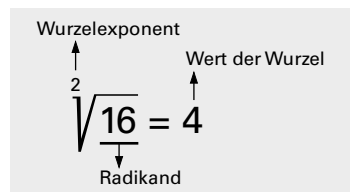
Der Wurzelexponent 2 bei der Quadratwurzel wird meist weggelassen.

**Beispiel:**  $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$        $\sqrt[2]{4^2} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{16} = 4$

### ■ Kubikwurzel

$\sqrt[3]{27}$  (sprich 3. Wurzel aus 27 oder Kubikwurzel aus 27) bedeutet, dass man eine Zahl sucht, die dreimal mit sich selbst multipliziert den Wert 27 ergibt.

**Beispiel:**  $\sqrt[3]{27} = 3$ , denn  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$



**Bild 1: Darstellung einer Wurzel**

### Schreibweisen einer Wurzel

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

### Quadratwurzel

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

### Kubikwurzel

$$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

**Tabelle 1: Radizieren**

Rechenregel	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Formel
<b>1. Addition und Subtraktion von Wurzeln</b> Wurzeln dürfen nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben. Man addiert (subtrahiert) die Faktoren und behält die Wurzel bei.	$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$ $= (2+3)\sqrt{6}$ $= 5\sqrt{6}$	$8\sqrt{m} - 3\sqrt{m}$ $= (8-3)\sqrt{m}$ $= 5\sqrt{m}$	$a\sqrt{m} + b\sqrt{m}$ $= (a+b)\sqrt{m}$
<b>2. Radizieren eines Produktes</b> Ist der Radikand ein Produkt, so kann die Wurzel entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor gezogen werden.	$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$ oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ $= 3 \cdot 4 = 12$	$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
<b>3. Radizieren einer Summe oder Differenz</b> Ist der Radikand eine Summe oder eine Differenz, so kann nur aus dem Ergebnis die Wurzel gezogen werden.	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16}$ $= \sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{(a-b)}$	$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{(a-b)}$
<b>4. Radizieren eines Quotienten</b> Ist der Radikand ein Quotient (Bruch), so kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner getrennt gezogen werden.	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{0,36} = 0,6$ oder $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} = 0,6$	$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

1) radix (lateinisch) Wurzel

**Aufgaben | Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen)**

**1. Potenzschreibweise.** Die Ausdrücke der Aufgaben a bis f sind in Potenzform zu schreiben.

a)  $4a \cdot 2a \cdot a$

b)  $16 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm}$

c)  $2,5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 1,3 \text{ m}$

d)  $\frac{6a}{2} \cdot \frac{5b}{3a} \cdot \frac{1}{5}b$

e)  $0,5 \text{ cm} \cdot \frac{1}{10} \text{ cm} \cdot \frac{3}{4} \text{ cm}$

f)  $16 \text{ m}^2 : 8 \text{ m}$

**2. Zehnerpotenzen.** Die Zahlen sind in Zehnerpotenzen zu verwandeln.

a) 100; 1 000; 0,01; 0,001; 1 000 000; 1/1 000 000

b) 55 420; 1 647 978; 356 763; 33 200

c) 0,033; 0,756; 0,0021; 0,000 02; 0,000 000 1

d) 1/10; 5/100; 7/1 000; 33/100; 321/1 000

**3. Potenzschreibweise.** Die folgenden Zahlen sind in Zehnerpotenzen umzuformen.

a) Lichtgeschwindigkeit  $c = 299\,790\,000 \text{ m/s}$

b) Umfang des Äquators  $U = 40\,076\,594 \text{ m}$

c) Mittlerer Abstand der Erde von der Sonne  $R = 149,5 \text{ Millionen km}$

d) Oberflächen der Erde  $O = 510\,100\,933 \text{ km}^2$

**4. Addition und Subtraktion.** Die Potenzen sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a)  $5b^3 + 7b^3 + 3b^3$

b)  $9m^3 - 9n^3 + 12n^3 - 5m^3 - n^3$

c)  $15x^4y - 3x^2y^3 - 5x^4y$

d)  $2,6a^2 + 5,9a^3 - 3,1a^3 + 19,7a^2 - a^3$

**5. Multiplikation und Division.** Die Potenzen sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a)  $4^2 \cdot 4^3$

b)  $a^5 \cdot a^4$

c)  $2x^2 \cdot 4x \cdot 5x^3$

d)  $0,5b^3 \cdot 1,3b^2$

e)  $441x^6 : 21x^2$

f)  $51a^4b^3 : 17a^2b^3$

g)  $\frac{49^3}{7^3}$

h)  $\frac{57^2}{19^2}$

i)  $\frac{6,8a^2}{0,17a^2}$

k)  $\frac{(4a)^x}{a^x}$

**6. Berechnung von Wurzeln.** Folgende Wurzeln sind zu berechnen bzw. vereinfacht zu schreiben.

a)  $\sqrt{49}$ ;  $\sqrt{121}$ ;  $\sqrt[3]{1000}$ ;  $\sqrt{1,21}$ ;  $\sqrt{0,36}$

b)  $\sqrt[3]{0,008}$ ;  $\sqrt{a^2}$ ;  $\sqrt{9a^4}$ ;  $\sqrt{\frac{25}{49}}$ ;  $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ ;  $\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}}$

**7. Berechnung von Wurzeln.** Die Ergebnisse sind auf die zweite Stelle zu runden.

a)  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{47}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{4}}$ ;  $\sqrt{\frac{121}{9}}$

b)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{49}$ ;  $\sqrt[3]{16}$ ;  $\sqrt{\frac{1}{121}}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

**8. Wurzeln mit Variablen.** Wie groß ist  $\sqrt{x^2 + y^2}$  für die folgenden Werte?

a)  $x = 8$ ;  $y = 6$

b)  $x = 10 \text{ m}$ ;  $y = 7,5 \text{ m}$

c)  $x = 0,48 \text{ cm}$ ;  $y = 0,36 \text{ cm}$

Wie groß ist  $\sqrt{c^2 - b^2}$  für die folgenden Werte?

a)  $c = 15$ ;  $b = 12$

b)  $c = 2,5 \text{ m}$ ;  $b = 1,5 \text{ m}$

c)  $c = 0,2 \text{ dm}$ ;  $b = 0,16 \text{ dm}$

**9. Addition und Subtraktion.** Die Wurzeln sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.

a)  $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ ; b)  $2\sqrt{m} + 7\sqrt{m}$ ; c)  $2m\sqrt{b} + 3n\sqrt{b}$  d)  $5\sqrt{9} - 3\sqrt{9}$ ; e)  $c\sqrt{c} - 2\sqrt{c}$

**10. Multiplikation und Division.** Die Ausdrücke sind zu multiplizieren bzw. zu dividieren.

a)  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

b)  $\sqrt{42} \cdot \sqrt{7}$

c)  $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{20a}$

d)  $\sqrt{16} \cdot 49$

e)  $\sqrt{4x^2} \cdot y^2$

f)  $\sqrt{81m^4} \cdot n^2$

g)  $\sqrt{32} : \sqrt{8}$

h)  $\sqrt{7ax} : \sqrt{7a}$

## Allgemeine Berechnungen

### Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)

Mit der Schlussrechnung wird, ausgehend von einer bekannten Größe (z. B. Stückzahl, Masse u. a.), ein Vielfaches oder ein Teil berechnet.

**Bezeichnungen:**

$A_m$  Ausgangsmenge, z. B. St  $A_w$  Ausgangswert, z. B. kg  
 $E_m$  Endmenge, z. B. St  $E_w$  Endwert, z. B. kg

#### Schlussrechnung für direkt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich im gleichen Verhältnis, d. h. sie sind direkt proportional.

**Beispiel:** 25 Distanzplatten haben eine Masse  $m = 2800$  g.  
 Welche Masse haben 6 Distanzplatten (**Bild 1**)?

**Grundaussage:** Die Menge  $A_m = 25$  Distanzplatten hat die Masse  $A_w = 2800$  g.

**Berechnung des Wertes für die Menge  $A = 1$  Stück (St):**

1 Distanzplatte hat die Masse  $\frac{A_w}{A_m} = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} = 112 \frac{\text{g}}{\text{St}}$

**Berechnung des Endwertes  $E_w$  für die Endmenge  $E_m$ :**

$E_m = 6$  Distanzplatten haben die Masse  $E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} \cdot 6 \text{ St} = 672 \text{ g}$

#### Schlussrechnung für indirekt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich in umgekehrtem Verhältnis, d. h., sie sind indirekt proportional.

**Beispiel:** Für die Montage von 12 Kettensägen benötigen 4 Mitarbeiter 3 Stunden. Wie viel Stunden benötigen 6 Mitarbeiter für die gleiche Anzahl Sägen (**Bild 2**)?

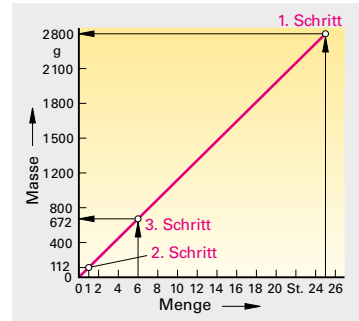
**Grundaussage:** Die Menge  $A_m = 4$  Mitarbeiter benötigen die Zeit  $A_w = 3$  Stunden.

**Berechnung des Wertes für die Menge  $A = 1$  Mitarbeiter:**

1 Mitarbeiter benötigt  $A_m \cdot A_w = 4 \cdot 3$  Stunden = 12 Stunden

**Berechnung des Endwertes  $E_w$  für die Endmenge  $E_m$ :**

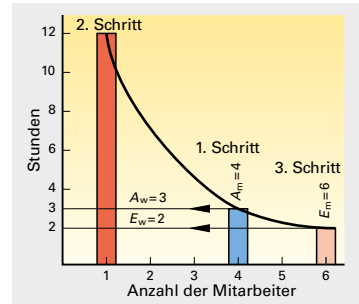
$E_m = 6$  Mitarbeiter benötigen die Zeit  $E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m} = \frac{4 \text{ Mitarbeiter} \cdot 3 \text{ h}}{6 \text{ Mitarbeiter}} = 2 \text{ h}$



**Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis**

**Endwert bei direkt proportionalem Verhältnis**

$$E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m$$



**Bild 2: Indirekt proportionales Verhältnis**

**Endwert bei indirekt proportionalem Verhältnis**

$$E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m}$$

### Aufgaben | Schlussrechnung

- Werkstoffpreis.** Eine Gießerei berechnet für Stahlguss einen Preis von 1,08 €/kg. Wie viel kosten 185 Deckel mit einer Masse von je 1,35 kg?
- Schutzgasverbrauch.** Die Schweißnaht an einem Schiff ist 78 m lang. Nach 23 m geschweißter Naht wurde ein Schutzgasverbrauch von 640 l festgestellt. Wie viel l Schutzgas sind für die gesamte Fertigstellung der Naht erforderlich?
- Notstromaggregat.** Im 3-stündigen Betrieb verbrauchen 2 Notstromaggregate 120 l Kraftstoff. Wie lange können 3 Aggregate mit einem Treibstoffvorrat von 240 l betrieben werden?
- Photovoltaik (PV) – Anlage.** Für das Verlegen von Solarmodulen benötigt ein Mitarbeiter 4,5 Stunden pro kWp (Kilowatt-Peak)<sup>1)</sup>. Die Anlage hat eine Leistung von 8,1 kWp. Wie lange benötigen 3 Handwerker zum Verlegen der Solarmodule?
- Rundstahl.** In einer Walzenstraße wird Rundstahl mit einer Querschnittsfläche von 200 mm<sup>2</sup> und einer Länge von 4500 mm hergestellt. Wie viel Meter Rundstahl erhält man, wenn bei gleicher Masse die Querschnittsfläche auf 100 mm<sup>2</sup> verkleinert wird?

1) Die Einheit kWp gibt die Spitzenleistung von Solarmodulen unter Testbedingungen an.

## Prozentrechnung

Damit man sich Größen und Werte vorstellen und sie untereinander vergleichen kann, bezieht man sie auf die Zahl 100. Den betrachteten Wert drückt man als Prozentsatz aus.

### Bezeichnungen:

$P_s$  Prozentsatz    %                       $P_w$  Prozentwert    z. B. €  
 $G_w$  Grundwert    z. B. €

#### 1. Beispiel:

Wie groß ist der Prozentwert  $P_w$  in € für einen Grundwert  $G_w = 500$  € bei einem Prozentsatz  $P_s = 40$  % (Bild 1)?

**Lösung:**  $P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s = \frac{500 \text{ €}}{100\%} \cdot 40\% = 200 \text{ €}$

#### 2. Beispiel:

Von 600 gefertigten Zahnriemen sind 17 Ausschuss. Der Prozentsatz  $P_s$  für den Ausschuss ist zu berechnen.

**Lösung:**  $P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s$ ;  $P_s = \frac{100\%}{G_w} \cdot P_w = \frac{100\%}{600} \cdot 17 = 2,83\%$

#### 3. Beispiel:

Ein schadhafter Behälter verlor 38,84 Liter Flüssigkeit, das sind 16 % der Flüssigkeit. Wie viel Liter Flüssigkeit enthielt der Behälter?

**Lösung:**  $P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s$ ;  $G_w = \frac{100\%}{P_s} \cdot P_w = \frac{100\%}{16\%} \cdot 38,84 \text{ l} = 242,75 \text{ l}$

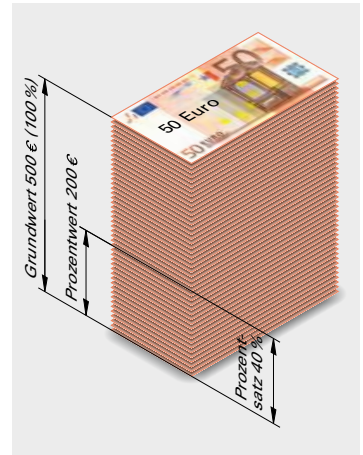


Bild 1: Direkt proportionales Verhältnis

### Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w}{100\%} \cdot P_s$$

## Aufgaben | Prozentrechnung

- Festplatte.** Eine Bilddatei benötigt 15 MByte Speicherplatz auf einer Festplatte. Wie viel Prozent Festplattenspeicher werden für das Bild auf einer 10-GByte-Festplatte beansprucht?
- Scanzeit.** Ein Flachbettscanner benötigt für den Scanvorgang einer Fotografie 4 min. Das Nachfolgemodell des Scanners soll bei dem gleichen Arbeitsauftrag 24 % schneller sein. Berechnen Sie die Scanzeit des neuen Scannermodells.
- Rauchgasentschwefelung.** In den Rauchgasen eines Kraftwerkes lag der Anteil des Schwefeldioxids 62 % unter dem zulässigen Grenzwert. Durch den Einbau einer zusätzlichen Rauchgasentschwefelungsanlage konnte der Wert auf 20 % des Grenzwertes gesenkt werden. Um wie viel Prozent verringerte die Rauchgasentschwefelungsanlage den Ausstoß an Schwefeldioxid des Kraftwerkes?
- Gehäusegewicht.** Um wie viel Prozent vermindert sich das Gewicht eines Gehäuses, das bisher aus 1 mm dickem Stahlblech (Dichte  $\rho = 7,85 \text{ kg/dm}^3$ ) bestand und nun aus 2 mm dickem Aluminiumblech (Dichte  $\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$ ) hergestellt werden soll?
- Zugfestigkeit.** Durch Vergüten wurde die Zugfestigkeit eines Stahles um 42 % auf  $1250 \text{ N/mm}^2$  erhöht. Wie groß war die Zugfestigkeit des Werkstoffes vor der Wärmebehandlung?
- Lotherstellung.** In einer Schmelze sollen 150 kg des Weichlotes L-Sn63Pb37 hergestellt werden. Berechnen Sie die Einzelmassen an Zinn und Blei in der Schmelze.
- Aktienfonds.** Vor mehr als einem Jahr wurden 15 Anteile eines Technologiefonds zu einem Preis von 135 € mit einem Ausgabeaufschlag von 5,25 % gekauft. Der Fonds hat vom Kauftag bis heute eine Wertsteigerung von 45 %.
  - Welcher Gesamtbetrag musste für die 15 Anteile bezahlt werden?
  - Welcher Gewinn wäre bei einem Verkauf zu erwarten?