



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Metallberufe

Roland Gomeringer, Meßstetten
Volker Menges, Lichtenstein
Stefan Oesterle, Amtzell

Claudius Scholer, Metzingen
Andreas Stephan, Marktoberdorf
Falko Wieneke, Essen

Formelsammlung Metall **PLUS+**

2. Auflage

Lektorat:

Roland Gomeringer, Meßstetten

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern unverändert sind.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt

Umschlag: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar

Umschlagfotos: Gühring KG, Albstadt, und Titelbild Tabellenbuch Metall

Druck: RCOM Print GmbH, 97222 Rimpar

Europa-Nr.: 11947

ISBN 978-3-8085-1625-6

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Vorwort

Das vorliegende Buch **Formelsammlung Metall PLUS+** enthält neben Formeln für die Metalltechnik auch mathematische Grundlagen und Formeln der Physik. Die Formeln sind für wichtige Anwendungen aufbereitet und umgestellt.

- So sind in den ersten beiden Kapiteln die **Grundlagen der Mathematik und Physik** dargestellt.
- Die Formeln der **Mechanik und Festigkeitslehre** werden ergänzt durch zeichnerische Lösungsverfahren.
- Die **Arbeitsplanung** enthält zusätzlich das **Qualitätsmanagement** und die **Kalkulation**.
- Die **Fertigungstechnik** ist mit allen gängigen Verfahren vertreten.
- Bei der **CNC-Technik** wird die unabhängige PAL-Befehlskodierung verwendet.

Als weiteres **PLUS+** wurden folgende Inhalte **in der 2. Auflage** neu aufgenommen:

- Die technische Mathematik erhält Grundlagen der **Differenzial- und Integralrechnung**.
- Die technische Physik wird erweitert durch Berechnungen der **Schwingungen** und von verschiedenen **Pendelarten**.
- Die technische Physik erhält das Kapitel **Optik** und wird mit den Inhalten **Lichtausbreitung, Reflexion und Brechung** behandelt.
- Die Arbeitsplanung wird ergänzt durch die **Netzplantechnik, Bestellmengen und optimaler Losgröße** sowie durch die **Amortisationsrechnung** und eine Betrachtung der **Plankosten**.

Diese Formelsammlung ist als Nachschlagewerk für Prüfungen und als Hilfe bei der Arbeit mit Fachbüchern und Tabellenbüchern gedacht.

Viele Inhalte sind für die metalltechnische Berufsausbildung wichtig. Weitergehende Inhalte, wie z. B. die Differenzial- und Integralrechnung, werden entweder in der technischen Weiterbildung (Meister und Techniker) oder in den Berufskollegs und im Beruflichen Gymnasium zusätzlich genutzt. Auch für Praktiker aus Handwerk und Industrie sowie für Studenten des Maschinenbaus ist diese Formelsammlung wertvoll.

Autoren und Verlag sind allen Nutzern dieser Formelsammlung für Hinweise und Verbesserungsvorschläge an lektorat@europa-lehrmittel.de dankbar.

Frühjahr 2020

Autoren und Verlag

Technische Mathematik

Grundlagen

Mathematische Zeichen.....	4
Besondere Zahlen und Funktionswerte	5
Griechisches Alphabet	6
Grundrechenarten und Rechenregeln.....	7
Lineare Funktion – Gerade	11
Quadratische Funktion – Parabel	12
Binome, Quadratische Gleichung.....	13

Differenziale, Integrale, Gleichungssysteme

Differentialrechnung	14
Integralrechnung	15
Gleichungssysteme, Lösungsverfahren	16

Anwendungen

Größen und Einheiten	18
Rechnen mit Formeln.....	23
Rechnen mit Verhältnissen	25
Prozent-, Zinsrechnung	26
Satz des Pythagoras	28
Winkelfunktionen	29

Längen, Flächen, Volumen

Teilung von Längen	30
Gestreckte Längen.....	31
Flächen.....	32
Volumen, Oberfläche	38
Volumen zusammengesetzter Körper	43

Technische Physik

Bewegung

Geradlinige Bewegung	44
Kreisförmige Bewegung.....	46
Geschwindigkeiten an Maschinen	48
Schwingung	50
Pendel	51

Wärmelehre und Fluidmechanik

Längen-, Volumenänderung	54
Zustandsänderung von Gasen	55
Wärmemenge bei Temperaturänderung.....	56
Druck, Überdruck, Luftdruck, absoluter Druck	58
Auftriebskraft, Druckübersetzung	59
Kolbenkräfte, Kolbengeschwindigkeit.....	60
Luftverbrauch, Hydraulische Presse	61
Massenerhaltungssatz	62
Energiehaltungssatz, Satz von Bernoulli.....	63

Elektrotechnik

Ohmsches Gesetz und Leiterwiderstand	64
Reihen- und Parallelschaltung	65
Gemischte Schaltungen	66
Elektrische Leistung	67
Elektrische Arbeit, Transformator.....	68
Kondensator	69
Gleichstrom- und Wechselstrommotor.....	70
Synchron- und Asynchronmotor.....	71

Optik

Reflexion	72
Brechung	74

Mechanik und Festigkeitslehre

Mechanik

Darstellung von Kräften	76
3-Kräfte- und Schlusslinienverfahren	78

Gleichgewicht in der Ebene.....	79
Drehmoment	81
Kräfte und Momente bei Beschleunigung	83
Trägheitsmomente	84
Federkraft, Fliehkraft, Zentripetalkraft	85
Reibung	86
Reibung an der Schiefen Ebene	87
Reibung an der Backenbremse.....	88
Mechanische Arbeit, Feste Rolle	89
Flaschenzug, Keil	90
Schraube, Räderwinde	91
Zahnradmaße	92
Übersetzungen	93
Potenzielle und kinetische Energie	95
Leistung, Wirkungsgrad	96

Festigkeitslehre

Begriffe, Sicherheiten	98
Zug- und Druckbeanspruchung	100
Flächenpressung, Abscherung	101
Torsionsbeanspruchung	102
Biegebeanspruchung	103
Biegemomente und Durchbiegung	104
Knickung	105
Widerstandsmomente	106

Arbeitsplanung und Kalkulation

Toleranzen und Passungen	109
Qualitätsmanagement	111
Durchlaufzeit	114
Netzplantechnik	115
Auftragszeit	116
Belegungszeit	117
Bestellmengen-, Losgrößeroptimierung.....	118
Kalkulation	120
Maschinenstundensatzberechnung	125
Teilkostenrechnung, Gewinnschwelle.....	126
Deckungsbeitrag	127
Kostenvergleichsrechnung	127
Amortisations-, Rentabilitätsrechnung	128
Plankostenrechnung	129

Fertigungstechnik

Drehzahlprogramm	130
Drehen, Hauptnutzungszeiten	131
Kegeldrehen, Rautiefe	135
Drehen, Kräfte und Leistungen	136
Fräsen, Hauptnutzungszeiten	137
Teilen mit Teilkopf	140
Fräsen, Kräfte und Leistungen	141
Bohren und Reiben, Hauptnutzungszeiten	142
Bohren, Kräfte und Leistungen	144
Schleifen, Hauptnutzungszeiten	145
Abtragen	147
Scherschneiden	148
Biegen	150
Tiefziehen	151
Schweißen	154

CNC-Technik

PAL-Drehen	156
PAL-Fräsen	163

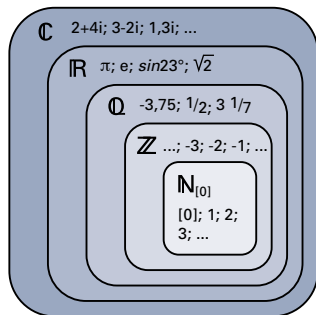
Sachwortverzeichnis

Grundlagen

Mathematische Zeichen

Math. Zeichen	Sprechweise	Math. Zeichen	Sprechweise
\approx \doteq \dots ∞	ungefähr gleich, rund, etwa entspricht und so weiter unendlich	\sim a^x $\sqrt{\quad}$ $\sqrt[n]{\quad}$	proportional a hoch x, x-te Potenz von a Quadratwurzel aus n-te Wurzel aus
$=$ \neq $\stackrel{\text{def}}{=}$ $<$	gleich ungleich ist definitionsgemäß gleich kleiner als	$ x $ \perp \parallel $\uparrow\uparrow$	Betrag von x senkrecht zu ist parallel zu gleichsinnig parallel
\leq $>$ \geq $+$	kleiner oder gleich größer als größer oder gleich plus	$\uparrow\downarrow$ \sphericalangle \triangle \cong	gegensinnig parallel Winkel Dreieck kongruent zu
$-$ \cdot $\div, /, :$ Σ	minus mal, multipliziert mit durch, geteilt durch, zu, pro Summe	Δx $\%$ ‰	Delta x (Differenz zweier Werte) Prozent, vom Hundert Promille, vom Tausend
log lg ln e	Logarithmus (allgemein) dekadischer Logarithmus natürlicher Logarithmus Eulersche Zahl ($e = 2,718281\dots$)	$(, [, \{ \}$ π	runde, eckige, geschweifte Klammer auf und zu pi (Kreiszahl = 3,14159 ...)
sin cos tan cot	Sinus Kosinus Tangens Kotangens	\overline{AB} \widehat{AB} a', a'' a_1, a_2	Strecke AB Bogen AB a Strich, a zwei Strich a eins, a zwei

Zahlenmengen



Bezeichnungen

- \mathbb{N} Natürliche Zahlen, positive ganze Zahlen [mit Null]
- \mathbb{Z} Ganze Zahlen, \mathbb{N} plus negative ganze Zahlen
- \mathbb{Q} Rationale Zahlen (Quotienten), \mathbb{Z} plus Bruch- und Dezimalzahlen
- \mathbb{R} Reelle Zahlen, \mathbb{Q} plus nicht durch Brüche darstellbare Zahlen
- \mathbb{C} Komplexe Zahlen (Complex) aus Realteil u. Imaginärteil; mit $i^2 = -1$
- \mathbb{C} ist Teilmenge von

Zusammenhang der Zahlenmengen

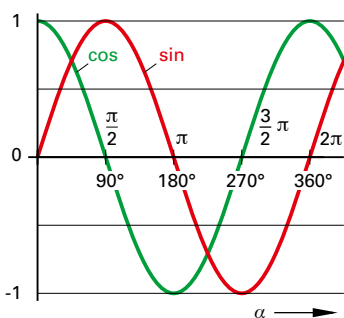
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Grundlagen

Besondere Zahlen (Auswahl)

Kreiszahl	$\pi = 3,141592 \dots$	Goldener Schnitt	$\Phi = 1,618033 \dots$
Eulersche Zahl	$e = 2,71828 \dots$	Wurzel aus 2	$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$
Absoluter Nullpunkt	$T = -273,15^\circ\text{C}$	Wurzel aus 3	$\sqrt[3]{3} = 1,7320508 \dots$
Erdbeschleunigung	$g = 9,80665 \text{ m/s}^2$	Primzahlen	2; 3; 5; 7; 11; 13 ...
Lichtgeschwindigkeit	$c = 299792458 \text{ m/s}$	Avogadrozahl N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Fluchtgeschwindigkeit	$v = 11,2 \text{ km/s}$	molare Gaskonstante	$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion (Auswahl)



Bezeichnungen

- sin α Sinusfunktion
- cos α Kosinusfunktion
- α Winkel ($^\circ$)
- α_r Winkel (rad)
- rad Radiant, Winkel im Bogenmaß

Umrechnung: Grad und Radiant

$$\alpha = \frac{\alpha_r \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$\alpha_r = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α_r	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

sin, cos, tan für $180^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\sin(\alpha - 180^\circ) \\ \cos \alpha &= -\cos(\alpha - 180^\circ) \\ \tan \alpha &= \tan(\alpha - 180^\circ) \end{aligned}$$

sin, cos, tan für $\pi < \alpha_r \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_r &= -\sin(\alpha_r - \pi) \\ \cos \alpha_r &= -\cos(\alpha_r - \pi) \\ \tan \alpha_r &= \tan(\alpha_r - \pi) \end{aligned}$$

Beispiel: $\alpha = 210^\circ$: $\sin 210^\circ = -\sin(210^\circ - 180^\circ) = -\sin(30^\circ) = -0,5$

Grundlagen

Griechisches Alphabet mit Anwendungsbeispielen

Griechischer Buchstabe		Gesprochen	z. B. verwendet für ...
A	α	Alpha	Freiwinkel, Winkel, Längenausdehnungskoeffizient
B	β	Beta	Keilwinkel, Winkel
Γ	γ	Gamma	Spanwinkel, Winkel, spezifischer Widerstand
Δ	δ	Delta	Differenz, Winkel
E	ε	Epsilon	Dehnung, Eckenwinkel (Wendeschneidplatte)
Z	ζ	Zeta	Verlustbeiwert von Armaturen
H	η	Eta	Wirkungsgrad
Θ	θ	Theta	Thermodynamische Temperatur (K), Temperatur (°C)
I	ι	Iota	höhere Mathematik
K	κ	Kappa	Einstellwinkel (Drehen), elektrische Leitfähigkeit
Λ	λ	Lambda	Wellenlänge, Wärmeleitfähigkeit, Neigungswinkel (Wendeschneidplatte)
M	μ	My	Reibungskoeffizient, Prozessmittelwert
N	ν	Ny	Sicherheitszahl
Ξ	ξ	Xi	höhere Mathematik
O	\omicron	Omikron	höhere Mathematik
Π	π	Pi	Produktzeichen, Kreiszahl 3,1415 ...
P	ϱ, ρ	Rho	Dichte, Winkel, Leiterwiderstand
Σ	σ	Sigma	Summenzeichen, Normalspannung, Prozessstandardabweichung
T	τ	Tau	Schubspannung, Torsionsspannung
Υ	υ	Ypsilon	Achsenbezeichnung
Φ	φ	Phi	Wärmestrom (Q), Goldener Schnitt, Winkel, Phasenverschiebung, Stoßfaktor
X	χ	Chi	Statistisches Merkmal
Ψ	ψ	Psi	Wärmedurchgangskoeffizient
Ω	ω	Omega	Zeichen für Ohm, Winkelgeschwindigkeit

Grundlagen

Grundrechenarten

Addition	<i>a</i> Summand <i>b</i> Summand <i>c</i> Summe	$a + b = c$
Subtraktion	<i>a</i> Minuend <i>b</i> Subtrahend <i>c</i> Differenz	$a - b = c$
Multiplikation	<i>a</i> Multiplikator <i>b</i> Multiplikator <i>c</i> Produkt	$a \cdot b = c$
Division	<i>a</i> Dividend, <i>Zähler</i> <i>b</i> Divisor, <i>Nenner, $b \neq 0$</i> <i>c</i> Quotient, <i>Wert des Bruches</i>	$a \div b = c$ <i>Bruchschreibweise:</i> $\frac{a}{b} = c$

Vorzeichenregeln

Vorzeichen- regeln	Addition $+(+a) = +a$ $+(-a) = -a$	Subtraktion $-(+a) = -a$ $-(-a) = +a$
	Multiplikation $+\cdot+ = +$ $+\cdot- = -$ $- \cdot + = -$ $- \cdot - = +$	Division $+:+ = +$ $+: - = -$ $-: + = -$ $-: - = +$

Rechengesetze

„Punkt vor Strich“	$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$
Kommutativ- gesetz der Addition: $a + b = b + a$... der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativ- gesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$... der Multiplikation: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributiv- gesetz ...	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Klammern

Klammern auflösen	$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ $a + (b + c) = a + b + c$ $a - (b + c) = a - b - c$
Ausklammern	$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

Grundlagen

Grundoperationen mit Brüchen

Multiplikation mit ganzer Zahl	a Zähler b Nenner k ganze Zahl	$\frac{a}{b} \cdot k = \frac{a \cdot k}{b}$
Multiplikation von Brüchen	a, c Zähler b, d Nenner	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Erweitern	a Zähler b Nenner k Zahl, mit der erweitert wird	$\frac{a}{b} \cdot \frac{k}{k} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ Der Wert des Bruches bleibt gleich.
Division durch ganze Zahl	a Zähler b Nenner k ganze Zahl	$\frac{a}{b} \div k = \frac{a}{b \cdot k}$
Division	a, c Zähler b, d Nenner	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ <div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; margin-top: 10px;"> Multiplikation mit Kehrwert: $\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{Kehrwert}} \frac{d}{c}$ </div>
Kürzen	a Zähler b Nenner k Zahl, durch die gekürzt wird	$\frac{a \div k}{b \div k}$ Der Wert des Bruches bleibt gleich.
Addition und Subtraktion	a, c Zähler b, d Nenner	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} + \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} - \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} + \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

Grundlagen

Potenzterm

$$a^n = x$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

n Faktoren

Bezeichnungen

a	Basis (Grundzahl)
n oder m	Exponent (Hochzahl)
a^n	Potenz
x	Potenzwert

Rechenoperationen mit Potenzen

Addition und Subtraktion

... bei gleicher Potenz in allen Termen

$$g \cdot a^n - j \cdot a^n + h \cdot a^n = a^n (g - j + h)$$

Multiplikation

bei gleicher Basis

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

bei gleichem Exponenten

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Division

bei gleicher Basis

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

bei gleichem Exponenten

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzieren

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Sonderformen von a^n

$n = 1$

$$a^1 = a$$

$n = 0$

$$a^0 = 1$$

$n = -1$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$n < 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Umwandeln von Potenzen in Wurzeln

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Grundlagen

Wurzelterm

$$\sqrt[n]{a} = x$$

$$a = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Wurzeln}}$$

Bezeichnungen

n, m	Wurzelexponent
a	Radikant
x	Wurzelwert

Rechenoperationen mit Wurzeln

Addition und Subtraktion

... bei gleichem Wurzelexponenten in allen Termen

$$g \cdot \sqrt[n]{a} - j \cdot \sqrt[n]{a} + h \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a} (g - j + h)$$

Multiplikation

bei gleichem Radikant

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

bei gleichem Wurzelexponent

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Division

bei gleichem Radikant

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m-n}}$$

bei gleichem Wurzelexponent

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Potenzieren

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Radizieren (Wurzelziehen)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Hinweise zur Quadratwurzel

Der Wurzelexponent entfällt:

$$x = \pm \sqrt[2]{a} \rightarrow x = \pm \sqrt{a}$$

Es gibt zwei Werte für x :

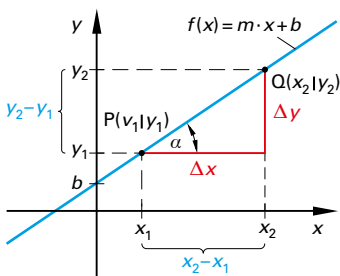
$$x_1 = +\sqrt{a}; x_2 = -\sqrt{a}$$

Umwandeln von Wurzeln in Potenzen

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Grundlagen

Lineare Funktion – Gerade



Bezeichnungen

$y, f(x)$	Funktion von x
P, Q	Punkte auf der Geraden
x_1, x_2	x -Koordinaten der Punkte
y_1, y_2	y -Koordinaten der Punkte
Δx	Abstand von P nach Q in x -Richtung
Δy	Abstand von P nach Q in y -Richtung
m	Steigung, Differenzenquotient
b	Schnittpunkt mit y -Achse
α	Steigungswinkel

Geradengleichung

$$y = f(x) = m \cdot x + b$$

Bestimmung von m und b

gegeben:
 • 2 Punkte
 $P(x_1 | y_1)$
 $Q(x_2 | y_2)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - m \cdot x_1$$

$$b = y_2 - m \cdot x_2$$

gegeben:
 • 1 Punkt
 $P(x_p | y_p)$
 • m oder α

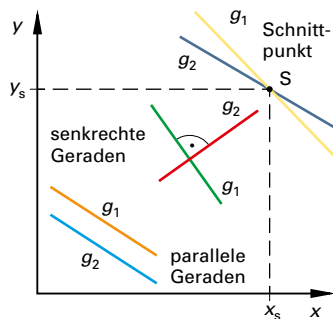
m ist gegeben

oder

$$m = \tan \alpha$$

$$b = y_p - m \cdot x_p$$

Zwei Geraden: $g_1 = m_1 \cdot x + b_1$ und $g_2 = m_2 \cdot x + b_2$



Parallele Geraden

$$m_1 = m_2 \quad b_1 \neq b_2$$

Senkrechte Geraden

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad b_1, b_2 \text{ beliebig}$$

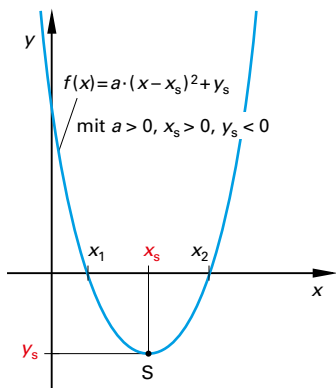
Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$

$$x_s = \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \quad m_1 \neq m_2$$

$$y_s = m_1 \cdot x_s + b_1$$

Grundlagen

Quadratische Funktion – Parabel



Bezeichnungen

$y, f(x)$	Funktion von x
S	Scheitelpunkt
x_s, y_s	Koordinaten des Scheitelpunktes
a	Faktor
	$a > 0$: Parabel oben offen
	Streckung: $a > 1$
	Normalparabel: $a = 1$
	Stauchung: $a < 1$
	$a < 0$: Parabel unten offen
	Streckung: $a < -1$
	neg. Normalparabel: $a = -1$
	Stauchung: $-1 < a < 0$
x_1, x_2	Nullstellen ($y = 0$)
A, B, C	Koeffizienten des Polynoms

Parabelgleichung – Scheitelform

$$y = f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Nullstellen

$$x_{1/2} = x_s \pm \frac{\sqrt{-4 \cdot a \cdot y_s}}{2 \cdot a}$$

keine reellen Nullstellen wenn
 $-4 \cdot a \cdot y_s < 0$

Scheitelform aus Polynomform

$$a = A$$

$$x_s = -\frac{B}{2 \cdot A}$$

$$y_s = C - \frac{B^2}{4 \cdot A}$$

Parabelgleichung – Polynomform

$$y = f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

Nullstellen

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}$$

keine reellen Nullstellen wenn
 $B^2 - 4 \cdot A \cdot C < 0$

Polynomform aus Scheitelform

$$A = a$$

$$B = -2 \cdot a \cdot x_s$$

$$C = a \cdot x_s^2 + y_s$$

Grundlagen

Binomische Formeln

1. binomische Formel

a 1. Glied
 b 2. Glied

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Quadratische Gleichung (Normalform) lösen

pq-Formel

x Variable
 p Faktor beim x
 q konstantes Glied
 $x_{1/2}$ Lösungen der Normalform (Nullstellen)
 D Diskriminante (Wert unter Wurzel)

Normalform

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Diskriminante

$$D = p^2 - 4 \cdot q$$

Fälle:

 $D > 0$ es gibt 2 reelle Lösungen $D = 0$ es gibt eine doppelte reelle Lösung $D < 0$ keine reelle Lösung

Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Quadratische Gleichung (allgemeine Form) lösen

abc-Formel
(„Mitternachtsformel“)

x Variable
 a Faktor beim x^2
 b Faktor beim x
 c konstantes Glied
 $x_{1/2}$ Lösungen der Gleichung
 D Diskriminante (Wert unter Wurzel)

Allgemeine Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Diskriminante

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Fälle:

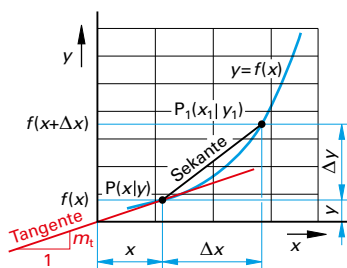
 $D > 0$ es gibt 2 reelle Lösungen $D = 0$ es gibt eine doppelte reelle Lösung $D < 0$ keine reelle Lösung

Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Differentialrechnung

Differenzenquotient, Ableitung, Ableitungsregeln



Bezeichnungen

$f'(x)$	Ableitung der Funktion
P, P_1	Punkte auf der Funktion
x, x_1	X-Koordinaten der Punkte
y, y_1	Y-Koordinaten der Punkte
$\Delta x, \Delta y$	Abstand von P nach P_1 in x- bzw. y-Richtung
m	Steigung der Sekante,
m_t	Steigung der Tangente, Differentialquotient
dx, dy	Differential in X/Y-Richtung
k	konstanter Faktor

Differenzenquotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung, Steigung der Tangente

$$m_t = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Elementare Funktion (Auswahl)

1. Ableitung

Potenzfunktion	$f(x) = k \cdot x^n$	$f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$
Sinusfunktion	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
Kosinusfunktion	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Tangensfunktion	$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Exponentialfunktionen	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

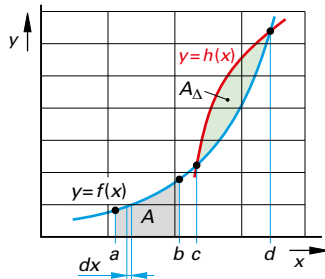
Ableitungsregel, Bezeichnungen

Regelumsetzung

Faktorregel	u, v Teilfunktionen	$f(x) = k \cdot v$	$f'(x) = k \cdot v'$
Summenregel	u', v' Ableitungen der Teilfunktionen	$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
Produktregel	$g(u)$ Äußere Funktion $u(x)$ Innere Funktion	$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$g'(u)$ Ableitung äußere Funktion	$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$
Kettenregel	$u'(x)$ Ableitung innere Funktion	$f(x) = g[u(x)]$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Integralrechnung

Integrale, Integration, Integrationsregeln, Flächen



Bezeichnungen

a, b	Integrationsgrenzen
c, d	Integrationsgrenzen, Schnittpunkte von $f(x)$ und $h(x)$
A	Fläche unter $f(x)$
A_{Δ}	Fläche zwischen $h(x)$ und $f(x)$
$F(x)$	Flächen-, Stammfunktion
dx	Differential in X-Richtung
k	konstanter Faktor
C	Konstante bei unbestimmten Integralen

Flächenberechnung über bestimmtes Integral

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Integrale $\int f(x) dx$ (Auswahl)Stammfunktion $F(x) + C$

Potenzfunktion	$\int k \cdot x^n dx$	$k \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\int x^{-1} dx$	$\ln x + C$
Sinusfunktion	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
Kosinusfunktion	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
Exponentialfunktionen	$\int e^x dx$	$e^x + C$
	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Integrationsregeln

Faktorregel	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
Summenregel	$\int [f(x) \pm h(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int h(x) dx$

Fläche zwischen Funktionen (Bild 1)

$$A_{\Delta} = \int_c^d [h(x) - f(x)] dx$$

Gleichungssysteme

Gleichungssystem mit 2 Unbekannten

2x2-Gleichungssystem:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = L_1 \quad (1)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = L_2 \quad (2)$$

Bezeichnungen

x, y	Unbekannte
a_1, a_2	Koeffizienten von x
b_1, b_2	Koeffizienten von y
L_1, L_2	Rechte Seite der Gleichungen

Einsetzungsverfahren

- (1) z.B. nach y auflösen: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = L_1$

$$b_1 \cdot y = L_1 - a_1 \cdot x$$

$$y = \frac{L_1 - a_1}{b_1} \cdot x \quad (3)$$

- (3) in (2) einsetzen: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot \left(\frac{L_1 - a_1}{b_1} \cdot x \right) = L_2 \quad (4)$

- (4) ausmultiplizieren, nach x auflösen und x berechnen.
- Das berechnete x in die Gleichung (1) oder (2) einsetzen und y berechnen.

Gleichsetzungsverfahren

- (1) und (2) nach y auflösen:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = L_1$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = L_2$$

$$b_1 \cdot y = L_1 - a_1 \cdot x$$

$$b_2 \cdot y = L_2 - a_2 \cdot x$$

$$y = \frac{L_1 - a_1}{b_1} \cdot x \quad (3)$$

$$y = \frac{L_2 - a_2}{b_2} \cdot x \quad (4)$$

- Die beiden y aus (3) und (4) gleichsetzen, nach x auflösen und x berechnen.
- Das berechnete x in die Gleichung (1) oder (2) einsetzen und y berechnen.

Additionsverfahren

- (1) mit b_2 und (2) mit $-b_1$ multiplizieren, die beiden Gleichungen untereinander schreiben und addieren:

$$a_1 \cdot b_2 \cdot x + b_1 \cdot b_2 \cdot y = L_1 \cdot b_2$$

$$+ -a_2 \cdot b_1 \cdot x - b_1 \cdot b_2 \cdot y = -L_2 \cdot b_1$$

$$(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot x = L_1 \cdot b_2 - L_2 \cdot b_1$$

- Das Ergebnis nach x auflösen und x berechnen.
- Das berechnete x in die Gleichung für y einsetzen und y berechnen.

Gleichungssysteme

Gleichungssystem mit 2 Unbekannten

2x2-Gleichungssystem:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = L_1 \quad (1)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = L_2 \quad (2)$$

Bezeichnungen

x, y	Unbekannte
a_1, a_2	Koeffizienten von x
b_1, b_2	Koeffizienten von y
L_1, L_2	Rechte Seite der Gleichungen
D, D_x, D_y	Determinanten

Determinantenverfahren

Determinante berechnen

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

y-Determinante berechnen

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & L_1 \\ a_2 & L_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot L_2 - L_1 \cdot a_2$$

x-Determinante berechnen

$$D_x = \begin{vmatrix} L_1 & b_1 \\ L_2 & b_2 \end{vmatrix} = L_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot L_2$$

x und y berechnen

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{für } D \neq 0$$

Gleichungssystem mit 3 Unbekannten

3x3-Gleichungssystem:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = L_1$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = L_2$$

$$a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = L_3$$

Bezeichnungen

x, y, z	Unbekannte
a_1, a_2, a_3	Koeffizienten von x
b_1, b_2, b_3	Koeffizienten von y
c_1, c_2, c_3	Koeffizienten von z
L_1, L_2, L_3	Rechte Seite der Gleichungen

Determinante berechnen

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - (c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 + b_1 \cdot a_2 \cdot c_3)$$

x-Determinante berechnen

$$D_x = \begin{vmatrix} L_1 & b_1 & c_1 \\ L_2 & b_2 & c_2 \\ L_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = L_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot L_3 + c_1 \cdot L_2 \cdot b_3 - (c_1 \cdot b_2 \cdot L_3 + b_1 \cdot L_2 \cdot c_3 + L_1 \cdot c_2 \cdot b_3)$$

y-Determinante berechnen

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & L_1 & c_1 \\ a_2 & L_2 & c_2 \\ a_3 & L_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = a_1 \cdot L_2 \cdot c_3 + L_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot L_3 - (c_1 \cdot L_2 \cdot a_3 + L_1 \cdot a_2 \cdot c_3 + a_1 \cdot c_2 \cdot L_3)$$

z-Determinante berechnen

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & L_1 \\ a_2 & b_2 & L_2 \\ a_3 & b_3 & L_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = a_1 \cdot b_2 \cdot L_3 + b_1 \cdot L_2 \cdot a_3 + L_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - (L_1 \cdot b_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot a_2 \cdot L_3 + a_1 \cdot L_2 \cdot b_3)$$

x, y und z berechnen:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D} \quad \text{für } D \neq 0$$

Rechenweg: Haupt- minus Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Rechenweg: Haupt- minus Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} L_1 & b_1 & c_1 \\ L_2 & b_2 & c_2 \\ L_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 & b_1 \\ L_2 & b_2 \\ L_3 & b_3 \end{matrix}$$

Rechenweg: Haupt- minus Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} a_1 & L_1 & c_1 \\ a_2 & L_2 & c_2 \\ a_3 & L_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & L_1 \\ a_2 & L_2 \\ a_3 & L_3 \end{matrix}$$

Rechenweg: Haupt- minus Nebendiagonalen

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & L_1 \\ a_2 & b_2 & L_2 \\ a_3 & b_3 & L_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Anwendungen

Größen und Einheiten

SI-Basisgrößen und Basiseinheiten

Basisgröße	Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Dezimale Vielfache oder Teile von Einheiten

Vorsatz		Zehnerpotenz	Vorsatz		Zehnerpotenz
Zeichen	Name		Zeichen	Name	
T	Terra	10^{12}	d	Dezi	$10^{-1} = 0,1$
G	Giga	10^9	c	Zenti	$10^{-2} = 0,01$
M	Mega	$10^6 = 1000\,000$	m	Milli	$10^{-3} = 0,001$
k	Kilo	$10^3 = 1000$	μ	Mikro	$10^{-6} = 0,000001$
h	Hekto	$10^2 = 100$	n	Nano	10^{-9}
da	Deka	$10^1 = 10$	p	Piko	10^{-12}

Umrechnungsfaktoren für Einheiten (Auszug)

Größe	Umrechnungsfaktoren, z. B.
Längen	$1 = \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}$
Flächen	$1 = \frac{100 \text{ mm}^2}{1 \text{ cm}^2} = \frac{100 \text{ cm}^2}{1 \text{ dm}^2} = \frac{1 \text{ cm}^2}{100 \text{ mm}^2} = \frac{1 \text{ dm}^2}{100 \text{ cm}^2}$
Volumen	$1 = \frac{1000 \text{ mm}^3}{1 \text{ cm}^3} = \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ dm}^3} = \frac{1 \text{ cm}^3}{1000 \text{ mm}^3} = \frac{1 \text{ dm}^3}{1000 \text{ cm}^3}$
Zeit	$1 = \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$
Winkel	$1 = \frac{60'}{1^\circ} = \frac{60''}{1'} = \frac{3600''}{1^\circ} = \frac{1^\circ}{60 \text{ s}}$
Zoll	$1 \text{ inch} = 25,4 \text{ mm}; 1 \text{ mm} = \frac{1}{25,4} \text{ inch}$

Anwendungen

Größen und Einheiten

Größe	Formelzeichen	Einheitenname	Einheitenzeichen			
Länge						
Länge	l	Meter	m			
Beziehung	m	μm	mm	cm	dm	km
1 m =	1	10^6 1000000	10^3 1000	10^2 100	10^1 10	10^{-3} 0,001
1 μm =	10^{-6} 0,000001	1	10^{-3} 0,001	10^{-4} 0,0001	10^{-5} 0,00001	10^{-9}
1 mm =	10^{-3} 0,001	10^3 1000	1	10^{-1} 0,1	10^{-2} 0,01	10^{-6} 0,000001
1 cm =	10^{-2} 0,01	10^4 10000	10^1 10	1	10^{-1} 0,1	10^{-5} 0,00001
1 dm =	10^{-1} 0,1	10^5 100000	10^2 100	10^1 10	1	10^{-4} 0,0001
1 km =	10^3 1000	10^9	10^6 1000000	10^5 100000	10^4 10000	1

1 inch = 1 Zoll = 25,4 mm

Fläche

Fläche	A, S	Quadratmeter Ar Hektar	m^2 a ha	
Beziehung	m^2	mm^2	cm^2	dm^2
1 m^2 =	1	10^6 1000000	10^4 10000	10^2 100
1 mm^2 =	10^{-6} 0,000001	1	10^{-2} 0,01	10^{-4} 0,0001
1 cm^2 =	10^{-4} 0,0001	10^2 100	1	10^{-2} 0,01
1 dm^2 =	10^{-2} 0,01	10^4 10000	10^2 100	1

1 a = 100 m^2 ; 1 ha = 100 a = 10000 m^2 ; 100 ha = 1 km^2

Volumen

Volumen	V	Kubikmeter Liter	m^3 l, L	
Beziehung	m^3	mm^3	$\text{cm}^3 = \text{ml}$	$\text{dm}^3 = \text{l}$
1 m^3 =	1	10^9	10^6 1000000	10^3 1000
1 mm^3 =	10^{-9}	1	10^{-3} 0,001	10^{-6} 0,000001
1 $\text{cm}^3 = 1 \text{ ml}$ =	10^{-6} 0,000001	10^3 1000	1	10^{-3} 0,001
1 $\text{dm}^3 = 1 \text{ l}$ =	10^{-3} 0,001	10^6 1000000	10^3 1000	1

Anwendungen

Größen und Einheiten

Größe	Formelzeichen	Einheit		Beziehung
		Name	Zeichen	
Mechanik				
Masse	m	Kilogramm Gramm Megagramm Tonne Karat	kg g Mg t	1 kg = 1000 g 1 g = 1000 mg 1 t = 1000 kg = 1 Mg 0,2 g = 1 Kt
längen- bezogene Masse	m'	Kilogramm pro Meter	kg/m	1 kg/m = 1 g/mm
flächen- bezogene Masse	m''	Kilogramm pro Meter hoch zwei	kg/m ²	1 kg/m ² = 0,1 g/cm ²
Dichte	ϱ, ρ	Kilogramm pro Meter hoch drei	kg/m ³	1000 kg/m ³ = 1 t/m ³ = 1 kg/dm ³ = 1 g/cm ³ = 1 g/ml = 1 mg/mm ³
Kraft Gewichtskraft	F F_G, G	Newton	N	1 N = 1 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ = 1 $\frac{\text{J}}{\text{m}}$ 1 MN = 10 ³ kN = 1 000 000 N
Drehmoment Biegemoment Torsionsmoment	M M_b M_{Tr}, T	Newton mal Meter	N · m	1 N · m = 1 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
Druck mechanische Spannung	p σ, τ	Pascal Newton pro Millimeter hoch zwei	Pa N/mm ²	1 Pa = 1 N/m ² = 0,01 mbar 1 bar = 100 000 N/m ² = 10 N/cm ² = 10 ⁵ Pa 1 mbar = 1 hPa 1 N/mm ² = 10 bar = 1 MN/m ² = 1 MPa 1 daN/cm ² = 0,1 N/mm ²
Flächen- moment 2. Grades	I	Meter hoch vier Zentimeter hoch vier	m ⁴ cm ⁴	1 m ⁴ = 100 000 000 cm ⁴
Energie, Arbeit, Wärmemenge	E, W Q	Joule	J	1 J = 1 N · m = 1 W · s = 1 kg · m ² /s ²
Leistung, Wärmestrom	P Φ	Watt	W	1 W = 1 J/s = 1 N · m/s = 1 V · A = 1 m ² · kg/s ³ 1 PS = 0,7355 kW