# Rechnen und Projektieren Mechatronik









# EUROPA-FACHBUCHREIHE für Mechatronik

J. Dillinger W. Escherich M. Lex T. Neumayr B. Schellmann R. Zweckstätter

# Rechnen und Projektieren – Mechatronik

Projektieren · Problemlösen

5. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 18618

#### Autoren:

Dillinger, Josef München
Escherich, Walter München
Lex, Martin München
Neumayr, Thomas München
Schellmann, Bernhard Kißlegg
Zweckstätter, Robert München

Lektorat und Leitung des Arbeitskreises: Josef Dillinger München

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

5. Auflage 2020, korrigierter Nachdruck 2023

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-1786-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

@ 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald Umschlagfotos: Festo AG & Co. KG, Esslingen Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

# Vorwort

Das vorliegende Buch "Rechnen und Projektieren – Mechatronik" ist ein Lehr- und Übungsbuch für die Ausbildung im Berufsfeld Mechatronik.

Das Buch bietet Lehrenden und Lernenden die Möglichkeit Berechnungen in den entsprechenden Lernfeldern durchzuführen und durch eine Vielfalt an Aufgaben das Lösen von Problemen zu üben.

Das Buch ist so aufgebaut, dass die in den einzelnen Lernfeldern auftretenden Berechnungsprobleme mithilfe von Beispielen und Lösungen aufgezeigt werden. Eine Vielzahl von Aufgaben schließen sich den entsprechenden Themenbereichen an. Der Bezug zu den Lernfeldern wird über die Zuordnung der Kapitel zu den Inhalten des KMK-Rahmenlehrplanes geschaffen.

Ein Hauptaugenmerk dieses Buches liegt auf den Problemstellungen der Automatisierungstechnik, die für das Berufsfeld Mechatronik von zentraler Bedeutung sind.

Die Automatisierungstechnik wird unterteilt in

- Verbindungsprogrammierte Steuerungen und
- Speicherprogrammierte Steuerungen,

wobei die Speicherprogrammierten Steuerungen getrennt nach Kleinsteuerungen und modularen Systemen behandelt werden.

Die Einteilung der Steuerungen erfolgt nach der verwendeten Steuerenergie:

- Pneumatische Steuerungen
- Hydraulische Steuerungen
- Elektrische Steuerungen
- Elektropneumatische Steuerungen
- Elektrohydraulische Steuerungen

Die meisten Kapitel wie auch das Kapitel Projekt- und Prüfungsaufgaben sind themenübergreifend angelegt. Sie bieten somit die Möglichkeit der Leistungskontrolle und der Vorbereitung für die Abschlussprüfung im Berufsfeld Mechatronik.

Das Lösungsheft zu "Rechnen und Projektieren – Mechatronik" enthält für die Auszubildenden einen möglichen Lösungsweg der Aufgaben, um die eigenen Lösungen zu überprüfen. Das Lösungsheft erleichtert dem Lehrer die Unterrichtsvorbereitung und ist für das Selbststudium eine wesentliche Hilfe.

# Vorwort zur 5. Auflage

In der neuen Auflage wurden die Themenbereiche durch Animationen und 17 interaktive Simulationen angereichert, so dass sich die Lernfeldkonzeption in Verbindung mit digitalen Medien im Unterricht umsetzen lässt. Die digitalen Inhalte können auch auf kleinen Displays (Smartphone, Tablet) verifiziert werden. Können Aufgaben mittels Simulationen überprüft werden, wird im Buch ein entsprechender Hinweis gegeben.

Der neue Abschnitt **Simulationsaufgaben** beinhaltet 12 Seiten und ermöglicht durch einfache Aufgaben den Einstieg in die entsprechende Thematik. Entsprechend können durch den Einsatz der Simulationen Zusammenhänge erkannt und Lösungen überprüft werden. Die Konzeption beinhaltet folgende Thematik:

- Konstante geradlinige Bewegung
- Schiefe Ebene
- Ohmsches Gesetz
- ISO-Toleranzen
- Konstante kreisförmige Bewegung
- Druck und Kolbenkraft
- Reihen- und Parallelschaltung
- ISO-Passungen

- Hebelgesetz
- Hydraulische Presse
- Gemischte Schaltung von Widerständen
- Einfache Übersetzungen

Für Anregungen und kritische Hinweise an lektorat@europa-lehrmittel.de sind wir dankbar.

Sommer 2020 Die Autoren

# **Inhaltsverzeichnis**

1	Grundlagen	7	5	Werkstofftechnik und Hilfsstoffe	45
1.1	Rechnen mit Zahlen und Variablen	7	5.1	Wärmetechnik	45
1.2	Rechnen mit Brüchen	8	5.1.1	Längenänderung bei Erwärmung	45
1.3	Gleichungen und Formeln	10	5.1.2	Volumenänderung bei Erwärmung	46
1.3.1	Gleichungen	10	5.2	Viskosität von Druckflüssigkeiten	47
1.3.2	Formeln	13	5.3	Festigkeitsberechnung	49
1.4	Winkelberechnungen	14	5.3.1	Beanspruchung auf Zug	49
1.5	Winkelfunktionen im rechtwinkligen		5.3.2	Beanspruchung auf Druck	51
	Dreieck	16	5.3.3	Beanspruchung auf Flächenpressung	53
1.6	Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)	18	5.3.4	Beanspruchung auf Schub (Scherung)	54
1.7	Prozentrechnung	19	5.3.5	Schneiden von Werkstoffen	56
1.8	Flächen	21	5.3.6	Festigkeitsklasse und Einschraubtiefe bei	
1.9	Rauminhalt, Masse und Gewichtskraft	23		Schrauben	58
1.9.1	Rauminhalt				
1.9.2	Masse und Gewichtskraft	23	6	Fertigungstechnik	60
1.10	Diagramme	25	6.1	Maßtoleranzen und Passungen	60
1.10.1	Kreisdiagramm	25	6.1.1	Maßtoleranzen	60
1.10.2	Balkendiagramm	25	6.1.2	Passungen	62
1.10.3	Histogramm und Paretodiagramm	25	6.1.3	ISO-Passungen	63
			6.2	Hauptnutzungszeit beim Bohren, Senken	
2	Datenverarbeitungstechnik	28		und Reiben	66
2.1	Zahlensysteme	28	6.3	Kostenrechnung, Kalkulation	69
2.1.1	Umwandlung von Dualzahlen in		6.4	Schnittkraft und Leistungsbedarf beim	
	Dezimalzahlen	28		Zerspanen	73
2.1.2	Umwandlung von Sedezimalzahlen				
	(Hexadezimalzahlen) in Dezimalzahlen	29	7	Mechanische Systeme	75
2.1.3	Umwandlung von Dezimalzahlen in		7.1	Berechnungen am Zahnrad	75
	Dualzahlen	29	7.1.1	Zahnradmaße außen- und innenverzahnter	
2.1.4	Umwandlung von Dezimalzahlen in			Stirnräder mit Geradverzahnung	75
	Sedezimalzahlen	30	7.1.2	Zahnradmaße außenverzahnter Stirnräder	
2.1.5	Umwandlung von Dualzahlen in	04		mit Schrägverzahnung	76
010	Sedezimalzahlen	31	7.1.3	Achsabstand bei Zahnrädern	
2.1.6	Umwandlung von Sedezimalzahlen in Dualzahlen	31	7.2	Übersetzungen und Getriebe	79
2.2	Duaizament				
۷.۷	BCD-Codo		7.2.1	Einfache Übersetzungen	
2 2	BCD-Code	31	7.2.2	Mehrfache Übersetzungen	82
2.3	Potenzen und Wurzeln	31 32	7.2.2 <b>7.3</b>	Mehrfache Übersetzungen	82 85
2.3 2.4		31 32	7.2.2	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre	82 85 85
2.4	Potenzen und Wurzeln	31 32 33	7.2.2 <b>7.3</b> 7.3.1 7.3.2	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre	82 85 85 88
2.4 3	Potenzen und WurzelnZehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik	31 32 33	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre.  Gleichförmige Bewegung  Kreisförmige Bewegung  Ungleichförmige Bewegung.	82 85 85 88 90
2.4	Potenzen und Wurzeln	31 32 33 <b>34</b>	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre.  Gleichförmige Bewegung  Kreisförmige Bewegung  Ungleichförmige Bewegung  Kräfte	82 85 85 88 90 93
2.4 3 3.1	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte	31 32 33 <b>34</b>	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre.  Gleichförmige Bewegung  Kreisförmige Bewegung  Ungleichförmige Bewegung  Kräfte  Darstellen von Kräften	82 85 88 90 93
2.4 3	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer	31 32 33 <b>34</b> 34	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung  Kräfte Darstellen von Kräften  Zusammensetzen von Kräften	82 85 88 90 93 93
2.4 3 3.1	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte	31 32 33 <b>34</b> 34	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung  Kräfte Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften	82 85 88 90 93 93 94 95
2.4 3 3.1 3.2	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte	31 32 33 <b>34</b> 34 35	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung  Kräfte Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte	82 85 85 88 90 93 93 94 95
2.4 3 3.1 3.2	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte  Qualitätsmanagement	31 32 33 <b>34</b> 34 35 <b>37</b>	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4 7.5	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung  Kräfte Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte  Rollen und Flaschenzüge	82 85 88 90 93 93 94 95 97
2.4 3 3.1	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte	31 32 33 <b>34</b> 34 35 <b>37</b>	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4 7.5 7.6	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung  Kräfte Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte  Rollen und Flaschenzüge Hebel und Drehmoment	82 85 85 88 90 93 94 95 97 99
2.4 3 3.1 3.2	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte  Qualitätsmanagement  Grundlagen der Statistik  Statistische Prozesslenkung mit Qualitäts-	31 32 33 <b>34</b> 34 35 <b>37</b> 37	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4 7.5 7.6 7.6.1	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung Kräfte  Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte Rollen und Flaschenzüge. Hebel und Drehmoment Hebelgesetz	82 85 88 90 93 94 95 97 99 101
2.4 3 3.1 3.2 4 4.1 4.2	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte  Qualitätsmanagement  Grundlagen der Statistik  Statistische Prozesslenkung mit Qualitätsregelkarten	31 32 33 <b>34</b> 34 35 <b>37</b> 37	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4 7.5 7.6 7.6.1 7.7	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung Kräfte  Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte Rollen und Flaschenzüge. Hebel und Drehmoment Hebelgesetz Mechanische Arbeit und Energie	82 85 85 88 90 93 94 95 97 99 101 102
2.4 3 3.1 3.2 4 4.1	Potenzen und Wurzeln. Zehnerpotenzen, Vorsätze  Prüf- und Messtechnik  Messfehler analoger elektrischer Messgeräte  Messfehler digitaler elektrischer Messgeräte  Qualitätsmanagement  Grundlagen der Statistik  Statistische Prozesslenkung mit Qualitäts-	31 32 33 <b>34</b> 34 35 <b>37</b> 37	7.2.2 7.3 7.3.1 7.3.2 7.3.3 7.4 7.4.1 7.4.2 7.4.3 7.4.4 7.5 7.6 7.6.1	Mehrfache Übersetzungen  Bewegungslehre. Gleichförmige Bewegung Kreisförmige Bewegung Ungleichförmige Bewegung Kräfte  Darstellen von Kräften Zusammensetzen von Kräften Zerlegen von Kräften Reibungskräfte Rollen und Flaschenzüge. Hebel und Drehmoment Hebelgesetz	82 85 85 88 90 93 94 95 97 99 101 102 104

7.7.3	Der Keil als schiefe Ebene	9.7	Schwingkreise
7.7.4	Die Schraube als schiefe Ebene 107	9.7.1	Reihenschaltung von R, L und C 150
7.7.5	Mechanische Energie	9.7.2	Parallelschaltung von R, L und C 152
7.8	Mechanische Leistung	9.8	Transformator154
7.9	Wirkungsgrad		
		10	Dreiphasenwechselstrom
8	Gleichstromtechnik		(Drehstrom)
8.1	Elektrische Ladung und Stromstärke 115	10.1	Sternschaltung (symmetrisch, gleichartig) 155
8.2	<b>Stromdichte</b>	10.2	Dreieckschaltung (symmetrisch,
8.3	Widerstand und Leitwert 117	40.0	gleichartig)
8.4	Temperaturabhängige Widerstände 120	10.3	Leistung bei Stern-Dreieckschaltung (symmetrisch)158
8.5	Ohmsches Gesetz121	10.4	Drehstromkompensation
8.6	Reihenschaltung von Widerständen 122	10.4	Dienstromkompensution
8.7	Parallelschaltung von Widerständen 123	11	Elektrische Antriebe 160
8.8	Gemischte Schaltungen	11.1	Drehstrom-Asynchronmotor160
8.9	Spannungsteiler	11.2	Gleichstrommotoren
8.9.1	Der unbelastete Spannungsteiler 126	11.2.1	Nebenschlussmotor/Fremderregter Motor . 163
8.9.2	Der belastete Spannungsteiler 127	11.2.1	Reihenschlussmotor/Doppelschlussmotor . 166
8.10	Wheatstone'sche Brückenschaltung 128	11.2.2	nomensormussmoton/Boppersormussmotor: 100
8.11	Die elektrische Leistung	12	Elektrische Anlagen168
8.12	Die elektrische Arbeit	12.1	Fehlerstromkreis
8.13	Das elektrische Feld	12.1	Schutz durch Abschaltung mit Überstrom-
8.14	Kondensator	12.2	Schutzeinrichtungen im TN-System 170
8.14.1	Ladung und Kapazität eines Kondensators 133	12.3	Schutz durch Abschaltung mit RCD im
8.14.2	Bauform und Kapazität eines		TT-System
0.440	Kondensators	12.4	Leitungsschutz
8.14.3	Schaltungsarten von Kapazitäten	12.5	Leitungsberechnung
8.14.4	Lade- und Entladeverhalten eines Kondensators	12.5.1	Spannungsfall auf Gleichstromleitungen 175
8.15	<b>Spulen</b>	12.5.2	Spannungsfall auf Wechselstromleitungen 177
8.15.1	Bauform und Induktivität einer Spule 137	12.5.3	Spannungsfall auf 3~Wechselstromlei-
8.15.2	Schaltungsarten von Induktivitäten 138		tungen
8.15.3	Ein- und Ausschaltverhalten einer Spule 139	40	0.11.11.
8.16	Gleichstromverhalten von Halbleiter-	13	Gleichrichterschaltungen 181
	dioden	13.1	Ungesteuerte Gleichrichterschaltungen 181
8.17	Bipolartransistor141	13.2	Gesteuerte Gleichrichterschaltungen 183
8.17.1	Bipolartransistor als Gleichstromverstärker 141		
8.17.2	Bipolartransistor als Schalter 142	14	Fluidtechnik: Pneumatik 185
		14.1	Druckarten und Druckeinheiten 185
9	Wechselstrom	14.2	Zustandsänderungen bei Gasen 187
9.1	Periodendauer, Frequenz und	14.3	Kolbenkraft
	Kreisfrequenz 143	14.4	Luftverbrauch in pneumatischen Anlagen . 190
9.2	Momentanwert der Spannung 143	14.5	Vakuumtechnik – Handhabung mit
9.3	Momentanwert des Stroms 144		Unterdruck
9.4	Effektivwert und Scheitelwert von	45	Phylidia alamila Hardon (19)
	Spannung und Strom	15	Fluidtechnik: Hydraulik195
9.5	Leistung im Wechselstromkreis	15.1	Hydrostatik – Hydrostatischer Druck,
9.6	Bauteile im Wechselstromkreis	4= -	Kolbenkraft
9.6.1	Blindwiderstand von Kapazitäten	15.2	Hydrostatik – Hydraulische Presse 197
9.6.2	Blindwiderstand von Induktivitäten 149	15.3	Hydrostatik – Druckübersetzung 199

15.4	Hydrodynamik – Flüssigkeiten in Bewegung	18.4.5	Konnektor, Merker und Flankenauswertungen in einer SPS	. 276
15.5	Hydrodynamik – Hydraulische Leistung 202	18.4.6	Zeitoperationen einer SPS	
13.3	Tryurodynamik – Tryuradiisone Leistung 202	18.4.7	Zähl- und Vergleichsoperationen einer SP	
16	NC-Technik	18.4.8	Ablaufsteuerungen und strukturierte	0 201
		10.1.0	Programmierung	. 283
16.1	Geometrische Grundlagen	18.4.9	Analogwertverarbeitung mit SPS	. 287
16.2	Koordinatenmaße	18.5	Systematischer Entwurf von Schaltpläner	1
16.3	Werkstücke mit geradlinigen und		und Steuerungslösungen	. 293
	kreisbogenförmigen Konturen 211	18.5.1	Funktions- und SR-Tabellen	. 293
4-	B 1 4 1 11	18.5.2	Programmablaufplan und Struktogramm.	. 293
17	Regelungstechnik214	18.5.3	Ablauf-Funktionsplan: Grafcet	. 293
17.1	Regelkreis	18.6	Bussystemtechnik	. 300
17.2	Regelungsarten	18.7	Kommunikation in Netzen	. 303
17.3	<b>Strecken</b> 216			
17.3.1	Strecken mit Ausgleich	19	Projekt- und Prüfungsaufgaben	. 307
17.3.2	Strecken ohne Ausgleich (I-Strecken) 223	19.1	Drehstrom-Asynchronmotor und	
17.4	Regler225	13.1	Riemenantrieb	. 307
17.4.1	Zweipunktregler	19.2	Transportband	
17.5	Regler mit Operationsverstärker (OPV) 228	19.3	Qualitätssicherung	
17.5.1	OPV als Komparator (Zweipunktregler) 228	19.4	Getriebe	
17.5.2	Nichtinvertierender Verstärker (P-Regler) 229	19.5	Tauchbad	
17.5.3	Invertierender Verstärker (P-Regler)230	19.6	Paternoster	
17.5.4	OPV als Integrierer (I-Regler)	19.7	Spannen mit Hydraulik	
17.5.5	OPV als Differenzierer (D-Regler) 233	19.8	Werkstattschleifmaschine	
17.6	Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control 234	19.9	Pneumatische Steuerung mit zwei	. 520
17.6.1	Scharfe und unscharfe Werte 235	13.3	Schaltkreisen	. 330
17.6.2	Fuzzifizierung236	19.10	Elektropneumatik – Sortieren von	
17.6.3	Mengenverknüpfungen		Materialien	. 332
17.6.4	Inferenz			
17.6.5	Defuzzifizierung242	20	Simulationsaufgaben	. 335
	· ·	Koneta	nte geradlinige Bewegungen	335
18	Automatisierungstechnik 243		nte kreisförmige Bewegungen	
10 1	•		esetz	
18.1	Logische Verknüpfungen		e Ebene	
18.2	Speichern von Signalen248		und Kolbenkraft	
18.3	Verbindungsprogrammierte Steuerungen:		ilische Presse	
10 2 1	VPS		thes Gesetz.	
18.3.1	Pneumatische Steuerungen		schaltung und Parallelschaltung von	. 541
18.3.2	Elektropneumatische Steuerungen 254		scriations and rarallelscriations von	342
18.3.3	Hydraulische und elektrohydraulische Steuerungen		chte Schaltung von Widerständen	
18.4	Speicherprogrammierbare Steuerungen		leranzen	
10.4	(SPS)		ssungen	
18.4.1	SPS als Kleinsteuerung (Steuerrelais) 266		ne Übersetzungen	
18.4.2	SPS als modulares System	Limaci	io obordotzungon	. 540
18.4.3	Grundverknüpfungen in einer SPS 272	Δnhan	<b>q</b>	347
18.4.4	Öffner als Eingangsvariable und Speicher-	Aman	a	. 547
10.4.4	funktionen der SPS	Sachw	ortverzeichnis	. 361

# 1 Grundlagen

# 1.1 Rechnen mit Zahlen und Variablen

Für das Rechnen mit Zahlen und Variablen müssen verschiedene Regeln und Gesetzmäßigkeiten berücksichtigt werden (**Tabelle 1**). Dabei gilt vom Grundsatz her, dass Punktrechnung vor Strichrechnung durchgeführt werden muss.

Variablen sind Platzhalter für beliebige Zahlenwerte. Für die Variablen werden meist Kleinbuchstaben verwendet. Schreibt man ein Mehrfaches einer Variablen, z. B.  $4 \cdot a = 4a$ , oder das Produkt aus zwei Variablen, z. B.  $a \cdot b = ab$ , dann kann das Multiplikationszeichen gesetzt oder weggelassen werden.

Tabelle 1: Gesetze und Regeln					
Kommutativgesetz					
Vertauschen von Summanden	2 - 8 + 4 = 4 + 2 - 8 = <b>-2</b>	a-b+c=a+c-b			
Vertauschen von Faktoren	$6 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$	$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b$			
Assoziativgesetz					
Zusammenfassen von Summanden	4-3+9=(4+9)-3=10	6a + 4b - 3a = (6a - 3a) + 4b = 3a + 4b			
Zusammenfassen von Faktoren $2 \cdot 5 \cdot 6 = (6 \cdot 5) \cdot 2 = 60$		$a \cdot b \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$			
Vorzeichenregeln					
Summieren von Zahlen	13 + (7 - 2) = 13 + 7 - 2 = <b>18</b> 13 - (7 - 2) = 13 - 7 + 2 = <b>8</b>	a - (b - c) = a - b + c			
Multiplizieren von Zahlen	$3 \cdot 5 = 15$ $(-3) \cdot (-5) = 15$ $(-3) \cdot 5 = 3 \cdot (-5) = -15$	$a \cdot x = ax$ $(-a) \cdot (-x) = ax$ $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$			
Minuszeichen vor der Klammer	9-2-5=9-(2+5)=2	a-b-c=a-(b+c)			
Distributivgesetz					
Multiplizieren mit Summen	$3 \cdot (6+2) = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = $ <b>24</b>	$a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$			
Multiplizieren von Summen	$(7+2) \cdot (5-3)$ = $7 \cdot 5 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$ = $9 \cdot 2 = 18$	$(a-b) \cdot (c+d)$ $= ac + ad - bc - bd$			

# Aufgaben Rechnen mit Zahlen und Variablen

- **1**. a)  $217,583 27,14 \cdot 0,043 + 12$ 
  - c)  $7,1 + 16,27 + 14,13 \cdot 17,0203$
  - e)  $857 3.52 \cdot 97.25 16.386 + 1.1$
- **2**. a) 17,13 + 13,25 + 15,35 : 2
- **3.** a) 243: 0,04 92,17 13,325 + 124,3: 3,5
- **4.** a)  $(a b) \cdot 3y$ 
  - c) (-a -b) · (-4)

- b) 16,25 + 14,12 · 6,21
- d) 74,24 1,258 · 12,8
- f) 119,2 + 327,351 7,04 · 7,36
- b) 34,89 + 241,17 : 21,35 12,46 : 2,2
- b) 507:0,05-261,17-114,325+142,3:18,4
- b)  $(x + 2) \cdot 4x$
- d) (22a 4ab): 2a

**5.** a) 
$$4a \cdot 2c \cdot 3b$$

c) 
$$(-2.5b) \cdot (-4a + 3b)$$

**6.** a) 
$$18 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$$

c) 
$$\frac{-96}{16} + \frac{65}{-15}$$

7. a) 
$$\frac{24,75+15}{12,5} + \frac{38,7-2,08}{0,36} - \frac{44,2\cdot13,1}{20,05-1,7}$$

c) 
$$(23.7 - 2.8) \cdot \frac{15.1 - 3.7}{16.9}$$

**8.** a) 
$$3a \cdot 4b - 10a \cdot 2b$$

c) 
$$-8m \cdot 2n + 7.5m \cdot (-2n)$$

**9.** a) 
$$-3a \cdot (8x - 5x) - 2a \cdot (20x - 12x)$$

Die Klammerausdrücke sind zu multiplizieren.

c) 
$$-8m \cdot 2n + 7.5m \cdot (-8m \cdot 1)$$

f) 
$$(a + b) \cdot (a + b)$$

c) 
$$(3x - 2y) \cdot a$$
  
g)  $(a - b) \cdot (a - b)$ 

d) 
$$(3x + 4y) \cdot (6a + 9b)$$
  
h)  $(a + b) \cdot (a - b)$ 

**11.** a) 
$$(a+b)(x-2)$$

**10.** a)  $6 \cdot (a+b)$ 

b) 
$$(3a-2b)(3x-4)$$

c) 
$$3a(4-b)(2-3a)$$

e)  $(a-5) \cdot (6+b)$ 

d) 
$$4a \cdot 3b (-x) + 3b \cdot 2a$$

**12.** a) 
$$4x - (0.5x + 3.5y) - (2x + 8y) \cdot 3$$

b) 
$$3ax(c-4)(3a-2d)$$

# b) 120: (-6) - (-15): 5

d) 
$$\frac{148}{37} - \frac{-85}{17}$$

b)  $6 \cdot 3.5b - b \cdot 4$ d)  $(-a + 4b - \frac{1}{2}c) \cdot 2b$ 

b) 
$$34.2 \cdot \frac{23.4 - 8.6}{2.4} - \frac{13.8 + 22.7}{27 - 3.5} \cdot 20.6$$

d) 
$$\frac{25 \cdot (20,1-16,58)}{(34.85-2.97) \cdot 4.6}$$

b) 
$$25x \cdot (-10y) + 13x \cdot (-5y)$$

d) 
$$(-16a) \cdot (-5c) - (-5a) \cdot (-2c)$$

b) 
$$-3x \cdot (8x - 5x) + 3x \cdot (-12x - 33x)$$

#### Rechnen mit Brüchen 1.2

Beim Rechnen mit Brüchen besteht der Rechenausdruck aus einen Zähler und einem Nenner, die durch eine Linie getrennt sind. Die Linie steht beim Bruchrechnen für den Doppelpunkt der einfachen Division. In der Tabelle sind die Gesetzmäßigkeiten der Bruchrechnung zusammengefasst (Tabelle 1).

# Tabelle 1: Gesetze und Regeln zum Bruchrechnen

Erweitern und Kürzen	$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$ $\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ $\frac{6a}{4b} = \frac{3a}{2b}$
Addieren von Brüchen	$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 15 - 2 \cdot 20 + 3 \cdot 12}{60} = \frac{15 - 40 + 36}{60} = \frac{11}{60}$
Bruchrechnen mit Summen	$\frac{2}{3} - \frac{a+3}{b-4} = \frac{2(b-4)-3(a+3)}{3 \cdot (b-4)} = \frac{2b-8-3a-9}{3b-12} = \frac{2b-3a-17}{3b-12}$
Multiplizieren von Brüchen	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \qquad 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4}$
Dividieren von Brüchen	$\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{5}{4}$
Dezimalbruch	$3: \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$ $\frac{2}{3}: 4 = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $0,65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$

#### Aufgaben Rechnen mit Brüchen

- 1. Die folgenden Brüche sind zu addieren bzw. zu subtrahieren.
  - a)  $\frac{1}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9} + \frac{3}{12} + \frac{5}{7}$  b)  $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{9} \frac{7}{10}$
  - c)  $3\frac{3}{4} 5\frac{7}{8} \frac{2}{3} + 9\frac{4}{5}$  d)  $\frac{13.5 + 6.5}{42.8 12.8} \frac{48 + 12}{50}$  b)  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{7}{16}$ ;  $\frac{9}{23}$  jeweils mit  $\frac{1}{3}$
- 3. Die folgenden Brüche sind zu dividieren.
  - a)  $\frac{6}{7}$ ;  $\frac{12}{15}$ ;  $\frac{27}{25}$  jeweils durch 7
  - b)  $7\frac{2}{5}$ ;  $8\frac{7}{9}$ ;  $14\frac{1}{6}$  jeweils durch  $\frac{3}{5}$
- 5. Die folgenden Ausdrücke sind zu vereinfachen.
  - a)  $4ab: \frac{1}{2}a$
- b)  $\frac{5x}{x}$ : 3x

- 2. Die folgenden Brüche sind zu multiplizieren.
  - a)  $\frac{13}{4}$ ;  $7\frac{2}{7}$ ;  $12\frac{1}{2}$  jeweils mit 5
- 4. Folgende Brüche sind auf 3 Kommastellen gerundet in Dezimalbrüche zu verwandeln.
  - a)  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{4}{15}$ ;  $\frac{3}{2}$ ;  $\frac{3}{7}$ ;  $\frac{1}{6}$
  - b)  $\frac{1}{21}$ ;  $\frac{7}{29}$ ;  $\frac{1}{125}$ ;  $\frac{38}{45}$ ;  $\frac{97}{12}$
- 6. Die Doppelbrüche sind zu vereinfachen.

8. Berechnen Sie folgende Brüche.

- b)  $\frac{5}{\frac{3}{14} + \frac{8}{21}}$  b)  $\frac{51}{\frac{7}{12} \frac{23}{22}}$

- 7. Die Dezimalbrüche sind in Brüche zu verwandeln.
  - a) 0.9375
- b) 0.375
- c) 0.85
- a)  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
- b)  $\frac{x}{y}$ :  $\frac{r}{t}$
- c)  $\frac{a}{b}$ : c
- d)  $\frac{5}{30} \frac{20}{30} + 10$

- 9. Berechnen Sie die Doppelbrüche

- a)  $\frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{3}{n}}$  b)  $\frac{2}{\frac{10}{r} \frac{2}{s}}$  c)  $x + y/\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  d)  $\frac{15a + 10}{\frac{3}{2} + \frac{1}{a}}$  e)  $\frac{2m n}{\frac{1}{m} \frac{2}{n}}$  f)  $\frac{5x 6y}{\frac{3}{2x} \frac{5}{4y}}$
- 10. Zusammenfassen von Brüchen
  - a)  $\frac{2x}{5a-3} \frac{2}{5a+3} + \frac{10a-6}{25a^2-9}$

- b)  $\frac{2}{a-1} + \frac{4}{a-2} + \frac{4a}{2a^2+6a+4}$
- 11. Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen
  - a)  $\frac{x+2}{ac} \cdot \frac{x-2}{x} \cdot \frac{acx}{(x-2)^2}$
- b)  $\frac{2ax}{4n} \cdot \frac{12mn}{3c} \cdot \frac{4}{(-v)}$

c)  $\frac{2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{b+a}$ 

d)  $\frac{a^2 - b^2}{a + b} \cdot \frac{3b}{a - b}$ 

# 1.3 Gleichungen und Formeln

Mathematische und naturwissenschaftliche Gesetze und Zusammenhänge lassen sich durch Gleichungen und Formeln darstellen.

In Formeln verwendet man für häufig vorkommende Größen bestimmte Buchstaben als Formelzeichen.

# 1.3.1 Gleichungen

Tabelle 1: Gleichungsarten

Gleichungsart	Beispiel			
<b>Größengleichungen</b> (Formeln) stellen die Beziehungen zwischen Größen dar.	$v = \pi \cdot d \cdot n$			
Zahlenwertgleichungen geben die Beziehungen von Zahlenwerten und Größen wieder. Sie sollten nur in besonderen Fällen verwendet werden.	$P = \frac{Q \cdot p_{\rm e}}{600}$ gilt nur für: $Q \text{ Volumenstrom in } l/\text{min}$ $p_{\rm e} \text{ Druck in } \text{bar}$ $P \text{ Leistung in } kW$			
Bestimmungsgleichungen sind algebraische Gleichungen, bei denen der Wert einer Variablen zu berechnen ist	x + 3 = 8    -3 x = 8 - 3 x = 5			
	Der Wert von x ist durch die übrigen Größen 3 und 8 eindeutig bestimmt.			

# Aufbau von Gleichungen

Man kann eine Gleichung mit einer Waage im Gleichgewicht vergleichen (Bild 1).

Dabei sind die Werte auf der linken Seite und die Werte auf der rechten Seite gleich groß. Zwischen der linken und der rechten Größe steht das Gleichheitszeichen.

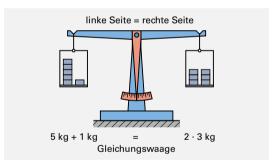


Bild 1: Balkenwaage

# Umstellen von Gleichungen

Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn die Inhalte der rechten und der linken Waagschale vertauscht werden.

Wird der Inhalt einer Waagschale verändert, so bleibt die Waage nur dann im Gleichgewicht, wenn der Inhalt der anderen Waagschale ebenso verändert wird. Daraus ergeben sich für das Lösen von Gleichungen folgende Regeln:

- Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.
- Verändert man eine Seite der Gleichung, so muss man auch die andere Seite um den gleichen Wert verändern.
- Soll die in einer Gleichung enthaltene Unbekannte berechnet werden, formt man die Gleichung so um, dass die gesuchte Größe allein auf der linken Seite im Zähler steht und positiv ist.
- Stellt man eine Größe einer Gleichung von der einen Seite der Gleichung auf die andere Seite, so erhält sie das entgegengesetzte Rechenzeichen.

Tabelle 1: Umformen von Gleichungen

Rechenart	Zahlenbeispiel	Algebraisches Beispiel	Anwendungsbeispiele
Addieren	x+7=18 x+7=18  -7 x+7-7=18-7 x=18-7 x=11	x + a = b $x + a = b$	Addieren, Subtrahieren $x-27+3x=6x-22-3x$ $x+3x-27=6x-3x-22$ $4x-27=3x-22                                   $
Subtrahieren	y-5=9 y-5=9 y-5+5=9+5 y=9+5 y=14	y-c = d $y-c = d$ $y-c+c = d+c$ $y = d+c$ $y = d+c$	-x + 2 = 13
Multiplizieren	$6 \cdot x = 23$ $6 \cdot x = 23$ $6 \cdot x = 23$ $6 \cdot \frac{x}{6} = \frac{23}{6}$ $x = \frac{23}{6}$ $x = 3\frac{5}{6}$ $\frac{y}{3} = 7$ $\frac{y}{3} = 7$ $\frac{y \cdot 3}{3} = 7 \cdot 3$ $y = 7 \cdot 3$ $y = 7 \cdot 3$ $y = 21$	$a \cdot x = b$ $a \cdot x = b$ $a \cdot x = \frac{b}{a}$ $x = \frac{b}{a}$ $x = \frac{b}{a}$ $\frac{y}{c} = d$ $\frac{y}{c} = d$ $\frac{y \cdot c}{c} = d \cdot c$ $y = d \cdot c$ $y = d \cdot c$ $y = d \cdot c$	Multiplizieren $\frac{9}{x} = 3$ $\frac{9}{x} = 3$ $\frac{9}{x} \cdot x = 3 \cdot x$ $\frac{9}{x} \cdot x = 3 \cdot x$ $9 = 3x$ $3x = 9$ $\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ $x = 3$
Potenzieren	$\sqrt{x} = 12$ $\sqrt{x} = 12$ $(\sqrt{x})^{2} = (12)^{2}$ $x = 144$ $x^{3} = 64$ $x^{3} = 64$ $\sqrt[3]{x^{3}} = \sqrt[3]{4^{3}}$ $x^{\frac{3}{3}} = 4^{\frac{3}{3}}$	$\sqrt{x} = m$ $\sqrt{x} = m$ $(\sqrt{x})^2 = (m)^2$ $x = m^2$ $x^3 = c^3$ $x^3 = c^3$ $x^3 = c^3$ $x^3 = c^3$	Radizieren $ \sqrt{15-x} = \sqrt{3+x} \qquad  \cdot()^{2} \\ (\sqrt{15-x})^{2} = (\sqrt{3+x})^{2} \qquad  \cdot()^{2} \\ 15-x=3+x \qquad  +x \\ 15-x+x=3+x+x \qquad  -3 \\ 15-3=3-3+2x \qquad  -3 \\ 12=2x \qquad  :2 \\ \frac{12}{2} = \frac{2x}{2} \\ 6=x \\ x=6 $
	x = <b>4</b>	$x^{\circ} = c^{\circ}$ $x = c$	

# Aufgaben Gleichungen

Die nachstehenden Bestimmungsgleichungen sind nach der Unbekannten x aufzulösen.

**1.** a) 
$$x + 25 = 40$$

d) 
$$27x - 21 = 27 + 3x$$

b) 
$$79 + x = 130$$

e) 
$$112,06 = x + 62\frac{3}{4}$$

c) 
$$12 + x = 21$$

f) 
$$3\frac{4}{5} + x = 39\frac{1}{2}$$

**2.** a) 
$$x - 7 = 16$$

d) 
$$8x - 17 = 7x - 20$$

b) 
$$x - 175,2 = 24,08$$

e) 
$$7.5 = x - 13.1$$

c) 
$$8 - x = 7$$

f) 
$$3 = 10x - 7$$

**3.** a) 
$$x \cdot 9 = 45$$

d) 
$$7.3x = 87.6$$

k) 
$$c = d \cdot x$$

b) 
$$13 \cdot x = 5.2$$

e) 
$$x \cdot b = a$$

h) 
$$145\frac{1}{2} = 11,64x$$

1) 
$$6\frac{1}{2} = 1.3x$$

c) 
$$8,5x = 59,5$$

i) 
$$-30 = 7.5x$$
  
m)  $15x = 4.5a$ 

**4.** a) 
$$\frac{X}{5} = 17$$

d) 
$$\frac{X}{3} = -6$$

b) 
$$\frac{x}{12} = 0.4$$

e) 
$$\frac{x+16}{2} = 40$$

c) 
$$7\frac{x}{3} = 14$$

f) 
$$15 = \frac{x}{12}$$

**5.** a) 
$$\frac{(2x-3)\cdot 3}{7} = 3$$

d) 
$$\frac{6 \cdot (13 + 10x)}{5} = 18$$

g) 
$$9 = \frac{3 \cdot (35 - 8x)}{11}$$

b) 
$$\frac{2 \cdot (50x - 4)}{7} = 6$$

e) 
$$7 = \frac{14 \cdot (5 - 3x)}{9}$$

h) 
$$12 = \frac{4 \cdot (41 - 12x)}{13}$$

c) 
$$\frac{4 \cdot (17 + 20x)}{11} = 8$$

f) 
$$4 = \frac{2 \cdot (41 - 7x)}{17}$$

i) 
$$\frac{6 \cdot (x+7)}{17 \cdot (x-4)} = 1$$

**6.** a) 
$$\frac{x}{36} = \frac{320}{256}$$

d) 
$$\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$$

b) 
$$\frac{500}{300} = \frac{x}{15}$$

e) 
$$\frac{x-4}{9} = \frac{x}{10}$$

c) 
$$\frac{3}{4}x = \frac{48}{2}$$

f) 
$$\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$$

**7.** a) 
$$19 = \frac{57}{X}$$

d) 
$$\frac{a^2bc}{0.2x} = c$$

b) 
$$\frac{100}{x} = 20$$

e) 
$$\frac{4}{X} = \frac{2}{3}$$

c) 
$$\frac{97.5}{x} = 32.5$$

f) 
$$\frac{15a^2b^2}{2x} = 10ab$$

**8.** a) 
$$\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x+3}{4} + 6$$

b) 
$$\frac{11x+7}{20} - \frac{9x-7}{5} = -2$$

c) 
$$\frac{2x}{7} + \frac{3x+1}{84x-7} = \frac{14x+2}{49}$$

**9**. a) 
$$3x^2 - 7 = 41$$

b) 
$$(x+3)^2 = (x-1)^2$$

c) 
$$x^3 - 122 = 3$$

**10.** a) 
$$7 + 4\sqrt{x+7} = 23$$

b) 
$$\sqrt{x^2 - 5x + 2} = x - 3$$

c) 
$$\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$$

#### 1.3.2 **Formeln**

Formeln sind Gleichungen, die technische oder naturwissenschaftliche Zusammenhänge beschreiben. Für die Umformung gelten die gleichen Regeln wie bei den Gleichungen:

- Auf beiden Seiten müssen immer die gleichen Veränderungen vorgenommen werden.
- Die gesuchte Größe muss bei der Lösung allein auf der linken Seite im Zähler stehen und muss positiv

# Beispiel 1

Die Formel  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$  soll nach  $z_1$  umgestellt werden.

# Beispiel 2

Die Formel  $R = \frac{\overline{\varrho \cdot l}}{\Delta}$  soll nach l umgestellt

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A} \qquad | \cdot A$$

$$R \cdot A = \frac{\varrho \cdot l \cdot A}{A}$$

$$R \cdot A = \varrho \cdot l \qquad | \cdot \varrho$$

$$\frac{R \cdot A}{\varrho} = \frac{\varrho \cdot l}{\varrho}$$

$$l = \frac{R \cdot A}{\varrho}$$

#### Aufgaben **Formeln**

Die Formeln sind nach den einzelnen Größen umzustellen.

- **1.** a)  $L = l + l_a$ d)  $L = l + l_a + l_u$
- **2.** a)  $U = \pi \cdot d$ d)  $P = U \cdot I$ 
  - g)  $A_{M} = \pi \cdot d \cdot h$
  - k)  $F = \frac{G}{5}$
  - n)  $A = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot b$
  - q)  $t_n = \frac{L \cdot i}{f_n}$
  - t)  $A = \frac{2}{3} \cdot l \cdot b$
- **3.** a)  $\frac{n_{\rm t}}{n_{\rm g}} = \frac{z_{\rm g}}{z_{\rm t}}$
- **4.** a)  $F_{\rm R} = (F_1 + F_2) F_{\Delta}$ 
  - d)  $i = T \cdot n_K + \frac{z_t}{z_0}$
- **5.** a)  $U_{20} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

- b)  $F_1 = F_2 + F_3$ e)  $d_a = d + 2m$
- b)  $U = l \cdot n$
- e)  $F = A \cdot p$ h)  $V = \pi \cdot d \cdot n$
- 1)  $m = \frac{p}{\pi}$
- o)  $\frac{Z_t}{Z_0} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$
- r)  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- u)  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2 \cdot l}$
- b)  $\frac{P}{P_L} = \frac{z_t}{z_0}$
- e)  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$
- b)  $U = 2 \cdot (l + b)$
- e)  $Q = c \cdot m \cdot (t_2 t_1)$

$$b) F = \frac{K \cdot M}{100} + Z \cdot l$$

c) 
$$F_A = F_1 - F_2$$

c) 
$$F_A = F_1 - F_B$$
  
f)  $d_f = d_a - 2h$ 

- c)  $m = V \cdot \rho$
- f)  $d = m \cdot z$ i)  $V = l \cdot b \cdot h$
- m)  $p = \frac{25,4}{3}$
- p)  $A = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{4}$
- m)  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
- v)  $v = \frac{s}{t}$
- c)  $\frac{P}{P_1} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}$
- f)  $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$
- c)  $A_0 = 2A + A_M$
- f)  $a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2}$
- c)  $Z_L = \frac{R_C \cdot R_L}{R_C + R_L}$

# 1.4 Winkelberechnungen

In der Technik werden Winkelangaben in Grad und überwiegend als Dezimalbruch angegeben, weil damit einfacher gerechnet und programmiert werden kann. Winkelmaße können auch in Grad, Minute und Sekunde ermittelt und mit dem Faktor 60 umgerechnet werden (Tabelle 1).

Tabelle 1: Einheiten der Winkel

Einheitenname	Umrechnung	Umrechnungsfaktoren
Grad	1° = 60′	Grad in Minute: 60 Grad in Sekunde: 60 · 60 = 3600
Minute	$1' = 60'' = \frac{1^{\circ}}{60}$	Minuten in Sekunde: 60 Minuten in Grad: $\frac{1}{60}$
Sekunde	$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^{\circ}}{3600}$	Sekunde in Minute: $\frac{1}{60}$ Sekunden in Grad: $\frac{1}{60 \cdot 60} = \frac{1}{3600}$

# Beispiel 1

Ein Kegelwinkel beträgt 2° 51′ 40″. Wie groß ist der Wert des Winkels als Dezimalbruch (Bild 1)?

Lösung: 2° = 2,00°  

$$51' = \frac{51^{\circ}}{60} = 0,85^{\circ}$$
  
 $40'' = \frac{40^{\circ}}{60 \cdot 60} = 0,011^{\circ}$ 

2°51'40"

### Beispiel 2

Die Winkelangabe  $\alpha$  = 15,71° ist in Grad, Minuten und Sekunden umzurechnen.

= 2.861°

Lösung: 
$$15^{\circ}$$
 =  $15^{\circ}$  =  $15^{\circ}$  0,71° = 0,71 · 60′ = 42,6′ 0,6′ = 0,6 · 60″ = 36″ =  $15,71^{\circ}$  =  $15^{\circ}$ 42′36″

#### Winkelarten

Für Winkel an Parallelen und sich schneidenden Geraden bestehen durch ihre Lage bestimmte geometrische Zusammenhänge (Bild 2).

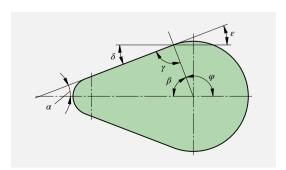
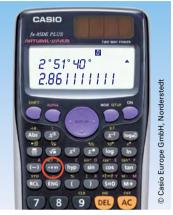
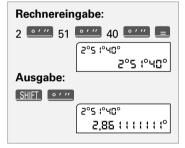
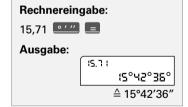


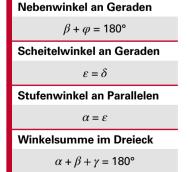
Bild 2: Winkelarten



**Bild 1: Taschenrechner** 







#### Aufgaben Winkelberechnungen

- 1. Umrechnungen. Die folgenden Winkel sollen in Grad und in Minuten angegeben werden: 27,5°; 62,67°; 38,23°.
- 2. Umrechnung. Rechnen Sie folgende Angaben um:
  - a) In Grad und Minuten: 362': 89': 582', 1324'.
  - b) In Minuten und Sekunden: 16,42'; 49,6'; 0,06'.
- 3. Platte (Bild 1). Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  der Platte sind zu berechnen.
- 4. Winkel im Dreieck (Bild 2). Wie groß ist jeweils der dritte Dreieckswinkel, wenn gegeben sind:

a) 
$$\alpha = 17^{\circ}$$
;

$$\beta$$
 = 47°

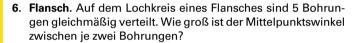
b) 
$$\gamma = 72^{\circ}$$
;

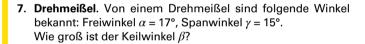
$$\beta = 31^{\circ}$$

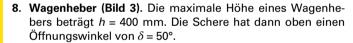
c) 
$$\alpha = 121^{\circ}$$
;

$$\gamma = 56^{\circ}41'$$

5. Mittelpunktswinkel. Wie groß sind jeweils der Mittelpunktswinkel  $\alpha$  und der Eckenwinkel  $\beta$  im regelmäßigen Sechs-, Acht- und Zehneck?

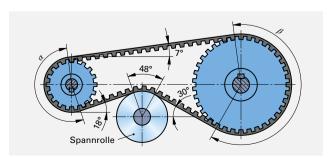






Wie groß sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ ?

- **9.** Schablone (Bild 4). Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  der Schablone sind mithilfe der Winkel 65° und 118° zu berechnen.
- 10. Zahnriementrieb (Bild 5). Wie groß sind die Umschlingungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Zahnriementriebes?



**Bild 5: Zahnriementrieb** 

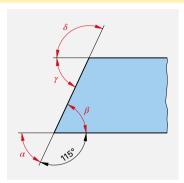


Bild 1: Platte

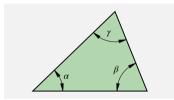


Bild 2: Winkel im Dreieck

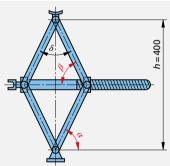


Bild 3: Wagenheber

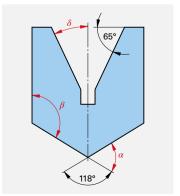


Bild 4: Schablone

# 1.5 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck können Winkel mit Hilfe von Funktionen über die Verhältnisse der Seitenlängen berechnet werden. Die **Hypotenuse** liegt dem rechten Winkel gegenüber und ist am größten. Die Katheten schließen den rechten Winkel ein und werden mit **Ankathete** und **Gegenkathete** bezeichnet. Die Ankathete und die Hypotenuse schließen den zu berechnenden Winkel ein (**Bild 1**).

Alle drei Seiten können jeweils paarweise zur Berechnung des Winkels  $\alpha$  ins Verhältnis gesetzt werden. Dabei haben ähnliche Dreiecke dasselbe Seitenverhältnis und den gleichen Winkel  $\alpha$  (Bild 2).

Dreieck I	$\frac{b}{a} = \frac{16}{40} = 0.4$	$\frac{b}{c} = \frac{16}{43,08} = 0,3714$	$\frac{a}{c} = \frac{40}{43,08} = 0,9285$
Dreieck II	$\frac{b}{a} = \frac{24}{60} = 0.4$	$\frac{b}{c} = \frac{24}{64,62} = 0,3714$	$\frac{a}{c} = \frac{60}{64,62} = 0,9285$
Winkel- funktion	$\tan \alpha = 0.4$	$\sin \alpha = 0.3714$	$\cos \alpha = 0,9285$

Der Winkel  $\alpha$  beträgt 21,7978° (Bild 2).

Um Rundungsfehler zu vermeiden, sollte der Funktionswert der Winkelfunktion mindestens vierstellig im Taschenrechner verarbeitet und angegeben werden.

# Definition der Winkelfunktion $Sinus = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$ Ankathete Kosinus = Hypotenuse Gegenkathete Tangens = Ankathete Hypothenuse mm a, b Kathete (An-, Gegen-) mm $\alpha, \beta$ Winkel sin Sinus cos Kosinus tan Tangens

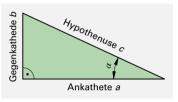


Bild 1: Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

# Beispiel 1

Zu den Winkelwerten in der Tabelle sind die entsprechenden Funktionswerte der Sinus-, Kosinus- und Tangens-Funktion zu berechnen.

Lösung:

Tabelle 1: Funktionswerte für verschiedene Winkel

Winkel	Funktionswerte				
α	$\sinlpha$	an lpha			
30°	0,5	0,866	0,5774		
45°	0,7071	0,7071	1		
90°	1	0	nicht def.		

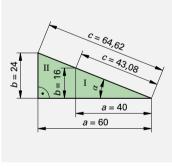


Bild 2: Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke

# Beispiel 2

An dem Rundstahl (Bild 3) mit Durchmesser 30 mm soll der größtmögliche Sechskant angefräst werden. Welche Schlüsselweite ergibt sich für den Sechskant?

Lösung: 
$$\alpha = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$$
;  $c = \frac{30 \text{ mm}}{2} = 15 \text{ mm}$   
 $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$   
 $a = c \cdot \cos \alpha = 15 \text{ mm} \cdot \cos 30^{\circ} = 12,9904 \text{ mm}$ 

 $SW = 2 \cdot a = 2 \cdot 12,9904 \text{ mm}$ 

 $SW = 25,9808 \text{ mm} \approx 26 \text{ mm}$ 

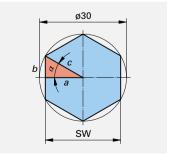


Bild 3: Sechskant

# Aufgaben Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

 Berechnungen im Dreieck. Die fehlenden Werte in der Tabelle 1 sind zu berechnen.

Tabelle 1: Berechnungen im Dreieck

	а	b	С	d	е	
Hypotenuse $c$ in mm	62		350	784		
Kathete a in imm		30			760	
Kathete b in mm		40				
<i>⊳</i> α	55°				42°40′	
⊳ <i>β</i>			50°	17,67°		

- 2. **Kegelräder (Bild 1)**: Zwei Kegelräder, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, haben die Teilkreisdurchmesser  $d_1$ =160 mm und  $d_2$ =88 mm. Gesucht sind die Teilkreiswinkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$ .
- Prismenführung (Bild 2): Für die Prismenführung ist das Maß x zu berechnen.
- Sinuslineal (Bild 3): Mit dem Sinuslineal werden Winkel geprüft. Den Abstand E setzt man aus Endmaßen zusammen.

Wie groß ist E für den Winkel  $\alpha$  = 24,5°, wenn die Länge des Sinuslineals L = 100 mm beträgt?

- **5. Drehteil (Bild 4):** Wie groß ist der Kegelwinkel  $\alpha$  am Drehteil?
- Trägerkonstruktion (Bild 5): Die Längen der 4 Stäbe d bis g sind zu berechnen.
- 7. Profilplatte (Bild 6): Die Außenkontur der Profilplatte wird in einem Schnitt auf einer NC-Maschine gefräst. Für die Konturpunkte P1 bis P8 sind die x- und die y-Koordinaten zu berechnen.
- 8. Leistungsdreieck (Bild 7): An einer Wechselspannung von 230 V 50 Hz wurden die Werte des Leistungsdreiecks ermittelt. Berechnen Sie a) die Scheinleistung S, b) die Blindleistung  $Q_L$  und c) die Teilspannungen  $U_W$  und  $U_{\rm bl}$ .

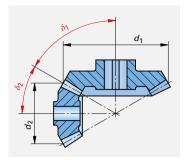


Bild 1: Kegelräder

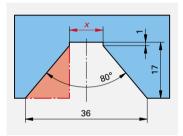
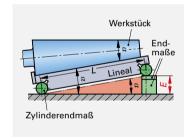


Bild 2: Prismenführung



**Bild 3: Sinuslineal** 

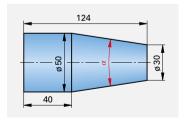


Bild 4: Drehteil

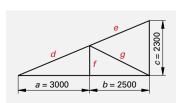


Bild 5: Trägerkonstruktion

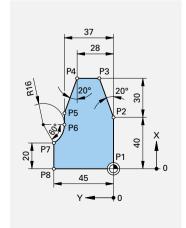


Bild 6: Profilplatte

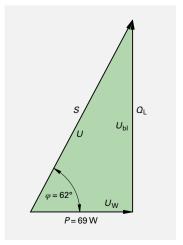


Bild 7: Leistungsdreieck

# 1.6 Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)

Mit der Schlussrechnung wird in drei Schritten die Lösung ermittelt.

# Schlussrechnung für direkt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich im gleichen Verhältnis, d.h. direkt proportional, zueinander.

# Beispie

25 Distanzplatten haben eine Masse m = 2800 g. Welche Masse haben 6 Distanzplatten (**Bild 1**)?

**Lösung:** Grundaussage: Die Menge  $A_m = 25$  Distanzplatten hat die Masse  $A_w = 2800$  g.

# Berechnung des Wertes für die Menge A = 1 Stück (St):

Eine Distanzplatte hat die Masse 
$$\frac{A_{\text{w}}}{A_{\text{m}}} = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} = 112 \frac{\text{g}}{\text{St}}$$

# Berechnung des Endwertes $E_{\rm w}$ die Endmenge $E_{\rm m}$ :

 $E_{\rm m}$  = 6 Distanzplatten haben die Masse

$$E_{\rm w} = \frac{A_{\rm w}}{A_{\rm m}} \cdot E_{\rm m} = \frac{2800 \text{ g}}{25 \text{ St}} \cdot 6 \text{ St} = 672 \text{ g}$$

# Schlussrechnung für indirekt proportionale Verhältnisse

Zwei voneinander abhängige Größen verhalten sich im umgekehrten Verhältnis, d. h. indirekt proportional, zueinander.

# Beispiel

Für die Montage von 12 Kettensägen benötigen 4 Mitarbeiter 3 Stunden. Wie viele Stunden benötigen 6 Mitarbeiter für die gleiche Anzahl Sägen (Bild 2)?

**Lösung:** Grundaussage: Die Menge  $A_m = 4$  Mitarbeiter benötigen die Zeit  $A_w = 3$  Stunden.

Berechnung des Wertes für die Menge A = 1 Mitarbeiter:

1 Mitarbeiter benötigt  $A_{\rm m} \cdot A_{\rm w} = 4 \cdot 3$  Stunden = **12 Stunden** 

Berechnung des Endwertes  $E_{w}$  die Endmenge  $E_{m}$ :

 $E_{\rm m}$  = 6 Mitarbeiter benötigen die Zeit

$$E_{\rm w} = \frac{A_{\rm m} \cdot A_{\rm w}}{E_{\rm m}} = \frac{4 \text{ Mitarbeiter} \cdot 3 \text{ h}}{6 \text{ Mitarbeiter}} = 2 \text{ h}$$

# Endwert bei direkt proportionalem Verhältnis

$$E_{\rm w} = \frac{A_{\rm w}}{A_{\rm m}} \cdot E_{\rm m}$$

# Endwert bei indirekt proportionalem Verhältnis

$$E_{\rm w} = \frac{A_{\rm w} \cdot A_{\rm m}}{E_{\rm m}}$$

 $A_{\rm m}$  Ausgangsmenge  $A_{\rm w}$  Ausgangswert  $E_{\rm m}$  Endmenge  $E_{\rm w}$  Endwert

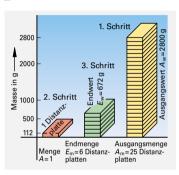


Bild 1: Distanzplatten

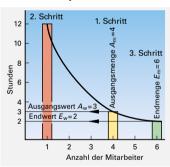


Bild 2: Arbeitsstunden

# Aufgaben Schlussrechnung

- 1. Werkstoffpreis: Eine Gießerei berechnet für Stahlguss einen Preis von 1,08 EUR/kg. Wie viel kosten 185 Deckel mit einer Masse von je 1,35 kg?
- 2. Schutzgasverbrauch: Die Schweißnaht an einem Schiff ist 78 m lang. Nach 23 m geschweißter Naht wurde ein Schutzgasverbrauch von 640 Liter festgestellt. Wie viel Liter Schutzgas sind für die Fertigstellung der Naht noch erforderlich?
- 3. Notstromaggregat: Im 3-stündigen Betrieb verbrauchen 2 Notstromaggregate 120 Liter Kraftstoff. Wie lange können 3 Aggregate mit einem Treibstoffvorrat von 240 Liter betrieben werden?
- **4. CuZn-Blech:** 3 m<sup>2</sup> eines 4 mm dicken Blechs aus CuZn37 haben eine Masse m = 136 kg. Welche Masse haben 10 m<sup>2</sup> Blech mit einer Blechdicke von 6 mm?
- 5. Qualitätskontrolle: In der Qualitätskontrolle benötigen 3 Prüfer 14 Stunden für einen Prüfvorgang. Wie viele Prüfer müssten eingesetzt werden, um die Kontrollarbeiten in etwa 8 Stunden zu schaffen?