



EUROPA-FACHBUCHREIHE  
für Kraftfahrzeugtechnik

# Technische Mathematik Fahrzeugtechnik – fachsystematisch –

Lehr- und Übungsbuch

M. Bell  
H. Eibl  
W. Schüler

27., überarbeitete Auflage

Verlag Europa-Lehrmittel · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 25384**

Der „Technischen Mathematik Fahrzeugtechnik, fachsystematisch“ wurden die bei Manuskriptabschluss vorliegenden neuesten Ausgaben der Normen und der gesetzlichen Vorschriften zugrunde gelegt. Die Auswahl ist auf die Erfordernisse in Schule und Praxis zugeschnitten.

Verbindlich sind jedoch nur die Normblätter und die gesetzlichen Vorschriften selbst. Die Normblätter können vom Beuth Verlag GmbH, 10772 Berlin, bezogen werden.

27. Auflage 2022, korrigierter Nachdruck 2025

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-7585-2538-4

Bei Fragen zur Produktsicherheit wenden Sie sich bitte an [produktsicherheit@europa-lehrmittel.de](mailto:produktsicherheit@europa-lehrmittel.de).

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2025 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
[www.europa-lehrmittel.de](http://www.europa-lehrmittel.de)

Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, 97082 Würzburg  
Umschlagfotos: shutterstock Images LLC, New York, USA: Bild 1(KsanderDN); 2(Maxx-Studio); 3(Andrey\_Popov); 4 CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg  
Druck: LUC GmbH, 59379 Selm

# Vorwort

Das Lehr- und Übungsbuch „Technische Mathematik Fahrzeugtechnik, fachsystematisch“ orientiert sich an den geltenden Lehrplänen und Ausbildungsordnungen und ist für den Einsatz in der kraftfahrzeugtechnischen Aus- und Weiterbildung konzipiert. Es beinhaltet mathematisches Grundwissen, Berechnungen zu physikalischen Grundlagen, kraftfahrzeugtechnisches Rechnen sowie betriebswirtschaftliches Rechnen im Bereich Lohn- und Kostenrechnung.

In der vorliegenden 27. Auflage wurde das Buch aktualisiert und dabei auf die aktuellen Auflagen des Tabellenbuchs (HT 3510) und der Formelsammlung (HT 3511) abgestimmt.

In den einzelnen Kapiteln wird der Lehrstoff klar gegliedert und anhand von Beispielen und zahlreichen Abbildungen anschaulich entwickelt. Die nachfolgenden praxisbezogenen Übungsaufgaben sind vorwiegend als Doppelaufgaben gestellt, sodass mit den in Klammern gesetzten Werten ein wiederholtes Üben der Aufgaben ermöglicht wird.

Zahlreiche Aufgaben lassen sich nur durch Nachschlagen von Werten (z. B. im Tabellenbuch) oder Auswerten von Diagrammen lösen. Dies fördert die Methodenkompetenz bei den Lernenden. Das Lösen der themenübergreifenden Übungsaufgaben (Kap. 40) verlangt Erlerntes in größeren Zusammenhängen anzuwenden.

In der Regel werden Größengleichungen nach DIN 1313 verwendet. Nur in wenigen Fällen, die zum besseren Verständnis eine Vereinfachung erfordern, sind auf bestimmte Einheiten zugeschnittene Zahlenwertgleichungen angegeben. Diese sind durch **Rotraster** besonders gekennzeichnet.

Die Verfasser

# Inhaltsverzeichnis

## 1 Allgemeines Rechnen

1.1 Zahlen, Größen, Runden von Zahlen	7
1.2 Taschenrechner	8
1.3 Dreisatzrechnen	9
1.4 Mischungs-, Verhältnisrechnen	10
1.5 Prozentrechnen	11
1.6 Zinsrechnen	12

## 2 Buchstabenrechnen

2.1 Grundrechenarten	13
2.2 Bruchrechnen	15
2.3 Potenzen	17
2.4 Wurzeln	18

## 3 Gleichungen

3.1 Gleichungen	19
-----------------	----

## 4 Grafische Darstellungen

4.1 Koordinatensystem	21
4.2 Grafische Darstellung von Funktionen	21
4.3 Diagramme	21

## 5 Winkel

5.1 Winkleinheiten	23
5.2 Winkelfunktionen	24
5.3 Lehrsatz des Pythagoras	26
5.4 Steigung, Gefälle	27

## 6 Längen

6.1 Längeneinheiten	28
6.2 Längenabmessungen	29
6.3 Maßstäbe in technischen Zeichnungen	30
6.4 Maßstäbe in grafischen Darstellungen	30
6.5 Toleranzen und Passungen	31
6.6 Längenteilung	33
6.7 Kreisumfang, Kreisbogenlänge	34
6.8 Gestreckte Länge	35

## 7 Flächen

7.1 Flächeneinheiten	36
7.2 Flächenarten	37
7.3 Flächenberechnungen	41

## 8 Volumen

8.1 Volumeneinheiten	43
8.2 Körperarten	44
8.3 Volumenberechnungen	48

## 9 Masse, Dichte

9.1 Masse	49
9.2 Masseinheiten	49
9.3 Dichte	49
9.4 Längenbezogene Masse	49
9.5 Flächenbezogene Masse	49

## 10 Kraft, Gewichtskraft

10.1 Kraft	51
10.2 Kräfteinheiten	51
10.3 Gewichtskraft	51

## 11 Geschwindigkeit

11.1 Zeiteinheiten	53
11.2 Durchschnittsgeschwindigkeit	54
11.3 Umfangsgeschwindigkeit	55
11.4 Schnittgeschwindigkeit	55

## 12 Beschleunigen und Bremsen

12.1 Beschleunigen aus dem Stand, Bremsen bis zum Stand	56
12.2 Anhalteweg	56
12.3 Beschleunigen und Bremsen in der Bewegung	58

## 13 Überholen

13.1 Überholen mit konstanter Geschwindigkeit	60
13.2 Überholen mit konstanter Beschleunigung	61
13.3 Sicherheitsabstand	61

## 14 Kräfte, Drehmoment, Hebel

14.1 Darstellung einer Kraft	62
14.2 Kräftemaßstab	62
14.3 Zusammensetzen von Kräften	63
14.4 Zerlegung einer Kraft	64
14.5 Drehmoment	65
14.6 Hebel	66
14.7 Auflagerkräfte	68

## 15 Riementrieb

15.1 Einfacher Riementrieb	69
15.2 Doppelter Riementrieb	69
15.3 Keilriementrieb	69

## 16 Zahnradtrieb

16.1 Einfacher Zahnradtrieb	71
16.2 Schneckentrieb	71
16.3 Doppelter Zahnradtrieb	71
16.4 Drehmomentwandlung	71

## 17 Reibung

17.1 Haftreibung	73
17.2 Gleitreibung	73
17.3 Rollreibung	73
17.4 Lagerzapfenreibung	73

## 18 Festigkeit

18.1 Zugbeanspruchung	75
18.2 Druckbeanspruchung	76
18.3 Flächenpressung	76
18.4 Schubbeanspruchung	77

## 19 Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad

19.1 Mechanische Arbeit	78
19.2 Einheiten der Arbeit	78
19.3 Mechanische Leistung	79
19.4 Einheiten der Leistung	79
19.5 Mech. Leistung aus dem Drehmoment	79
19.6 Wirkungsgrad	81

<b>20 Mechanische Energie</b>	
20.1 Potenzielle Energie	82
20.2 Spannenergie	82
20.3 Kinetische Energie	83
20.4 Energieumwandlung	83
<b>21 Hydraulik</b>	
21.1 Druckeinheiten	84
21.2 Druckgrößen	84
21.3 Flüssigkeitsdruck	85
21.4 Hydraulische Kraftübertragung	86
<b>22 Pneumatik</b>	
22.1 Gasdruck	87
22.2 Gasdruck und Volumen	88
22.3 Gasentnahme aus Druckbehältern	88
22.4 Gasdruck, Volumen und Temperatur	88
<b>23 Wärmetechnik</b>	
23.1 Temperatur	90
23.2 Wärmemenge	90
23.3 Berechnung der Wärmemenge	91
23.4 Wärmeausdehnung	93
<b>24 Verbrennungsraum</b>	
24.1 Hubraum	94
24.2 Hub- Bohrungsverhältnis	94
24.3 Liefergrad (Füllungsgrad)	94
24.4 Verdichtungsverhältnis	95
24.5 Verdichtungsänderung	96
<b>25 Kurbeltrieb</b>	
25.1 Mittlere Kolbengeschwindigkeit	98
25.2 Gasdruck und Kolbenkraft	99
25.3 Pleuelstangenverhältnis	99
25.4 Kräfte am Kurbeltrieb	101
25.5 Drehmoment an der Kurbelwelle	102
25.6 Motorarbeit	102
<b>26 Motorsteuerung</b>	
26.1 Steuerzeiten	104
26.2 Öffnungszeit der Ventile	104
26.3 Ventilöffnungsquerschnitt	106
26.4 Mittlere Gasgeschwindigkeit	106
<b>27 Motorleistung</b>	
27.1 Innenleistung aus dem Kolbendruck	107
27.2 Mechanischer Wirkungsgrad	107
27.3 Nutzleistung aus dem Drehmoment	109
27.4 Leistungsprüfung am Motor	110
27.5 Leistungsprüfung am Fahrzeug	110
27.6 Leistungskorrektur	110
27.7 Motor-Kenngrößen	112
<b>28 Kraftstoffverbrauch</b>	
28.1 Spezifischer Kraftstoffverbrauch	113
28.2 Kraftstoffverbrauch je Stunde	113
28.3 Nutzwirkungsgrad	114
28.4 Kraftstoffverbrauch Pkw (99/100/EG)	115
28.5 Kraftstoffverbrauch nach DIN 70030-2	115
28.6 Kraftstoff-Streckenverbrauch	115
28.7 Reichweite (Fahrbereich)	115
28.8 Luftverhältnis	117
28.9 Luftverbrauch je Stunde	117
<b>29 Motorkühlung</b>	
29.1 Frostschutz	118
29.2 Abzuführende Wärmemenge	119
29.3 Kühlflüssigkeitsdurchsatz	119
29.4 Kühlflüssigkeitsumläufe	119
<b>30 Motorschmierung</b>	
30.1 Schmieröldurchsatz	121
30.2 Schmierömläufe	121
30.3 Schmierölverbrauch	122
<b>31 Kupplung</b>	
31.1 Reibungskraft	123
31.2 Wirksamer Hebelarm	123
31.3 Übertragbares Kupplungsdrehmoment	123
31.4 Sicherheitsfaktor	123
31.5 Flächenpressung	123
31.6 Übersetzung der Pedalkraft	125
31.7 Mechanische Kupplungsbetätigung	125
31.8 Hydraulische Kupplungsbetätigung	125
31.9 Pedalkraft	125
<b>32 Wechselgetriebe und Achsantrieb</b>	
32.1 Ungleichachsiges Wechselgetriebe	127
32.2 Gleichachsiges Wechselgetriebe	129
32.3 Übersetzung im Achsantrieb	131
32.4 Gesamtübersetzung des Antriebsstrangs	131
32.5 Fahrgeschwindigkeit	131
32.6 Drehmoment an den Antriebsrädern	131
32.7 Planetengetriebe	133
32.8 Verteilung des Drehmoments	134
32.9 Wegausgleich bei Kurvenfahrt	135
<b>33 Achsen</b>	
33.1 Achslasten	136
33.2 Schwerpunktabstand	136
33.3 Verteilung der Nutzlast	136
33.4 Überlast	136
33.5 Achskräfte aus der Gesamtmasse	138
33.6 Achskräfte aus Leermasse und Nutzlast	138
33.7 Achskräfte aus Kfz-Masse und Stützlast	138
<b>34 Federung</b>	
34.1 Schraubenfeder	140
34.2 Luftfeder	140
<b>35 Lenkung</b>	
35.1 Lenkübersetzung	142
35.2 Spur	143
35.3 Nachlauf	143
35.4 Spurdifferenzwinkel	144
35.5 Lenktrapez	144
35.6 Lenkwinkel der Räder	144
35.7 Kleinster Spurendurchmesser	144

<b>36 Bremsen</b>			
36.1 Bremskraft	146	39.6 Leitungsberechnung	164
36.2 Bremskraftverteilung	146	39.7 Stromdichte	164
36.3 Maximale Bremskraft	146	39.8 Reihenschaltung	166
36.4 Maximale Bremsverzögerung	146	39.9 Parallelschaltung	166
36.5 Haftwertausnutzung	146	39.10 Gemischte Schaltung	166
36.6 Bremsarbeit bis zum Stillstand	148	39.11 Elektrische Leistung	168
36.7 Bremsleistung bis zum Stillstand	148	39.12 Elektrische Arbeit	168
36.8 Kolben- und Druckstangenkraft	149	39.13 Wirkungsgrad	168
36.9 Übersetzungen	149	39.14 Starterbatterie (Blei-Akkumulator)	170
36.10 Hydraulischer Bremsdruck	151	39.15 Zündanlage	172
36.11 Spannkraft der Radzylinder	151	39.16 Generator	174
36.12 Hydraulische Übersetzung	151	39.17 Starter	176
36.13 Bremskraft an der Radbremse	151	39.18 Temperaturmessung, Spannungscodierung	178
36.14 Bremskraft am Reifenumfang	151	39.19 Ansteuerung von Aktoren	180
36.15 Abbremsung	154	39.20 Wechselstrom	182
36.16 Abweichung	154		
36.17 Bremsverzögerung aus Abbremsung	154		
<b>37 Reifen</b>		<b>40 Übungsaufgaben (themenübergreifend) und Lösungen</b>	184
37.1 Reifenbezeichnung	156	<b>41 Lohnrechnung</b>	
37.2 Abrollumfang	156	41.1 Lohnberechnung	188
37.3 Dynamischer Reifenradius	156	41.2 Lohnabrechnung	190
37.4 Statischer Reifenradius	156		
37.5 Fahrgeschwindigkeit	156	<b>42 Kostenrechnung (Kalkulation)</b>	
<b>38 Fahrmechanik</b>		42.1 Einzelkosten	192
38.1 Rollwiderstand	158	42.2 Gemeinkosten	194
38.2 Luftwiderstand	158	42.3 Kalkulation in der Kfz-Werkstatt	196
38.3 Steigungswiderstand	158	42.4 Arbeitswerte	198
38.4 Gesamtfahrwiderstand	158	42.5 Werkstattabrechnung	200
38.5 Fahrwiderstandsleistung	160	42.6 Lagerabrechnung	202
38.6 Zugkraft an den Antriebsrädern	160	42.7 Kalkulation bei Handelswaren	204
38.7 Beschleunigungskraft	160	42.8 Kostenstellenrechnung	206
38.8 Fliehkraft beim Kurvenfahren	160	42.9 Betriebsabrechnung	206
<b>39 Elektrotechnik</b>		42.10 Deckungsbeitragsrechnung	208
39.1 Stromkreis, Größen, Einheiten	162	42.11 Abschreibung	210
39.2 Ohmsches Gesetz	162	42.12 Fahrzeugkosten	212
39.3 Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit	162	42.13 Maschinen- und Arbeitsplatzkosten	214
39.4 Leiterwiderstand	162	42.14 Prüfungsaufgaben	216
39.5 Spannungsfall (Spannungsverlust)	164	<b>Sachwortverzeichnis</b>	223

# 1 Allgemeines Rechnen

## 1.1 Zahlen, Größen, Runden von Zahlen

### a) Zahlen

**Natürliche Zahlen** sind 1, 2, 3, 4, 5, ...12, 13, ...

Man unterscheidet

- gerade Zahlen, z. B. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...
- ungerade Zahlen, z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
- Primzahlen, z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

#### Rationale Zahlen

– **Ganze Zahlen**, Einteilung in

- positive ganze Zahlen, z. B. +1, +2, +3, +4, +5, ...
- Null
- negative ganze Zahlen, z. B. -1, -2, -3, -4, -5, ...

– **Gebrochene Zahlen** (Brüche), Einteilung in

- endliche Dezimalbrüche, z. B. 3,25; 0,75; 0,1; 0,5
- periodische Dezimalbrüche, z. B. 0,333 ...; 1,666 ...
- gewöhnliche Brüche, z. B.  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{225}{100}$ ;  $\frac{475}{10000}$ ;

#### Irrationale Zahlen

- nicht periodische Dezimalbrüche mit unendlich vielen Stellen, z. B.  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ;  $\sqrt[3]{4} = 1,5874\dots$
- transzendente Zahlen, z. B. die Zahl  $\pi = 3,14\dots$

### Erläuterungen

- Ziffern (arabische) sind die Zeichen 0 bis 9 zur Darstellung von Zahlen.
- Durch Zählen erhält man die natürlichen Zahlen. Subtrahieren führt zu Null und zu den negativen Zahlen.
- Primzahlen sind durch keine ganze Zahl außer durch 1 und sich selbst teilbar.
- Rationale Zahlen sind alle ganzen Zahlen, endliche und periodische Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche.
- Irrationale Zahlen sind Zahlen, die nicht durch einen Bruch mit ganzen Zahlen ausgedrückt werden können, sondern durch unendliche Dezimalbrüche.

### b) Größen

- Größen sind benannte Zahlen. Sie bestehen aus Zahlenwert mal Einheit. Das Malzeichen wird nicht geschrieben, z. B. 5 m; 10 kg; 20 km; 100 kWh.

- Größen beschreiben messbare physikalische Eigenschaften wie Länge, Masse, Leistung.

### c) Runden von Zahlen (nach DIN 1333)

Rechenergebnisse, die nach dem Komma mehr Stellen aufweisen, als es die Genauigkeit verlangt, werden ab- oder aufgerundet. Die Dezimalstelle, an der nach dem Runden die letzte Ziffer steht, wird mit Rundestelle bezeichnet.

#### Abrunden

Steht rechts neben der gewählten Rundestelle eine der Ziffern 0 bis 4, so wird abgerundet, d. h. die Rundestelle bleibt unverändert.

#### Aufrunden

Steht rechts neben der gewählten Rundestelle eine der Ziffern 5 bis 9, so wird aufgerundet, d. h. die Rundestelle wird um 1 erhöht.

$$4,28 \cdot 7,12 = 30,4736$$

Ergebnis auf zwei Kommastellen runden, Rundestelle \_\_\_\_\_ ↑

$$4,28 \cdot 7,12 = 30,4736$$

Rundestelle \_\_\_\_\_ ↑  
Ergebnis: 30,47

$$4,28 \cdot 7,12 = 30,4736$$

Rundestelle \_\_\_\_\_ ↑  
Ergebnis: 30,5

### Beispiele

- Die Zahlen 3,235; 16,48; 0,319; 0,175 sind auf 1 Stelle nach dem Komma zu runden.
- Die Zahlen 0,446; 9,156; 3,844; 1,635 sind auf 2 Stellen nach dem Komma zu runden.

- 3,235  $\approx$  3,2; 16,48  $\approx$  16,5  
0,319  $\approx$  0,3; 0,175  $\approx$  0,2
- 0,446  $\approx$  0,45; 9,156  $\approx$  9,16  
3,844  $\approx$  3,84; 1,635  $\approx$  1,64

## 1.2 Taschenrechner

### Aufgaben

#### 1. Addieren und Subtrahieren

- a)  $325 + 1852 + 602 + 27$  e)  $85,62 + 63,29 - 7,42$   
 b)  $5,16 + 439,082 + 96,7$  f)  $965,75 - 89,42 + 0,30$   
 c)  $2735 - 460 - 736 - 89$  g)  $-35,21 + 84,39 - 27,6$   
 d)  $435,92 - 36,7 - 0,58$  h)  $69,54 + 8,07 - 92,31$

#### 2. Multiplizieren und Dividieren

- a)  $245 \cdot 376$  e)  $5436 : 12$   
 b)  $86,95 \cdot 4,2$  f)  $9684,74 : 2,6$   
 c)  $8,65 \cdot 35,42 \cdot 150$  g)  $80,1 \cdot 35 : 62,3$   
 d)  $92,25 \cdot 7,8 \cdot 4,5 \cdot 6$  h)  $608,88 : 23,6 \cdot 39,25$

#### 3. Klammerrechnen

- a)  $45 \cdot 36 + 52 \cdot 17$  e)  $15,2 \cdot (48,6 - 29,3)$   
 b)  $862 - 27 \cdot 19 + 345$  f)  $(63,7 + 24,5) \cdot 18,9$   
 c)  $328 - (63 + 145 - 87)$  g)  $(8,6 - 5) \cdot (9 + 3,4)$   
 d)  $(64 + 38) - (29 - 15)$  h)  $97 - (28,2 - 16) \cdot 6,5$

#### 4. Bruchrechnen

- a)  $\frac{46,8 \cdot 8,4}{6,5}$  c)  $\frac{(5,3 + 7,6) \cdot 33}{16,5}$  e)  $\frac{263 + 282}{97,8 - 54,2}$   
 b)  $\frac{2542}{12,5 \cdot 8,2}$  d)  $\frac{12\,287,7}{18,5 \cdot (81 - 45)}$  f)  $\frac{7 \cdot (89 + 91)}{65,7 + 60,3}$

#### 5. Potenzieren und Radizieren

- a)  $15^2$  f)  $25^3$  l)  $\sqrt{1225}$   
 b)  $26,4^2$  g)  $4,25^3$  m)  $\sqrt{92,16}$   
 c)  $24^2 - 16^2$  h)  $9^3 + 12^3$  n)  $\sqrt[3]{4096}$   
 d)  $(32,5 + 46,3)^2$  i)  $(56,7 - 28,3)^3$  o)  $\sqrt[3]{474,552}$   
 e)  $18,5 \cdot 14,2^2$  k)  $9,2^3 \cdot 15$  p)  $\sqrt{81} + \sqrt[3]{512}$

#### 6. Prozentrechnen

- a) 35 % von 462,8 e) 346,8 vermehrt um 25 %  
 b) 14 % von 1376,5 f) 820,5 vermehrt um 14 %  
 c) 28 % sind 18,2 g) 648,2 vermindert um 30 %  
 d) 114 % sind 79,8 h) ? % sind 135,1 von 482,5  
 Ges.: Grundwert i) ? % sind 55,92 von 372,8

#### 7. Rechnen mit der Zahl $\pi$ (Kreis, Kugel)

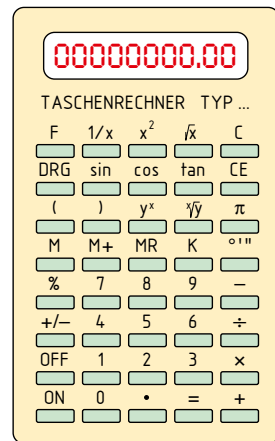
- Ergebnisse auf 2 Kommastellen runden  
 a)  $U = \pi \cdot 35$  e)  $A_o = \pi \cdot 24^2$  h)  $d$  aus  $U = 131,95$   
 b)  $U = \pi \cdot 52,6$  f)  $A_o = \pi \cdot 16^2$  i)  $d$  aus  $A = 5026,55$   
 c)  $A = \pi \cdot 28^2/4$  g)  $V = \frac{\pi \cdot 15^3}{6}$  k)  $d$  aus  $A_o = 452,39$   
 d)  $A = \pi \cdot 65^2/4$  l)  $d$  aus  $V = 268,09$

#### 8. Ermittlung der Winkelfunktionen

a) Sinus von	20°	90°	12,5°	5°10'
b) Cosinus von	70°	0°	23,8°	38°10'
c) Tangens von	45°	30°	10,5°	73°30'

#### 9. Wie viel Grad hat der Winkel $\alpha$ ?

a) Sinus $\alpha$	0,5	1	0,15	0,71
b) Cosinus $\alpha$	0,5	0	0,38	0,71
c) Tangens $\alpha$	1	0,5	1,5	30



Mithilfe von Taschenrechnern lassen sich die meisten Rechengänge schnell und zuverlässig durchführen. Da Ausstattung und Bedienung der Rechner verschieden sind, muss ihre Handhabung entsprechend der Gebrauchsanleitung erfolgen.

Die Symbole auf den Tasten sind meist Abkürzungen englischer Bezeichnungen. Es bedeuten z. B.

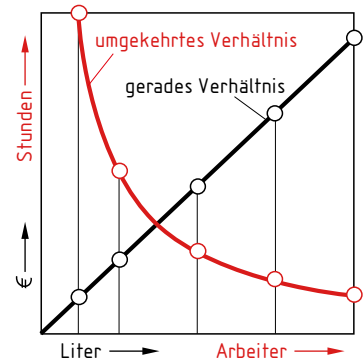
- ON** on:  
an, schalte ein
- OFF** off:  
aus, schalte aus
- C** clear:  
lösche
- AC** all clear:  
alles gelöscht
- CE** clear entry:  
lösche letzte Eingabe
- CM** clear memory:  
lösche Speicher
- M, S** memory, store:  
Erinnerung, Speicher
- M+** memory plus:  
speichere und addiere
- MR** memory recall:  
rufe Speicher zurück
- INV** invers:  
kehre um

Anzeige E error:  
Irrtum, Fehler

### 1.3 Dreisatzrechnen (Schlussrechnung)

Bei der Dreisatzrechnung kann aus drei gegebenen Größen eine vierte berechnet werden. Dabei wird von der gegebenen Mehrheit auf die Einheit und dann auf die gesuchte Mehrheit geschlossen. Man unterscheidet

- 1) Dreisatz mit geradem Verhältnis und dem Schluss:  
„je mehr, desto mehr“ bzw.  
„je weniger, desto weniger“
- 2) Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis und dem Schluss:  
„je mehr, desto weniger“  
„je weniger, desto mehr“



#### Beispiele

- 1) 20 l Öl kosten 90 €. Wie viel kosten 28 l Öl?
  - 20 l kosten 90 €                    Ansatz:
  - 1 l kostet 20ster Teil      $\frac{90 \text{ €} \cdot 28}{20} = 126 \text{ €}$
  - 28 l kosten 28-mal mehr
- 2) 6 Arbeiter brauchen 120 h. Wie viel h brauchen 8 Arbeiter?
  - 6 Arbeiter brauchen 120 h            Ansatz:
  - 1 Arb. braucht 6-mal mehr      $\frac{120 \text{ h} \cdot 6}{8} = 90 \text{ h}$
  - 8 Arb. brauchen 8-mal weniger

Dreisatz  
mit geradem Verhältnis:  
„je mehr, desto mehr“

Dreisatz  
mit umgekehrtem Verhältnis:  
„je mehr, desto weniger“

#### Aufgaben

1. Eine 15 (120) km lange Strecke legt ein Pkw in 9 (96) min zurück. Wie lange braucht er bei gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit für 40 (35) km Weg?
2. Der Vorratsbehälter einer Druckluftbremsanlage speichert bei 8,5 (10) bar Druck 340 (600) l Luft. Wie viel l Luft enthält er bei 4,8 (6,4) bar Druck?
3. Eine Stahlplatte von 12 (8) mm Dicke wiegt 22,5 (42,4) kg. Wie viel kg wiegt eine 20 (6) mm dicke Stahlplatte von gleich großer Fläche?
4. Der Kraftstoffbehälter eines Motorrades fasst 14 (26) l. Er wird gegen einen Behälter mit 12 (16) l höherem Fassungsvermögen ausgetauscht. Wie weit kommt das Motorrad mit einer Tankfüllung, wenn vor der Umrüstung 270 (410) km gefahren werden konnten?
5. Ein Pkw fährt mit 78 (70) km/h Durchschnittsgeschwindigkeit eine bestimmte Strecke in 5 h 25 min (3 h 20 min). Wie lange ist er bei 65 (112) km/h unterwegs?
6. Der Vorrat an Motoröl reicht 40 (25) Tage, wenn täglich 25 (27,2) l verkauft werden. Wie lange reicht derselbe Vorrat bei 20 (40) l Tagesverkauf?
7. Für 25 000 (19 440) Arbeitswerte benötigen 16 (9) Kfz-Mechatroniker 126 (160) Arbeitsstunden. Wie viele Stunden brauchen 12 (15) Kfz-Mechatroniker dazu?
8. Der Kraftstoffverbrauch eines Pkw erhöht sich durch die Montage eines Dachkoffers von 11 (8,5) l je 100 km auf 12 (9) l je 100 km. Welche Strecke kann der Wagen fahren, wenn ohne Dachkoffer mit einer Tankfüllung 540 (576) km zurückgelegt wurden?
9. Der Fuhrpark einer Firma besteht aus 6 Pkw. Bei einem Einsatz von 7 h am Tag verbrauchen die Fahrzeuge 441 l Kraftstoff.
  - a) Wie lange können 8 Fahrzeuge mit der Kraftstoffmenge fahren?
  - b) Wie viel l Kraftstoff werden benötigt, wenn diese 8 Fahrzeuge täglich 8 h fahren?
  - c) Wie viele Tage fahren 5 Fahrzeuge beim Einsatz von 7 h pro Tag mit 1470 l Kraftstoff?

## 1.4 Mischungs-, Verhältnisrechnen

Ein Verhältnis besteht aus dem Quotienten zweier Zahlen, z. B. 1:3 (eins zu drei). Zahlenverhältnisse lassen sich erweitern und kürzen, z. B. 1:3 erweitert auf 2:6. Aus zwei gleichwertigen Verhältnissen lässt sich eine Verhältnisgleichung bilden, z. B. 1:3 = 2:6, allgemein  $a:b = c:d$ .

Bei Mischungsverhältnissen werden Anteile oder Prozentteile angegeben. Zur Bestimmung der Teilmengen in kg oder l wird eine Verhältnisgleichung aufgestellt.

Es verhalten sich:

$$\frac{\text{Teilmenge}}{\text{Gesamtmenge}} = \frac{\text{Anteile}}{\text{Gesamtteile}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Prozentteile}}{100 \text{ Prozent}}$$

Beim Gemisch für Zweitaktmotoren wird das Mischungsverhältnis 1:k angegeben, z. B. 1:50, d. h. 1 l Schmieröl auf 50 l Kraftstoff. Es ist:

$$\frac{1}{k} = \frac{\text{Schmierölmenge in l}}{\text{Kraftstoffmenge in l}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{k} = \frac{V_s}{V_k}$$

### Beispiel

Geg.: 10,5 l Kühlflüssigkeit aus 2 Teilen Frostschutz und 4 Teilen Wasser.

Ges.: Wie viel l Frostschutz werden benötigt?

$$\text{Lös.: } m_1 = \frac{m \cdot t_1}{t} = \frac{10,5 \text{ l} \cdot 2}{6} = 3,5 \text{ l}$$

Zahlenverhältnisse

$$1:3, 2:6; a:b; \text{ oder } \frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{a}{b};$$

Verhältnisgleichungen

$$a:b = c:d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{m_1}{m} = \frac{t_1}{t} \quad \frac{m_1}{m} = \frac{p_1}{100 \%}$$

$$m_1 = \frac{m \cdot t_1}{t} \quad m_1 = \frac{m \cdot p_1}{100 \%}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{V_s}{V_k} \quad V_G = V_k + V_s$$

$$V_s = \frac{V_k}{k} \quad V_s = \frac{V_G}{k+1}$$

k Kraftstoffteile

m Gesamtmenge in kg oder l

m<sub>1</sub> Teilmenge in kg oder l

p<sub>1</sub> Prozentteile

t Gesamtteile

t<sub>1</sub> Anteile, Anteilzahl

V<sub>G</sub> Gemischmenge in l

V<sub>k</sub> Kraftstoffmenge in l

V<sub>s</sub> Schmierölmenge in l

### Aufgaben

1. Bringen Sie die Verhältnisse x:y in die Form 1:? bzw. ?:1 (Kürzen mit der kleineren Zahl).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
x	1600	1800	3600	1450	1080	4033	4161	6960	2760	2723
y	4000	4950	4500	3770	450	2180	1140	4800	7314	1945

2. Lösen Sie die Verhältnisgleichungen nach der Unbekannten auf.

a)  $\frac{a}{4} = \frac{12}{24}$

b)  $b:5 = 60:30$

c)  $21:x = 14:8$

d)  $\frac{39}{21} = \frac{13}{y}$

3. Das Kühlsystem eines Pkw (Lkw) enthält 7,5 (38,5) l Kühlflüssigkeit, bestehend aus 1 Teil (3 Teilen) Frostschutz und 2 (4) Teilen Wasser. Berechnen Sie die Frostschutzmittel- und Wassermenge in l.

4. Der Elektrolyt einer Starterbatterie enthält bei 1,28 kg/l Dichte 37,4 % Massenteile konzentrierte Schwefelsäure, der Rest ist gereinigtes Wasser. Wie viel g konzentrierte Säure und Wasser werden für 1 l Elektrolyt benötigt?

5. In den Kraftstoffbehälter eines Kleinkraftrades wurden 0,15 (0,2) l Zweitakt-Schmieröl eingefüllt. Der Hersteller schreibt ein Mischungsverhältnis von 1:50 (1:100) vor. Berechnen Sie die erforderliche Kraftstoffmenge und die Gemischmenge in l.

6. a) Der Behälter der Scheiben- und Scheinwerferreinigungsanlage soll aufgefüllt werden. Die Füllmenge beträgt 7,2 l. Der Frostschutz soll bis -22 °C reichen. Wie viel l Frostschutzmittel sind nötig?

b) Wie viel Liter Reinigungsflüssigkeit können bei Frostschutz bis -14 °C mit 5 l Frostschutzmittel hergestellt werden?

c) Bis zu welcher Temperatur reicht der Frostschutz, wenn der Frostschutzmittelanteil 25 % beträgt?

### Mischungsverhältnis Frostschutzmittel/Wasser

1:3	bis -10 °C
1:2	bis -14 °C
1:1	bis -22 °C
unverdünnt	bis -70 °C

## 1.5 Prozentrechnen

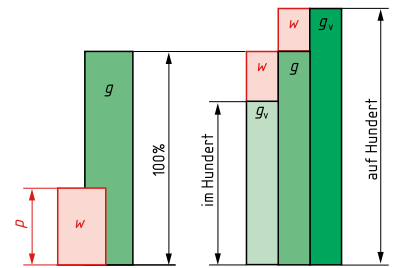
Die Prozentrechnung setzt den ganzen Wert einer benannten Zahl (Größe) gleich 100 und bezieht darauf die Teilwerte. Der 100ste Teil des Ganzen ist 1 vom Hundert oder 1 Prozent (pro centum), Zeichen „%“. Man bezeichnet den ganzen Wert mit Grundwert  $g$ , den Teilwert mit Prozentwert  $w$  und die Prozente des Teilwertes mit Prozentsatz  $p$ . Bei der Promillerechnung wird der ganze Wert auf 1000 bezogen. Der 1000ste Teil ist 1 vom Tausend oder 1 Promille, Zeichen „‰“.

$$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert} \times \text{Prozentsatz}}{100 \%}$$

Grundwerte können vermehrt oder vermindert sein:

vermehrter Grundwert  $g_v = \text{Grundwert} + \text{Prozentwert}$

verminderter Grundwert  $g_v = \text{Grundwert} - \text{Prozentwert}$



$$w = \frac{g \cdot p}{100 \%}$$

$$p = \frac{100 \% \cdot w}{g}$$

$$w = \frac{g_v \cdot p}{100 \% \pm p}$$

$$g = \frac{100 \% \cdot g_v}{100 \% \pm p}$$

### Beispiel

Geg.: Kaufpreis  $g = 1500 \text{ €}$ , Preisnachlass  $p = 7,5 \%$ .  
Ges.: Preisnachlass  $w$  in €.

$$\text{Lös.: } w = \frac{g \cdot p}{100 \%} = \frac{1500 \text{ €} \cdot 7,5 \%}{100 \%} = 112,50 \text{ €}$$

- $g$  Grundwert (Wert, auf den die Prozentrechnung bezogen ist)
- $g_v$  vermehrter Wert (auf Hundert) (vermehrt =  $g + w$ )
- $g_v$  verminderter Wert (im Hundert) (vermindert =  $g - w$ )
- $p$  Prozentsatz in %
- $w$  Prozentwert (Wert, der dem Prozentsatz entspricht)

### Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Tabellenwerte.

Aufgabe	a	b	c	d	e	f
Grundwert $g$	720 €	54,4 kg	1240 m	48 min	? $\text{cm}^2$	? l
Prozentwert $w$	60 €	6,8 kg	? m	? min	150 $\text{cm}^2$	94,6 l
Prozentsatz $p$	? %	? %	74 %	7,5 %	60 %	2,2 %

2. Der Listenpreis für eine Leichtmetallfelge beträgt 175 (215) €. Der Unternehmer erhält 31,50 (51,60) € Rabatt. Berechnen Sie den Händler Rabatt in %.
3. Die Laufleistung eines Pkw-Reifens beträgt 45 000 (38 000) km. Sie sinkt infolge zu niedrigen Luftdruckes um 12 (15) %. Wie viel km weniger können gefahren werden?
4. Ein Kfz-Verkäufer erhält von seiner Firma 0,95 (0,9) % Provision. Beim Verkauf eines Pkw sind das 404,70 (328,50) €. Wie hoch war der Preis für den Pkw?
5. Ein Kfz-Mechatroniker erhält nach 1,5 (2,3) % Lohnerhöhung einen Stundenlohn von 17,31 (19,13) €. Berechnen Sie die Aufbesserung und den früheren Stundenlohn.
6. Der Kraftstoffverbrauch eines neu entwickelten Motors ist um 13 (6) % geringer als beim bisherigen Motor und beträgt 5,3 (7,2) l/100 km. Wie hoch war der Verbrauch vorher?
7. Beim Verkauf eines Neufahrzeugs gelten folgende Daten: Grundpreis 28 900 €, Mehrpreis für Klimaanlage 750 €, Überführung und Zulassung 350 €, Preisnachlass 6 %, Mehrwertsteuer 19 %. a) Berechnen Sie den Listenpreis ohne Mehrwertsteuer. b) Wie hoch ist der Nettopreis für den Kunden? c) Ermitteln Sie den Rechnungsbetrag einschließlich Mehrwertsteuer.
8. Ein Kunde kauft ein Sportlenkrad und erhält einen Preisnachlass von 8 %. Der reguläre Verkaufspreis ohne Mehrwertsteuer beträgt 360 €. Berechnen Sie den Rechnungsbetrag bei einem Mehrwertsteuersatz von 19 %.

## 1.6 Zinsrechnen

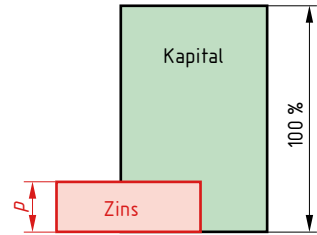
Zins erhält der Gläubiger von seinem Schuldner als Vergütung für das ausgeliehene Kapital oder der Sparer von der Bank für das eingezahlte Geld. Die Höhe des Zinses wird in Prozent des Kapitals ausgedrückt und gewöhnlich auf ein Jahr bezogen. Der Prozentsatz heißt Zinssatz (Zinsfuß). Bei 800 € Kapital und 7 % Zinssatz sind z. B. jährlich 800 € mal 7/100 gleich 56 € fällig.

$$\text{Jahreszins} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Zeit in Jahren}}{100 \%}$$

Soll der Zins für kürzere oder längere Zeit als ein Jahr berechnet werden, rechnet man mit dem Tageszins.

$$\text{Tageszins} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Zeit in Tagen}}{100 \% \times 360 \text{ Tage}}$$

Hierbei wird das Jahr zu 360 Tagen und der Monat zu 30 Tagen gerechnet.



### Beispiel

Ein Azubi möchte einen Roller kaufen und nimmt dafür 1500 € von der Bank auf. Der Zinssatz beträgt 7 %. Nach 240 Tagen bezahlt er das Geld wieder zurück.

Berechnen Sie die Zinsen in €.

Geg.:  $k = 1500 \text{ €}$ ,  $p = 7 \%$ ,  $t = 240 \text{ Tage}$

Ges.:  $z = ? \text{ €}$

$$\text{Lös.: } z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \% \cdot 360} = \frac{1500 \text{ €} \cdot 7 \% \cdot 240}{100 \% \cdot 360} = 70 \text{ €}$$

Jahreszins

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \%}$$

$$k = \frac{100 \% \cdot z}{p \cdot t}$$

$$p = \frac{100 \% \cdot z}{k \cdot t}$$

$$t = \frac{100 \% \cdot z}{k \cdot p}$$

$k$  Kapital in €

$p$  Zinssatz (Zinsfuß) in %

$t$  Zeit bei Jahreszins in Jahren

Zeit bei Tageszins in Tagen

$z$  Zins in €

Tageszins

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \% \cdot 360}$$

$$k = \frac{100 \% \cdot 360 \cdot z}{p \cdot t}$$

$$p = \frac{100 \% \cdot 360 \cdot z}{k \cdot t}$$

$$t = \frac{100 \% \cdot 360 \cdot z}{k \cdot p}$$

### Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.

Aufgabe	a	b	c	d	e	f
Kapital	2650 €	72 €	1440 €	2750 €	840 €	? €
Zinssatz	7 %	4,5 %	6,25 %	? %	4,5 %	5,5 %
Zeit	½ Jahr	5 Monate	14 Tage	1½ Jahre	? Tage	45 Tage
Zins	? €	? €	? €	165 €	15,75 €	3,30 €

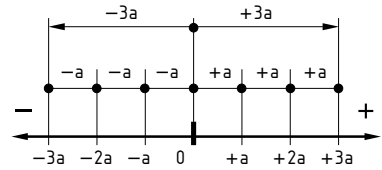
- Ein Kfz-Azubi nimmt zum Kauf eines Pkws 2225 (1320) € Kapital zu 8 (6) % Zinssatz für 2½ Jahre (195 Tage) auf. Welchen Betrag muss er samt Zinsen zurückbezahlen?
- Auf ein Sparkonto werden am 15. Januar 480 € (6. Februar 620 €), am 20. April 560 € (12. Juni 820 €) und am 1. Oktober 720 € (3. September 760 €) einbezahlt. Wie hoch ist der Kontostand am 31. Dezember bei 4,5 (5) % Zinssatz?
- Ein Teilhaber eines Kfz-Betriebes mit einem Anteil von 50 000 € (42 000 €) erhält im Vierteljahr (Monat) 937,50 (227,50) € Zins. Wie hoch ist die jährliche Verzinsung?
- Sie bezahlen eine Rechnung in Höhe von 212,30 (92,00) € 14 (90) Tage zu spät und müssen deshalb 5 (4) % Verzugszinsen bezahlen. Wie hoch ist der zu bezahlende Betrag?
- Ein Motorrad kostet 9950 (11 800) €. Der Kauf wird um ein Jahr verschoben und das Geld bei der Bank angelegt. Nach diesem Jahr bekommt der Motorradfreund 10 600 (12 300) € von der Bank ausbezahlt. Wie hoch war der Zinssatz?
- Wie viele Tage müssen 4500 (6240) € bei der Bank bleiben, um bei einem Zinssatz von 4 (5) % einen Zinsbetrag von 78 (351) € zu bekommen?
- An welchem Tag wurden 3600 (4000) € zu 7,5 (6,75) % ausgeliehen, wenn am 30. Juni (15. August) einschließlich der Zinsen 3633,75 (4054) € zurückbezahlt wurden?

## 2 Buchstabenrechnen

### 2.1 Grundrechenarten

In technischen Rechnungen ist es zweckmäßig, anstatt bestimmter Zahlen oder Größen Buchstaben zu verwenden. Damit kann man einfacher rechnen. Deshalb werden auch die meisten Rechenformeln mit Buchstaben ausgedrückt. Welche Buchstaben man wählt, ist im Allgemeinen gleichgültig. In der Technik werden aber zur besseren Verständigung die nach DIN geltenden Zeichen verwendet.

Gleiche Größen werden durch gleiche Buchstaben, ungleiche Größen durch verschiedene Buchstaben bezeichnet. Zahlen vor den Buchstaben, sogenannte Vorzahlen, geben an, wievielfach die betreffende Größe zu nehmen ist. Sind die Buchstaben durch + oder - verbunden, so spricht man von einer algebraischen Summe. Zusammengehörende Rechengänge werden in Klammern gesetzt.



$$+ a + a + a = 3\text{-mal } (+a) = +3a$$

$$- a - a - a = 3\text{-mal } (-a) = -3a$$

#### Bezeichnungen

- 3a Zahl
- 3 Vorzahl, Beizahl
- a Variable (Platzhalter für bestimmte Zahl)

#### Rechenverfahren

**Addieren, Subtrahieren** Vorzeichen der gleichartigen Summanden zusammenzählen oder abziehen.

**Rechnen mit Vorzeichen** Zahlen ohne Vorzeichen sind positiv. Sind Rechen- und Vorzeichen gleich, so wird die Zahl addiert. Sind Rechen- und Vorzeichen verschieden, so wird die Zahl subtrahiert. Beim Auflösen einer Plusklammer bleiben die Rechenzeichen, bei einer Minusklammer werden sie umgekehrt. Das Produkt zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv, mit ungleichem Vorzeichen negativ.

**Vervielfachen:** Vorzeichen miteinander malnehmen und alle Buchstaben ohne Rechenzeichen hinter das Produkt setzen.

- Faktoren  
- Summen  
Jedes Glied der Summe mit der Zahl vor bzw. hinter der Klammer malnehmen.

**Zerlegen in Faktoren** Gemeinsamen Faktor einer Summe vor eine Klammer setzen und Restfaktoren in der Klammer zusammenfassen.

**Teilen:** Vorzeichen durcheinander teilen und gleiche Buchstaben miteinander kürzen.  
- Faktoren  
- Summen  
Jedes Glied in der Klammer mit der Zahl hinter der Klammer teilen.

#### Beispiele

$$8b + 3b = 11b$$

$$12m + 3n - 7m = 5m + 3n$$

$$a = (+a)$$

$$+ (+a) = +a$$

$$- (-a) = +a$$

$$+ (-a) = -a$$

$$- (+a) = -a$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$(+a) \cdot (+b) = + (ab)$$

$$(-a) \cdot (-b) = + (ab)$$

$$(+a) \cdot (-b) = - (ab)$$

$$(-a) \cdot (+b) = - (ab)$$

$$2 \cdot 4a = 8a$$

$$3a \cdot 5b \cdot 4 = 60ab$$

$$(+5a) \cdot (-7b) = - (35ab)$$

$$4 \cdot (a + b) = 4a + 4b$$

$$(4b - 7) \cdot 3a = 12ab - 21a$$

$$8a + 8b = 8 \cdot (a + b)$$

$$4ab - 4ac = 4a \cdot (b - c)$$

$$3bx - 6dx = 3x \cdot (b - 2d)$$

$$8a : 2 = 4a$$

$$6ab : 2a = 3b$$

$$(9b + 6c) : 3 = 3b + 2c$$

$$(6a - 8ax) : 2a = 3 - 4x$$

## Aufgaben

### 1. Addieren und Subtrahieren von Zahlen

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| a) $17a + 9a - 12a + 15a - 8a$    | e) $29y - 14a - 17y + 22a + 8y - 10a$  |
| b) $14b - 6b - 18b + 26b - 7b$    | f) $-18z + 9b + 12z - 17b + 6z + 24b$  |
| c) $-25x + 13x - 10x + 28x - 16x$ | g) $-27c - 13x + 21x + 18c - 5c + 15x$ |
| d) $-7d - 18d + 37d - 12d + 11d$  | h) $45d - 19d - 28 + 17 - 24d + 9$     |

### 2. Addieren und Subtrahieren von Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

- |                    |   |
|--------------------|---|
| a) $35a + (-17a)$  | g) $9a + (-5a) + (+12a) - (+14a) - (-8a)$             |
| b) $23b + (+14b)$  | h) $-16b + (+9b) - (+15b) - (-24b) + (-3b)$           |
| c) $-16c + (+25c)$ | i) $12c - (-16d) + (-7c) - (+12d) + (+15c) + (-9d)$   |
| d) $-28d + (-19d)$ | k) $-17e + (-8f) + (+12e) - (+18f) + (-19e) - (-32f)$ |
| e) $32e - (+23e)$  | l) $15x - (+12a) - (-7x) + (-13a) - (+17x) + (+25a)$  |
| f) $27f - (-18f)$  | m) $-24b - (-32b) + (-16y) + (+2b) - (-25y) - (+7y)$  |

### 3. Rechnen mit Klammern

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| a) $9a + (14a - 8a)$     | f) $16g - (28g - 9g) + (-15g + 24g) - 5g$      |
| b) $-38c + (-12c + 21c)$ | g) $-(18h + 12 - 10h) - (-25 - 19h + 7)$       |
| c) $15d - (7d + 12d)$    | h) $25x - [14i + (9x - 25i) - 4x] - 16i$       |
| d) $-32f - (14f - 55f)$  | i) $-[17k - (9y + 12k) + 14y - 8k] - 13y$      |
| e) $16g - (-24g + 20g)$  | k) $[19a - (7z + 14a)] - [18z + (-15a + 10z)]$ |

### 4. Multiplizieren von Produkten ohne Vorzeichen

- |                   |                     |                      |                           |
|-------------------|---------------------|----------------------|---------------------------|
| a) $9a \cdot 7$   | e) $12ab \cdot 5c$  | i) $11cd \cdot 15ay$ | n) $5a \cdot 3b \cdot 7c$ |
| b) $12 \cdot 8b$  | f) $9a \cdot 15cd$  | k) $25ex \cdot 28gy$ | o) $9x \cdot 4a \cdot 5c$ |
| c) $13a \cdot 6b$ | g) $18ac \cdot 4bd$ | l) $66hk \cdot 50ax$ | p) $8d \cdot 6a \cdot 3x$ |
| d) $16c \cdot 7b$ | h) $17ax \cdot 9bd$ | m) $52bx \cdot 75ac$ | q) $2y \cdot 7z \cdot 9x$ |

### 5. Multiplizieren von Produkten mit Vorzeichen

- |                          |                            |                                     |
|--------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| a) $(+7a) \cdot (+8)$    | e) $(-7ab) \cdot (+13de)$  | i) $(+15n) \cdot (+3s) \cdot (+4a)$ |
| b) $(-12) \cdot (-7b)$   | f) $(+4ax) \cdot (+25cd)$  | k) $(+5a) \cdot (-8c) \cdot (+12b)$ |
| c) $(+16c) \cdot (-6a)$  | g) $(-5ab) \cdot (-30ey)$  | l) $(-7b) \cdot (+8c) \cdot (-5d)$  |
| d) $(-15d) \cdot (+12x)$ | h) $(+15ac) \cdot (-12dx)$ | m) $(-9b) \cdot (-6d) \cdot (-2r)$  |

### 6. Multiplizieren von Summen

- |                           |                                  |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $6 \cdot (5a + 7b)$    | e) $(-15a) \cdot (-6b + 9c)$     | i) $(a + 4) \cdot (b + 7)$       |
| b) $12 \cdot (6b - 8c)$   | f) $(-11f - 3x) \cdot (-10c)$    | k) $(a + b) \cdot (c - d)$       |
| c) $(14c + 15x) \cdot 3a$ | g) $5a \cdot (14b + 18d - 12c)$  | l) $(3x - 12b) \cdot (9a + 15c)$ |
| d) $(13d - 18x) \cdot 5b$ | h) $(-15b) \cdot (5x + 8a - 9c)$ | m) $(5b - 8x) \cdot (17a - 12c)$ |

### 7. Zerlegen in Faktoren

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| a) $15 \cdot 4 + 15 \cdot 7$ | e) $12ab - 27ac - 78ad + 45ae - 51af + 21ag$   |
| b) $8 \cdot 19 - 8 \cdot 11$ | f) $91ax + 52bx - 117cx - 78dx + 26ex - 104fx$ |
| c) $26 + 65$                 | g) $5(a + b) + 12(a + b) - 9(a + b)$           |
| d) $25 - 35 + 45$            | h) $15a(2a - x) - 25(2a - x) + 45b(2a - x)$    |

### 8. Dividieren von Faktoren

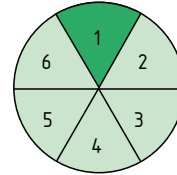
- |                     |   |
|---------------------|---|
| a) $36ab : 9a$      | e) $45ab : 5b + 72ax : 9x + 91ac : 7c$    |
| b) $52ax : 4x$      | f) $68bx : 4b + 78ax : 13a - 225cx : 15c$ |
| c) $119bx : 17b$    | g) $60ac : 12a - 192bx : 4b + 77cx : 7x$  |
| d) $144ay : (-12a)$ | h) $84ab : (-7b) + (-153ax) : 17x$        |

### 9. Dividieren von Summen

- |                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(85a - 51b + 119c) : 17$     | d) $(60ax + 90bx - 45cx) : (15x)$    |
| b) $(6ab + 12ac + 15ad) : (3a)$  | e) $(98cy - 126y + 28ay) : (-14y)$   |
| c) $(72bx - 96b + 48bc) : (12b)$ | f) $(-168az + 54ax - 156ay) : (-6a)$ |

## 2.2 Bruchrechnen

Ein Bruch ist eine Zahl, die eine Einheit – ein Ganzes – in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zerlegt. Die Zahl unter dem Bruchstrich, der Nenner, bezeichnet die Größe der Teilstücke. Die Zahl über dem Bruchstrich, der Zähler, gibt die Anzahl der Teilstücke an.



$$\frac{1}{6} \quad \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Schreibweise

$$\frac{1}{6} = 1/6 = 1:6$$

### Rechenverfahren

#### Kürzen, Erweitern

Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen bzw. mit der gleichen Zahl malnehmen; der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

Bei Summen alle Summanden kürzen und erweitern.

#### Haupt- nenner suchen

Alle Brüche durch Erweitern auf den gleichen Nenner bringen:

- Nenner in Primzahlen zerlegen,
- Primzahlen so zusammenstellen, dass alle Faktoren eines Nenners einmal im Hauptnenner enthalten sind,
- die gefundenen Primzahlen miteinander malnehmen.

#### Addieren, Subtra- hieren

Bei gleichnamigen Brüchen Zähler zusammenzählen oder abziehen und den Nenner beibehalten

Bei ungleichnamigen Brüchen: Nenner zuerst gleichnamig machen:

- Hauptnenner (HN) bestimmen,
- Erweiterungszahl (EZ) ermitteln,
- Brüche durch Erweitern gleichnamig machen,
- Zähler zusammenzählen oder voneinander abziehen und Hauptnenner beibehalten.

#### Multipli- zieren

Einzelzahl mit dem Zähler malnehmen oder Einzelzahl durch den Nenner teilen.

Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner malnehmen.

#### Dividieren

Bruch durch eine Zahl teilen: Zähler durch die Zahl teilen oder Nenner mit der Zahl malnehmen.

Bruch durch einen Bruch teilen: ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches malnehmen.

### Beispiele

$$\frac{12 ab}{9 a} = \frac{12 ab : 3 a}{9 a : 3 a} = \frac{4 b}{3}$$

$$\frac{3 a}{4 b} = \frac{3 a \cdot 2 c}{4 b \cdot 2 c} = \frac{6 ac}{8 bc}$$

$$\frac{ab+ac}{a} = \frac{(ab+ac) : a}{a : a} = b + c$$

$$\frac{4}{15 a}, \frac{7}{10 ab}, \frac{5}{12}, \frac{3}{8 b}$$

$$15 a = 3 \cdot 5 \cdot a$$

$$10 ab = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$8 b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot b$$

Hauptnenner:

$$120 ab = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$$

$$\frac{2 b}{3 a} + \frac{5 b}{3 a} + \frac{4 b}{3 a} = \frac{3 b}{3 a} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{3 x}{4 a} + \frac{5 x}{8 a} - \frac{7 x}{12 a} \quad (\text{EZ})$$

$$4 a = 2 \cdot 2 \cdot a \quad (2 \cdot 3)$$

$$8 a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \quad (3)$$

$$12 a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \quad (2)$$

$$\text{HN: } 24 a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$$

$$\frac{18 x + 15 x - 14 x}{24 a} = \frac{19 x}{24 a}$$

$$3 a \cdot \frac{b}{6} = \frac{3 a \cdot b}{6} = \frac{3 ab}{6} = \frac{ab}{2}$$

$$\frac{2 a}{5 b} \cdot \frac{7 c}{9 x} = \frac{2 a \cdot 7 c}{5 b \cdot 9 x} = \frac{14 ac}{45 bx}$$

$$\frac{6 ac}{7 b} : 3 a = \frac{6 ac}{7 b \cdot 3 a} = \frac{2 c}{7 b}$$

$$\frac{21 a}{8 b} : \frac{7 x}{4 b} = \frac{21 a}{8 b} \cdot \frac{4 b}{7 x} = \frac{3 a}{2 x}$$

## Aufgaben

1. Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache.

- |                                    |                                     |                                     |                                      |                                      |                                      |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{8}$ | b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10}$ | c) $\frac{4}{6} \cdot \frac{8}{10}$ | d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{18}$ | e) $\frac{6}{8} \cdot \frac{15}{24}$ | f) $\frac{2}{9} \cdot \frac{18}{14}$ |
| g) $\frac{abx}{bcx}$               | h) $\frac{5a}{15ab}$                | i) $\frac{3ax}{8xd}$                | k) $\frac{4cd}{6cx}$                 | l) $\frac{6ay}{9ab}$                 | m) $\frac{4bf}{10b}$                 |
| $\frac{acx}{ax}$                   | $\frac{6b}{2bc}$                    | $\frac{12ab}{16bd}$                 | $\frac{7bc}{12dx}$                   | $\frac{15b}{10by}$                   | $\frac{18mb}{24mf}$                  |

2. Kürzen von Brüchen

- |  |   |  |   |                           |                          |
|--|---|--|---|---------------------------|--------------------------|
| a) $\frac{120ab}{75a}$                 | b) $\frac{84ab}{126bx}$                 | c) $\frac{144bc}{54cy}$                  | d) $\frac{91bdy}{104y}$                 | e) $\frac{168adx}{126ax}$ | f) $\frac{525gxy}{630x}$ |
| g) $\frac{6a \cdot 42b}{18b \cdot 2a}$ | h) $\frac{20a \cdot 27x}{36x \cdot 15}$ | i) $\frac{15b \cdot 91a}{52x \cdot 35b}$ | k) $\frac{8b \cdot 36x}{30x \cdot 16c}$ |                           |                          |
| l) $\frac{6a + 18ab}{6a}$              | m) $\frac{98ab - 56ax}{28a}$            | n) $\frac{119ax + 85bx}{68x}$            | o) $\frac{108cx - 153c}{81c}$           |                           |                          |

3. Erweitern von Brüchen

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| a) $\frac{4a}{5b} = \frac{?}{35b}$           | b) $\frac{15b}{8x} = \frac{?}{96ax}$           | c) $\frac{9a}{14b} = \frac{?}{-182by}$       | d) $\frac{19d}{16z} = \frac{?}{-112adz}$ |
| e) $\frac{6ab + 2a}{15x} = \frac{?}{+225cx}$ | f) $\frac{8b - 12x}{27ax} = \frac{?}{-108adx}$ | g) $\frac{7a + 14}{16c} = \frac{?}{-144cdy}$ |  |

4. Addieren und Subtrahieren von Brüchen

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\frac{27a}{5} + \frac{13a}{5} - \frac{23a}{5}$              | b) $\frac{26ab}{7a} - \frac{43ab}{7a} + \frac{66ab}{7a}$  | c) $\frac{45bx}{12b} - \frac{58bx}{12b} + \frac{85bx}{12b}$ |
| d) $\frac{16c}{8} + \frac{18c}{12} - \frac{24c}{16}$            | e) $\frac{8bc}{4b} - \frac{17bc}{10b} + \frac{18bc}{15b}$ | f) $\frac{7ax}{6a} - \frac{8x}{15} - \frac{15ax}{18a}$      |
| g) $\frac{a+ab}{3a} + \frac{a+ab}{6a} - \frac{a+ab}{8a}$        | h) $\frac{3a-4b}{3} + \frac{a+6b}{4} - \frac{6a+b}{6}$    |   |
| i) $\frac{3ax+4x}{2x} - \frac{4ax-12x}{8x} - \frac{3x-6ax}{6x}$ |   |   |

5. Multiplizieren von Brüchen

- |  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| a) $\frac{4a}{5} \cdot 10x$                        | b) $\frac{4a}{5b} \cdot \frac{12b}{18a}$  | c) $\frac{5a}{6b} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7x}{2a}$  | d) $\frac{6x}{7b} \cdot \frac{3a}{8x} \cdot \frac{14b}{5c}$ |
| e) $\frac{3b}{4a} \cdot \frac{5x}{2b} \cdot (-8a)$ | f) $\frac{21c}{8x} \cdot \left(-\frac{3a}{4b}\right) \cdot \left(-\frac{6x}{7a}\right)$ | g) $\left(-\frac{12m}{32n}\right) \cdot \left(-\frac{49n}{77m}\right) \cdot \left(-\frac{40x}{8b}\right)$ |   |
| h) $\frac{2a+6}{5a} \cdot \frac{18a-15}{14b}$      | i) $\frac{6ax-5x}{8x} \cdot 9b$   | k) $\frac{8b-7x}{4x+15b} \cdot \frac{9a+12}{6-4a}$  |   |

6. Dividieren von Brüchen

- |   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| a) $\frac{90a}{5} : 6a$                           | b) $\frac{126b}{75a} : \frac{14b}{5}$                   | c) $\frac{195a}{204b} : \left(-\frac{13ax}{17bc}\right)$ | d) $\frac{558b}{456x} : \left(-\frac{31bc}{19ax}\right)$ |
| e) $\frac{5ab+15bx}{4a+12x} : \frac{15}{8}$       | f) $\frac{18s-63x}{14s-49x} : \frac{3t}{5v}$            | g) $\frac{20ab+36bx}{15a+27x} : \frac{2b}{9}$            |  |
| h) $\frac{16c+8d}{9a-3b} : \frac{4c+2d}{36a-12b}$ | i) $\frac{4x+6y}{12a-21c} : \frac{8bx+12by}{20ab-35bc}$ |  |  |

## 2.3 Potenzen

Produkte aus gleichen Faktoren lassen sich als Potenzen darstellen, z. B.  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ , gesprochen „fünf hoch drei“ oder bei  $5 \cdot 5 = 5^2$  auch „fünf Quadrat“. Die Hochzahl einer Potenz gibt an, wie oft die Grundzahl mit sich selbst multipliziert wird.

### Rechenverfahren

<b>Addieren</b>	Nur bei Potenzen mit gleicher Grundzahl und gleicher Hochzahl möglich.
<b>Multiplizieren</b>	Grundzahl gleich: Hochzahlen addieren. Hochzahl gleich: Grundzahlen miteinander multiplizieren, Hochzahl bleibt.
<b>Dividieren</b>	Grundzahl gleich: Hochzahlen abziehen. Hochzahl gleich: Grundzahlen durcheinander dividieren, Hochzahl bleibt.
<b>Potenzieren</b>	Hochzahlen miteinander multiplizieren.
<b>Sonderfälle</b>	Eine Potenz mit negativer Hochzahl ist gleich dem Kehrwert mit positiver Hochzahl.  Hochzahl 1: Potenzwert gleich Grundzahl. Hochzahl 0: Potenzwert gleich 1.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

5 Grundzahl oder Basis  
3 Hochzahl oder Exponent  
125 Potenzwert

### Beispiele

$$4^2 + 4^2 + 4^2 = 3 \cdot 4^2 = 48$$

$$5a^2 + 3a^2 - 2a^2 + a^2 = 7a^2$$

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$$

$$4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2$$

$$3a^2 \cdot 5b^2 = 15(ab)^2$$

$$4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$$

$$6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3$$

$$a^3 : b^3 = (a : b)^3$$

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$10^1 = 10 \quad a^1 = a$$

$$10^0 = 1 \quad a^0 = 1$$

### Aufgaben

- In Potenzform sind zu schreiben.
  - $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
  - $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
  - $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5$
  - $a \cdot a \cdot a$
  - $b \cdot b \cdot b \cdot b$
  - $a \cdot a \cdot b \cdot b$
  - $9x \cdot 9x \cdot 9x$
  - $2c \cdot 18c \cdot 6c$
  - $4ab \cdot 16ab$
  - $6a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 4b$
- Die Potenzen mit der Grundzahl 10 sind zu bilden.
  - 10
  - 100
  - 1000
  - 10000
  - 100000
  - 1000000
  - 1
  - 0,1
  - 0,01
  - 0,001
  - 0,0001
  - 0,00001
- Zu berechnen sind.
  - $n^2$  für  $n$ : 14
  - $n^3$  für  $n$ : 7
  - 27
  - 19
  - 39
  - 25
  - 48
  - 37
  - 55,6
  - 42,7
  - 69,2
  - 59,2
  - 87,6
  - 77,6
  - 96,4
  - 79,5
- Addieren und subtrahieren
  - $11a^3 + 5a^3 - 10a^3$
  - $8ab^2 + 7ab^2 - 11ab^2 - 4ab^2$
  - $5a^2 + 4a^2 + 2a^3 + 10a^3$
  - $5x^5 + 9x^5 - 12x^3 + 15x^3 - 10x^5$
  - $8b^4x - 7b^4x^2 + 9b^4x + 14b^4x^2$
  - $6a^3b^2 + 3n^2x^2 - (3a^3b^2 - 2n^2x^2)$
- Multiplizieren
  - $x^3 \cdot x^2$
  - $a^3 \cdot a^4 \cdot a^2 \cdot a$
  - $5b^2 \cdot 3b^4 \cdot 2b^3$
  - $7a^2b^3 \cdot 4a^3b \cdot 5a^3b^2$
  - $3b^2n^3x \cdot 8b^4x^3 \cdot 6n^3$
  - $(4x^2 - 5x) \cdot 9x^3$
  - $(3ntz)^3 \cdot 2(nt)^4$
  - $a^{2x} \cdot a^{3x} \cdot a^{4x}$
  - $a^2 \cdot b^2 \cdot x^3 \cdot z^3$
- Dividieren
  - $a^6 : a^4$
  - $8b^4 : 2b^3$
  - $4b^5n^3 : 16b^2n$
  - $28a^7c^5x^2 : 4a^4c^3x^5$
  - $42x^4y^2z : 3x^2y^4z^2$
  - $96ab^5 : 3ax^5$
  - $64(bx)^3 : (2bc)^3$
  - $12a^{5x} : 3a^{2x}$
  - $(4ab)^3 : 8ab^2$
- Potenzieren
  - $(a^2)^4$
  - $(a^3bx^2)^3$
  - $(3n^2s^3x)^2$
  - $12(b^3c^2x^4)^3$
  - $(n^3)^{-2}$
  - $(4b^{-3})^3$
  - $5(a^{-2})^{-3}$
  - $(a+b)^2$
  - $9(a-b)^2$

## 2.4 Wurzeln

Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die Umkehrung des Potenzierens. Bei der Wurzelrechnung sind Hochzahl und Potenzwert bekannt, die Grundzahl ist gesucht, z. B.  $x^2 = 25$ ,  $x = ?$  oder  $\sqrt[2]{25} = ?$ , gesprochen „zweite Wurzel (Quadratwurzel) aus 25“. Die Wurzelhochzahl 2 wird in der Regel nicht geschrieben.

### Wurzelziehen aus:

- Zahlen: Eine Zahl suchen, die, so oft wie die Hochzahl angibt, als Faktor im Radikand enthalten ist. Mehrstellige Radikanden werden in Gruppen von je 2 (3) Ziffern eingeteilt.
- Summen: Radikande zusammenzählen, dann radizieren. Wurzeln mit gleichen Radikanden und gleicher Hochzahl können addiert werden.
- Produkten: Produktwert radizieren oder jeden Faktor einzeln radizieren und multiplizieren.
- Quotienten: Quotientenwert radizieren oder Zähler und Nenner einzeln radizieren und dividieren.
- Potenzen: Potenzwert radizieren oder Grundzahl radizieren und Wurzelwert potenzieren. Gleiche Wurzel- und Potenzhochzahlen heben sich auf: Wurzelwert gleich Grundzahl.

### Aufgaben

#### 1. Radizieren von Zahlen

- |                   |                    |                     |                      |                       |                       |
|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt{9}$     | b) $\sqrt{64}$     | c) $\sqrt{144}$     | d) $\sqrt{225}$      | e) $\sqrt{625}$       | f) $\sqrt{2304}$      |
| g) $\sqrt{5625}$  | h) $\sqrt{8836}$   | i) $\sqrt{17424}$   | k) $\sqrt{50625}$    | l) $\sqrt{294849}$    | m) $\sqrt{743044}$    |
| n) $\sqrt[3]{27}$ | o) $\sqrt[3]{125}$ | p) $\sqrt[3]{2197}$ | q) $\sqrt[3]{42875}$ | r) $\sqrt[3]{185193}$ | s) $\sqrt[3]{571787}$ |

#### 2. Addieren und Subtrahieren von Wurzeln

- |   |   |
|---|---|
| a) $5\sqrt{16} + 7\sqrt{16} - 3\sqrt{16} + 12\sqrt{16}$     | b) $16\sqrt{a} - 9\sqrt{a} + 25\sqrt{a} - 12\sqrt{a}$         |
| c) $35\sqrt{ab} + 17\sqrt{ab} - 28\sqrt{ab} - 9\sqrt{ab}$   | d) $15a\sqrt{bx} - 8a\sqrt{bx} + 24a\sqrt{bx} - 12a\sqrt{bx}$ |
| e) $9a\sqrt{25} - 5b\sqrt{25} + 14b\sqrt{25} - 6a\sqrt{25}$ | f) $5\sqrt{ax} + 14\sqrt{bx} - 3\sqrt{ax} - 9\sqrt{bx}$       |

#### 3. Radizieren von Produkten

- |                           |                             |                             |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $\sqrt{16 \cdot 25}$   | b) $\sqrt{64 \cdot 81}$     | c) $\sqrt{225 \cdot 196}$   |
| d) $\sqrt{529 \cdot 841}$ | e) $\sqrt{1764 \cdot 3136}$ | f) $\sqrt{3844 \cdot 8836}$ |

#### 4. Radizieren von Quotienten

- |                             |                             |                              |                               |                                |                                  |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $\sqrt{\frac{64}{25}}$   | b) $\sqrt{\frac{324}{225}}$ | c) $\sqrt{\frac{576}{1024}}$ | d) $\sqrt{\frac{5929}{2500}}$ | e) $\sqrt{\frac{9801}{1296}}$  | f) $\sqrt{\frac{231361}{21904}}$ |
| g) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ | h) $\sqrt{\frac{a^4}{b^4}}$ | i) $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$  | k) $\sqrt{\frac{a^5}{b^4}}$   | l) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^6}}$ | m) $\sqrt[3]{\frac{a^7}{b^9}}$   |

#### 5. Radizieren von Potenzen

- |                 |                 |                    |                    |                  |                               |
|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|------------------|-------------------------------|
| a) $\sqrt{5^2}$ | b) $\sqrt{2^4}$ | c) $\sqrt{9^3}$    | d) $\sqrt{5^4}$    | e) $\sqrt{25^3}$ | f) $\sqrt[3]{(-2)^3}$         |
| g) $\sqrt{a^4}$ | h) $\sqrt{a^6}$ | i) $\sqrt[n]{a^n}$ | k) $\sqrt[3]{b^3}$ | l) $\sqrt{4x^2}$ | m) $\sqrt[3]{8x^3 \cdot y^3}$ |

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

- |    |                 |
|----|-----------------|
| 3  | Wurzelhochzahl  |
| 64 | Radikand, Basis |
| 4  | Wurzelwert      |

### Beispiele

$$\sqrt{16} = 4, \text{ denn } 4 \cdot 4 = 16$$

$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{ denn } 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\sqrt{0,0025} = \sqrt{0,00'25} = 0,05$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$3\sqrt{25} + 5\sqrt{25} = 8\sqrt{25} = 40$$

$$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt{4^3} = \sqrt{64} \quad (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

$$\sqrt{10^2} = 10 \quad \sqrt[3]{5^3} = 5$$

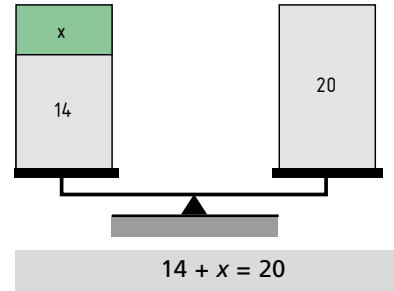
$$\sqrt{a^2} = a \quad \sqrt[3]{b^3} = b$$

# 3 Gleichungen

## 3.1 Gleichungen

Technische Formeln wie  $A = l \cdot b$  oder  $s = v \cdot t$  sind Gleichungen. Sie bestehen aus einer linken und einer rechten Seite. Da beide Seiten gleichwertig sind, wird zwischen den beiden Seiten ein Gleichheitszeichen gesetzt.

Jede Seite einer Gleichung kann aus verschiedenen Gliedern bestehen, die bekannt oder unbekannt sind. Unbekannte Größen werden in der Regel mit  $x$ ,  $y$  oder  $z$  bezeichnet. Durch Umformen der Gleichung werden alle bekannten Größen auf die rechte Seite und die unbekannte Größe allein auf die linke Seite gestellt.



### Rechenverfahren

**Umstellen der Glieder** Die Glieder einer Seite können in ihrer Reihenfolge beliebig umgestellt werden.

**Vertauschen der Seiten** Die linke und die rechte Seite einer Gleichung können miteinander vertauscht werden.

**Veränderung der Seiten** Jede Änderung der Gleichung muss auf beiden Seiten in gleicher Weise vorgenommen werden.

**Kehrwert der Seiten** Wird für eine Seite der Kehrwert geschrieben, so muss auch die andere Seite der Gleichung mit dem Kehrwert angesetzt werden.

**Umformen der Gleichung** Eine Gleichung wird so lange umgeformt, bis die unbekannte Größe  $x$  auf der linken Seite allein mit positivem Vorzeichen steht.

Kommt dabei ein Glied von der einen Seite auf die andere Seite der Gleichung so kehrt sich das Rechenzeichen des umgestellten Gliedes um.

- aus + wird -
- aus - wird +
- aus  $\cdot$  wird :
- aus : wird  $\cdot$

**Umformen von Brüchen** Ist in einer Gleichung die unbekannte Größe  $x$  mit einem Bruch verbunden, so muss dieser Bruch durch Umformen beseitigt werden:

- aus „Zähler“ werden „Nenner“.
- aus „Nenner“ werden „Zähler“.

### Beispiele

$$a - 16 + x = 28 \quad a + x - 16 = 28$$

$$x + a - 16 = 28 \quad x - 16 + a = 28$$

$$a + 36 = x - 12 \quad a + b = x - c$$

$$x - 12 = a + 36 \quad x - c = a + b$$

$$x + 3 = 15$$

$$x + 3 - 3 = 15 - 3$$

$$(x + 3) \cdot 3 = 15 \cdot 3$$

$$\frac{450}{x} = \frac{3}{2} \quad \frac{x}{450} = \frac{2}{3}$$

$$x + 5 = 22 \quad x + a = b$$

$$x = 22 - 5 \quad x = b - a$$

$$x - 4 = 16 \quad x - a = b$$

$$x = 16 + 4 \quad x = b + a$$

$$5 \cdot x = 30 \quad x \cdot a = b$$

$$x = 30 : 5 \quad x = b : a$$

$$x : 2 = 12 \quad x : a = b$$

$$x = 12 \cdot 2 \quad x = b \cdot a$$

$$\frac{5 \cdot x}{8} = 15 \quad \frac{a \cdot x}{c} = b$$

$$x = \frac{15 \cdot 8}{5} \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

## Aufgaben

Bestimmen Sie die unbekannte Größe aus den Aufgaben 1 bis 5.

### 1. Zahlengleichungen

- |  |                        |                   |
|--|------------------------|-------------------|
| a) $x + 6 = 10$  | d) $3x = 201$          | g) $x : 5 = 27$   |
| b) $x - 125 = 375$                                       | e) $322 = 7x$          | h) $3x : 12 = 16$ |
| c) $48 = 75 - x - 15$                                    | f) $6x + 27 = -9 + 9x$ | i) $450 : x = 25$ |
| k) $25x - 19x + 48 - 12 = 18x + 36 + 11 - 46 + 5x - 12x$ |                        |                   |
| l) $43y - 28 + 58 - 17y = -65 + 52y + 39 - 7y + 37$      |                        |                   |

### 2. Zahlengleichungen mit Klammern

- a)  $8x - (5x - 14) = 50$   
 b)  $3x + 39 - (4x + 28) = 6x - (7 - 11)$   
 c)  $5x - (-25 + 2x) - 16 = -8x + (-51 + 6x) - (-9x)$

### 3. Zahlengleichungen mit Produkten

- a)  $2(3x + 5) = 52$                       d)  $14(2x - 6) - 40 = 5(3x - 4)$   
 b)  $(10 - x) \cdot 7 = 98$                     e)  $8x - (2x + 15) \cdot 5 - 11 = 6(4x - 30) - 9x + 9$   
 c)  $9(x - 3) = 51 - 12(x - 4)$         f)  $(3x - 4) \cdot (20 - 2x) = (x - 16) \cdot (38 - 6x)$

### 4. Zahlengleichungen mit Brüchen

- |                                |   |   |
|--------------------------------|---|---|
| a) $\frac{5x}{2} = 15$         | e) $\frac{20 - 10x}{5} + 15 = 5$                      | i) $3(3x - 9) - \frac{11x - 5}{4} + 5 = -2$ |
| b) $\frac{-3x}{4} = 3$         | f) $\frac{6x + 7}{17} = \frac{9x - 12}{21}$           | k) $-7 + \frac{39}{x} = -4$                 |
| c) $\frac{x + 17}{3} = 15$     | g) $\frac{2x + 5}{5} + \frac{14 - 4x}{3} = 1$         | l) $\frac{22}{x + 2} = \frac{12}{x - 3}$    |
| d) $\frac{5x + 4}{2} + 5 = 12$ | h) $\frac{8x - 22}{4} - 20 = \frac{5(x - 7)}{2} - 12$ | m) $\frac{40}{3x + 4} = \frac{14}{38 - 2x}$ |

### 5. Gleichungen mit mehreren Variablen

- |                              |   |                                       |
|------------------------------|---|---------------------------------------|
| a) $6bx + 8bx = 42bc$        | e) $15ax = 75ad$                        | i) $\frac{54a}{x} = 6$                |
| b) $12ax + 5ax - 9ax = 56ab$ | f) $\frac{3x}{a} = 39$                  | k) $\frac{b}{2} = \frac{3b}{8y}$      |
| c) $8(x + 5a) = 104a$        | g) $\frac{4x}{2 + a} = 8$               | l) $\frac{9ab}{b + x} - a = 5a$       |
| d) $14(2x - 3ab) = 42ab$     | h) $\frac{2x}{4 + a} = \frac{8}{a + 4}$ | m) $\frac{26}{2a} = \frac{65}{a + x}$ |

### 6. Formen Sie folgende Gleichungen um.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| a) $U = \pi \cdot d$<br>$d = ?$   | b) $A = l \cdot b$<br>$l = ? \quad b = ?$           | c) $V = A \cdot h$<br>$A = ? \quad h = ?$                        |
| d) $v = \frac{s}{t}$<br>$s = ? \quad t = ?$                                       | e) $M = F \cdot r$<br>$F = ? \quad r = ?$           | f) $V = l \cdot b \cdot h$<br>$l = ? \quad b = ?$                |
| g) $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$<br>$d^2 = ? \quad d = ?$                         | h) $t = \frac{v}{a}$<br>$v = ? \quad a = ?$         | i) $i = \frac{n_1}{n_2}$<br>$n_1 = ? \quad n_2 = ?$              |
| k) $v_m = \frac{s \cdot n}{30}$<br>$s = ? \quad n = ?$                            | l) $V = \frac{A \cdot h}{3}$<br>$A = ? \quad h = ?$ | m) $P = F \cdot v$<br>$F = ? \quad v = ?$                        |
| n) $l_B = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$<br>$d = ? \quad \alpha = ?$ | o) $a = \frac{v^2}{2s}$<br>$v = ? \quad s = ?$      | p) $v_u = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{60}$<br>$d = ? \quad n = ?$ |