



EUROPA-FACHBUCHREIHE

für elektrotechnische und elektronische Berufe

# **Mathematik für Elektroniker/in für Automatisierungstechnik**

**Lehr- und Übungsbuch mit DVD  
der Mathematik und des Fachrechnens**

**15. neu bearbeitete Auflage**

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen  
und Seminaren (siehe Rückseite)

Ihre Meinung zum Buch interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum  
Buch mit. Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse [lektorat@europa-lehrmittel.de](mailto:lektorat@europa-lehrmittel.de)

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 33668**

## Autoren von „Mathematik für Elektroniker/in für Automatisierungstechnik“

Günther Buchholz	Dipl.-Ing. (FH), Oberstudienrat	Stuttgart
Monika Burgmaier	Oberstudiendirektorin	Offenburg
Patricia Burgmaier	Dipl.-Ing. (BA)	Melsungen
Elmar Dehler	Studiendirektor	Ulm
Bernhard Grimm	Oberstudienrat	Sindelfingen, Leonberg
Jörg A. Oestreich	Dipl.-Ing.	Schwäbisch Hall
Werner Philipp	Dipl.-Ing., Oberstudienrat	Heilbronn
Bernd Schiemann	Dipl.-Ing.	Durbach (Ortenau)

### Bildbearbeitung:

Wissenschaftliche PublikationsTechnik Kernstock, 73230 Kirchheim/Teck

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG, Ostfildern

Bild 3, Seite 257, unter Verwendung eines Fotos der Dr. Ing. h.c. F. Porsche AG, Deutschland

### Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Dipl.-Ing. Schiemann, Durbach

**ISBN 978-3-8085-3498-4**

Diesem Buch wurden die neuesten Ausgaben der DIN-Blätter und der VDE-Bestimmungen zugrunde gelegt. Verbindlich sind jedoch nur die DIN-Blätter und VDE-Bestimmungen selbst.

Die DIN-Blätter können von der Beuth-Verlag GmbH, Burggrafenstraße 4–7, 10787 Berlin, und Kamekestraße 2–8, 50672 Köln, bezogen werden. Die VDE-Bestimmungen sind bei der VDE-Verlag GmbH, Bismarckstraße 33, 10625 Berlin, erhältlich.

15. Auflage 2018

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2018 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten

<http://www.Europa-Lehrmittel.de>




Satz: Wissenschaftliche PublikationsTechnik Kernstock, 73230 Kirchheim/Teck

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagidee: Bernd Schiemann

Druck: UAB BALTO Print, LT-08217 Vilnius

## Kapitelübersicht

<b>1 Rechnen mit Zahlen</b>	<b>9</b>		<b>1</b>
<b>2 Rechnen mit Größen</b>	<b>19</b>		<b>2</b>
<b>3 Rechnen mit Formeln</b>	<b>22</b>		<b>3</b>
<b>4 Elektrotechnische Grundlagen</b>	<b>27</b>		<b>4</b>
<b>5 Wechselstromtechnik</b>	<b>60</b>		<b>5</b>
<b>6 Elektronische Schaltungen</b>	<b>91</b>		<b>6</b>
<b>7 Digitaltechnik</b>	<b>132</b>		<b>7</b>
<b>8 Sequenzielle Digitaltechnik</b>	<b>153</b>		<b>8</b>
<b>9 Informationstechnische Systeme</b>	<b>164</b>		<b>9</b>
<b>10 Elektrische Anlagen</b>	<b>182</b>		<b>10</b>
<b>11 Steuerungen und Antriebe</b>	<b>199</b>		<b>11</b>
<b>12 Sensorik (Messwertaufnehmer)</b>	<b>230</b>		<b>12</b>
<b>13 Regelungstechnik</b>	<b>235</b>		<b>13</b>
<b>14 Prüfungsaufgaben</b>	<b>254</b>		<b>14</b>
<b>15 Aufgaben zur Mechanik</b>	<b>266</b>		<b>15</b>
<b>16 Arbeiten mit Datenblättern</b>	<b>271</b>		<b>16</b>
<b>17 Ergänzendes Fachwissen Mathematik</b>	<b>278</b>		<b>17</b>
<b>Kurzlösungen zu den Aufgaben im Buch</b>	<b>305</b>		

# Vorwort zur 15. Auflage

Das Buch beinhaltet Aufgabenstellungen aus den Bereichen der Elektronik und Automatisierungstechnik. Es berücksichtigt die Kommunikations- und Informationstechnik mit der Automatisierungstechnik.

**Zielgruppen:** Auszubildende der Fachrichtung Elektronik, Automatisierungstechnik und Mechatronik in der dualen Ausbildung sowie Schüler und Schülerinnen an Berufsschulen, Berufskollegs (BW) und Technischen Gymnasien, Studenten an Fachschulen für Technik und Fachhochschulen, aber auch Praktiker im Beruf.

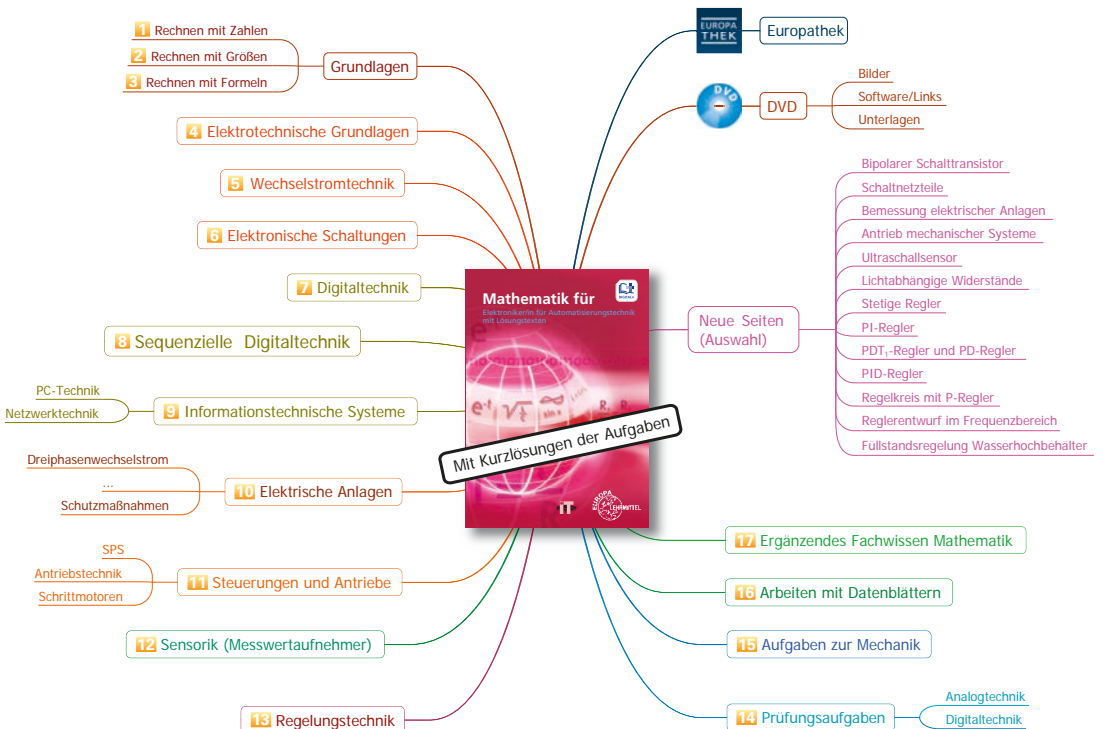
**Methodische Schwerpunkte:** Klare Strukturierung der Inhalte, z.B. der verwendeten Formeln nach Schwierigkeit und Komplexität. Betriebsmittelbenennungen nach aktueller Norm, Einführungsbeispiele zu jedem Thema, zahlreiche Schaltungsbeispiele und Grafiken aus Datenblättern, Vertiefung des Gelernten durch eine große Zahl von Übungsaufgaben.

Zum Fördern und Vertiefen mathematischer Zusammenhänge z.B. in Fachschulen für Technik, dient das Kapitel „Erweitertes Fachwissen Mathematik“.



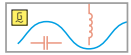




Digital+ beinhaltet einen Freischaltcode für das virtuelle Medienregal EUROPATHEK mit Bildern, Tabellen und z.B. Datenblättern und Diagrammen. Diese Inhalte finden Sie zusätzlich auf der beiliegenden DVD.

## Informationen zum Buch im Überblick:



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Rechnen mit Zahlen</b>		4.7.3	Wirkungsgrad und Arbeitsgrad . . . . .	39
1.1	Grundgesetze . . . . .		4.8	Grundschaltungen . . . . .	40
1.1.1	Vertauschungsgesetz, Verbindungsgesetz, Verteilungsgesetz . . . . .		4.8.1	Reihenschaltung . . . . .	40
1.1.2	Bruchrechnen . . . . .		4.8.2	Parallelschaltung . . . . .	41
1.2	Potenzen . . . . .		4.8.3	Gemischte Schaltungen . . . . .	42
1.2.1	Zehnerpotenzen . . . . .		4.8.4	Spannungsteiler . . . . .	45
1.2.1.1	Werte der Zehnerpotenzen . . . . .		4.9	Brückenschaltungen . . . . .	46
1.2.1.2	Rechnen mit Zehnerpotenzen . . . . .		4.10	Erzeuger-Ersatzschaltungen . . . . .	47
1.2.2	Sonstige Potenzen mit ganzen Exponenten . . . . .		4.10.1	Spannungserzeuger . . . . .	47
1.3	Rechnen mit Wurzeln . . . . .		4.10.2	Spannungserzeugung mit Fotovoltaik . . . . .	48
1.4	Logarithmen . . . . .		4.10.3	Sekundärelemente (der Energieelektronik) aufladen . . . . .	49
1.4.1	Rechenregeln, natürlicher und binärer Logarithmus . . . . .		4.10.4	Überlagerung bei linearen Netzwerken . . . . .	50
1.4.2	Zehnerlogarithmen . . . . .		4.10.5	Ersatzspannungsquelle . . . . .	51
1.4.3	Logarithmische Darstellung, Linearisieren . . . . .		4.10.6	Ersatzstromquelle . . . . .	52
1.5	Kehrwert, Prozentrechnen . . . . .		4.10.7	Anpassungsarten . . . . .	53
			4.11	Schaltungen simulieren mit PSpice . . . . .	55
			4.12	Temperatur und Wärme . . . . .	57
			4.12.1	Wärme und Wärmekapazität . . . . .	57
			4.12.2	Wärmewiderstand . . . . .	58
			4.12.3	Ermittlung von Kühlflächen . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Rechnen mit Größen</b>		<b>5</b>	<b>Wechselstromtechnik</b>	
2.1	Begriffe beim Rechnen mit Größen . . . . .		5.1	Wechselgrößen . . . . .	60
2.2	Umrechnen der Einheiten . . . . .		5.1.1	Periode, Frequenz, Kreisfrequenz, Wellenlänge . . . . .	60
2.3	Addition und Subtraktion . . . . .		5.1.2	Maximalwert, Spitze-Tal-Wert, Effektivwert . . . . .	60
2.4	Multiplikation und Division . . . . .		5.1.3	Impulse . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Rechnen mit Formeln</b>		5.2	Kondensator . . . . .	64
3.1	Umstellen von Formeln . . . . .		5.2.1	Elektrisches Feld . . . . .	64
3.2	Formel als Größengleichung . . . . .		5.2.2	Ladung und Kapazität . . . . .	64
3.2.1	Längen und Flächen . . . . .		5.2.3	Kraftwirkung und Energie des elektrischen Feldes . . . . .	65
3.2.2	Satz des Pythagoras . . . . .		5.2.4	Elektrische Flussdichte . . . . .	66
3.2.3	Geschwindigkeiten . . . . .		5.2.5	Kapazität . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Elektrotechnische Grundlagen</b>		5.2.6	Schaltungen von Kondensatoren . . . . .	67
4.1	Stromdichte . . . . .		5.2.7	RC-Schaltung an Gleichspannung und Rechteckspannung . . . . .	68
4.2	Widerstände . . . . .		5.2.8	Kapazitiver Blindwiderstand . . . . .	69
4.2.1	Widerstand und Leitwert . . . . .		5.3	Spule . . . . .	70
4.2.2	Widerstand und Temperatur . . . . .		5.3.1	Elektromagnetismus . . . . .	70
4.2.3	Leiterwiderstand . . . . .		5.3.1.1	Magnetische Grundgrößen . . . . .	70
4.3	Das Ohm'sche Gesetz . . . . .		5.3.1.2	Strom im Magnetfeld . . . . .	72
4.4	Messen . . . . .		5.3.2	Induktion und Induktivität . . . . .	73
4.4.1	Anzeigefehler bei Zeigermessgeräten . . . . .		5.3.3	Energie und Energiedichte des magnetischen Feldes . . . . .	74
4.4.2	Digitales Messen mit DMM . . . . .		5.3.4	RL-Schaltungen an Gleichspannung und Rechteckspannung . . . . .	75
4.4.3	Digitales Multimeter DMM . . . . .		5.3.5	Induktiver Blindwiderstand . . . . .	76
4.5	Rechnen mit Bezugspfeilen . . . . .		5.4	Schaltungen mit Blindwiderständen . . . . .	77
4.6	Elektrische Leistung bei Gleichspannung . . . . .		5.4.1	RC-Schaltungen und RL-Schaltungen . . . . .	77
4.7	Arbeit und Energie . . . . .		5.4.1.1	Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Blindwiderstand . . . . .	77
4.7.1	Elektrische Arbeit . . . . .		5.4.1.2	Verluste der Spule . . . . .	78
4.7.2	Mechanische Arbeit und Leistung . . . . .		5.4.1.3	Parallelschaltung von Wirkwiderstand und Blindwiderstand . . . . .	79

5.4.1.4	Verluste des Kondensators . . . . .	80
5.4.1.5	Grenzfrequenz . . . . .	81
5.4.1.6	Ersatz-Reihenschaltung und Ersatz- Parallelschaltung . . . . .	82
5.4.2	Schwingkreise . . . . .	83
5.4.3	Güte und Bandbreite bei Schwingkreisen . . . . .	85
5.4.4	Einfache RC-Siebschaltungen . . . . .	86
5.5	Wechselstromleistungen bei Einphasenwechselstrom . . . . .	87
5.6	Transformator . . . . .	89
5.6.1	Transformatorhauptgleichung . . . . .	89
5.6.2	Spannungsübersetzung, Stromübersetzung und Kurzschlussspannung . . . . .	90

## 6 Elektronische Schaltungen



6.1	Schaltungen mit nicht linearen Widerständen . . . . .	91
6.1.1	Differenzieller Widerstand . . . . .	91
6.1.2	Impedanzen im Arbeitspunkt . . . . .	91
6.1.3	Zeichnerische Lösung der Reihenschaltung . . . . .	92
6.1.4	Messschaltungen mit Pt100-Widerstandssensoren . . . . .	94
6.2	Schaltungen mit Dioden . . . . .	95
6.2.1	Festlegung des Arbeitspunktes . . . . .	95
6.2.1.1	Vorwiderstand von Dioden . . . . .	95
6.2.1.2	Zeichnerische Bestimmung des Arbeitspunktes . . . . .	96
6.2.2	Gleichrichterschaltungen . . . . .	97
6.2.2.1	Kenngößen . . . . .	97
6.2.2.2	Glättung und Siebung . . . . .	98
6.2.2.3	Siebung mit RC und LC . . . . .	99
6.2.3	Spannungsstabilisierung mit Z-Dioden . . . . .	100
6.2.3.1	Vorwiderstand für die Spannungsstabilisierung mit Z-Diode . . . . .	100
6.2.3.2	Eigenschaften von Stabilisierungsschaltungen . . . . .	101
6.3	Licht . . . . .	102
6.4	Schaltungen mit fotoelektronischen Bauelementen . . . . .	104
6.5	Verstärker mit bipolaren Transistoren . . . . .	105
6.5.1	Arbeitspunkt in der Emitterschaltung . . . . .	105
6.5.1.1	Gleichstromgrößen in Emitterschaltung . . . . .	105
6.5.1.2	Basisspannungsteiler und Stabilisierung des Arbeitspunktes . . . . .	106
6.5.1.3	Arbeitsgerade für Gleichstrom . . . . .	107
6.6	Verstärker mit Feldeffekttransistoren . . . . .	108
6.6.1	Gleichstromgrößen von FET in Sourceschaltung . . . . .	108
6.6.2	Wechselstromgrößen von FET in Sourceschaltung . . . . .	109
6.6.3	IGBT . . . . .	110
6.7	Thyristoren als elektronische Schalter . . . . .	111
6.8	Gesteuerte Stromrichter . . . . .	112
6.9	Operationsverstärker . . . . .	114
6.9.1	Verstärkung ohne Gegenkopplung . . . . .	114
6.9.2	Invertierender Verstärker . . . . .	115
6.9.3	Summiervverstärker . . . . .	115

6.9.4	Nicht invertierender Verstärker und Impedanzwandler . . . . .	116
6.9.5	Subtrahierverstärker . . . . .	116
6.9.6	Instrumentenverstärker (INV) . . . . .	117
6.9.7	Differenzier-Invertierer . . . . .	118
6.9.8	Integrier-Invertierer . . . . .	119
6.10	Kippschaltungen . . . . .	120
6.10.1	Transistoren als elektronische Schalter . . . . .	120
6.10.1.1	Grundschaltungen elektronischer Schalter . . . . .	120
6.10.1.2	Bipolarer Schalttransistor . . . . .	121
6.10.2	Schalten bei Ohm'scher, induktiver und kapazitiver Last . . . . .	122
6.10.3	Astable Kippschaltung . . . . .	123
6.10.4	Monostabile Kippschaltung . . . . .	124
6.10.5	Schwellwertschalter (Schmitt-Trigger) . . . . .	125
6.11	Stabilisierungsschaltungen . . . . .	126
6.11.1	Spannung stabilisieren . . . . .	126
6.11.2	Strom stabilisieren . . . . .	127
6.11.3	Spannung regeln mit IC . . . . .	128
6.11.4	Schaltnetzteile (SNT) . . . . .	129
6.11.4.1	Energiefluss in Schaltnetzteilen . . . . .	129
6.11.4.2	Durchflusswandler . . . . .	130
6.11.4.3	Sperrwandler . . . . .	131

## 7 Digitaltechnik



7.1	Aufbau der Zahlensysteme . . . . .	132
7.2	Dualzahlen . . . . .	133
7.2.1	Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen . . . . .	133
7.2.2	Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen . . . . .	134
7.2.3	Addition und Subtraktion von Dualzahlen . . . . .	135
7.2.4	Multiplikation und Division von Dualzahlen . . . . .	135
7.2.5	Subtraktion durch Komplementaddition . . . . .	136
7.3	BCD-Codes . . . . .	137
7.4	Hexadezimalzahlen . . . . .	137
7.4.1	Hexadezimalzahlen und Dualzahlen . . . . .	137
7.4.2	Addition und Subtraktion von Hexadezimalzahlen . . . . .	138
7.4.3	Hexadezimalzahlen und Dezimalzahlen . . . . .	139
7.5	Kombinatorische Digitaltechnik (Schaltnetze) . . . . .	140
7.5.1	Schaltalgebraische Begriffe . . . . .	140
7.5.2	Kommutativgesetz der Schaltalgebra . . . . .	141
7.5.3	Assoziativgesetz der Schaltalgebra . . . . .	142
7.5.4	Distributivgesetze der Schaltalgebra . . . . .	143
7.5.5	Schaltalgebraische Funktionen . . . . .	144
7.5.5.1	Umkehrgesetze für eine Variable . . . . .	144
7.5.5.2	Umkehrgesetze für mehrere Variablen . . . . .	144
7.5.6	Logische Verknüpfungen von Zahlen . . . . .	146
7.6	Minimieren und Realisieren von Schaltfunktionen . . . . .	147
7.6.1	Algebraisches Minimieren . . . . .	147
7.6.2	Realisieren mit NAND-Elementen . . . . .	148
7.6.3	Aufstellen des KV-Diagramms . . . . .	149
7.6.4	Minimieren mit dem KV-Diagramm . . . . .	150
7.7	Lastfaktoren . . . . .	152

## 8 Sequenzielle Digitaltechnik und programmierbare Logik

8.1	JK-Kippschaltungen . . . . .	153
8.2	Wertetabelle und Zeitablaufdiagramm aus der Schaltung . . . . .	154
8.3	Schaltfunktion aus Wertetabelle . . . . .	155
8.4	Schaltung aus Schaltfunktion . . . . .	156
8.5	Synchrone Zähler mit T-Kippgliedern . . . . .	157
8.6	Frequenzteiler . . . . .	158
8.7	PAL-Schaltkreise anwenden . . . . .	159
8.7.1	Schaltkreis PAL 10H8 . . . . .	160
8.7.2	Schaltkreis PAL 16RP8 . . . . .	162
8.8	Programmieren mit VHDL . . . . .	163

## 9 Informationstechnische Systeme

9.1	PC-Technik . . . . .	164
9.1.1	Speicherkapazität . . . . .	164
9.1.2	Bildauflösung und Speicherkapazität . . . . .	165
9.2	Signalverarbeitung . . . . .	166
9.2.1	Signalabtastung . . . . .	166
9.2.2	Signalumsetzer . . . . .	167
9.2.3	Geschwindigkeit der Datenübertragung . . . . .	168
9.2.4	Pegel und Dämpfung von Datenleitungen . . . . .	169
9.2.5	Wellenwiderstand und Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . . .	170
9.2.6	Übertragung mit Glasfasern . . . . .	171
9.3	Netzwerktechnik . . . . .	172
9.3.1	Lokale Netze . . . . .	172
9.3.1.1	Signallaufzeiten auf Bussystemen . . . . .	172
9.3.1.2	Signalgeschwindigkeit bei Sternverkabelung . . . . .	173
9.3.1.3	Errichten lokaler Netzwerke . . . . .	175
9.3.1.4	Messen und Fehlersuche . . . . .	177
9.3.1.5	Gebäudeverkabelung . . . . .	178
9.3.2	Internetadressierung und Subnetzmasken . . . . .	179
9.3.3	Subnetze . . . . .	180
9.3.4	Internetadressierung nach IPv6 . . . . .	181

## 10 Elektrische Anlagen

10.1	Drehstrom . . . . .	182
10.1.1	Sternschaltung . . . . .	182
10.1.1.1	Symmetrische, gleichartige Belastung . . . . .	182
10.1.1.2	Unsymmetrische, gleichartige Belastung . . . . .	183
10.1.2	Dreieckschaltung . . . . .	184
10.1.2.1	Symmetrische, gleichartige Last . . . . .	184
10.1.2.2	Unsymmetrische, gleichartige Last . . . . .	184
10.1.3	Leistungen bei Drehstrom . . . . .	185
10.2	Kompensation . . . . .	186
10.3	Leitungsberechnung . . . . .	188
10.3.1	Mindestquerschnitt und Strombelastbarkeit . . . . .	188
10.3.2	Strombelastbarkeit von Leitungen bei Umgebungstemperatur $\vartheta_u = 30^\circ\text{C}$ . . . . .	190
10.3.3	Spannungsfall nach VDE . . . . .	191

10.3.4	Verzweigte Leitungen . . . . .	192
10.4	Bemessung elektrischer Anlagen . . . . .	194
10.4.1	Berechnung des Schutzleiterwiderstands . . . . .	194
10.4.2	Widerstände in Schutzleitersystemen . . . . .	195
10.4.3	Schmelzsicherungen und Leitungsschutzschalter LS . . . . .	197
10.5	Schutzmaßnahmen . . . . .	198

## 11 Steuerungen und Antriebe

11.1	SPS-Technik . . . . .	199
11.1.1	SPS-Anweisungsliste (AWL) ohne Speicher . . . . .	199
11.1.2	Zusammengesetzte logische Verknüpfungen . . . . .	200
11.1.3	Speicherfunktionen . . . . .	201
11.1.4	Flankenauswertung . . . . .	202
11.1.5	SPS-Zeitfunktionen . . . . .	203
11.1.6	SPS-Zählfunktionen . . . . .	204
11.1.7	SPS-Datentypen und Umwandlungen . . . . .	205
11.1.8	Erweiterter Operationsvorrat von SPS . . . . .	206
11.1.9	Analoge Ein- und Ausgänge . . . . .	207
11.1.10	Normierung . . . . .	208
11.1.11	Entwurf eines GRAFCET (Schrittkettenteil) . . . . .	209
11.1.12	Aktionen bei GRAFCET . . . . .	211
11.1.13	Aktionen nach EN 61131-3 . . . . .	213
11.2	Antriebstechnik . . . . .	214
11.2.1	Leistungsbedarf ohne Rücksicht auf den Anlauf . . . . .	214
11.2.2	Antrieb mechanischer Systeme . . . . .	215
11.2.3	Leistung beim Anfahren . . . . .	216
11.2.4	Antrieb mit Gleichstrommotoren . . . . .	217
11.2.5	Ein-Quadranten-Steller (1Q-Steller) . . . . .	218
11.2.6	H-Brücke . . . . .	219
11.2.7	Antrieb mit Drehfeldmotoren . . . . .	220
11.2.8	Drehstromasynchronmotor (DASM) . . . . .	221
11.2.9	Kennwerte von Asynchronmotoren . . . . .	222
11.2.10	Asynchronmaschinen am Frequenzumrichter . . . . .	223
11.2.11	Projektierung einer Servoachse . . . . .	225
11.3	Schrittmotoren . . . . .	227
11.3.1	Schrittwinkel und Drehzahl . . . . .	227
11.3.2	Schrittmotoren ansteuern . . . . .	228

## 12 Sensorik (Messwertaufnehmer)

12.1	Ultraschallsensor (US-Sensor) . . . . .	230
12.2	Schaltabstand Näherungsschalter . . . . .	231
12.3	Messen mit Dehnungsmessstreifen . . . . .	232
12.4	Temperaturerfassung mit Widerstandsthermometer . . . . .	233
12.5	Lichtabhängige Widerstände . . . . .	234

## 13 Regelungstechnik

13.1	Unstetige Regler . . . . .	235
13.2	Stetige Regler . . . . .	236

13.2.1	P-Regler	236
13.2.2	PI-Regler	238
13.2.3	PDT <sub>1</sub> -Regler und PD-Regler	239
13.2.4	PID-Regler	240
13.2.5	Regler einstellen (Ziegler/Nichols)	241
13.3	Regelstrecken	242
13.3.1	Analyse von Regelstrecken	242
13.3.2	Regelkreis mit P-Regler	244
13.3.3	Frequenzgang (Bode-Diagramm <sup>1</sup> )	245
13.3.4	Reglerentwurf im Frequenzbereich	246
13.3.5	Auswahl der Reglerkennwerte	247
13.3.5.1	Reglerkennwerte für Regelstrecken mit Ausgleich	248
13.3.5.2	Reglerkennwerte für Regelstrecken ohne Ausgleich	249
13.4	Digitale Regelungstechnik	250
13.4.1	Digitalisierung und Signalabtastung	250
13.4.2	PID-Digitalregler mit Stellungsalgorithmus	251
13.4.3	Digitalregler	252
13.5	Direkte digitale Synthese DDS	253

## 14 Prüfungsaufgaben



14.1	Aufgaben der Analogtechnik	254
14.2	Aufgaben der Digitaltechnik	257
14.3	Prüfungsaufgaben der Digitaltechnik	259
14.3.1	Elektronisches Verkehrsschild	259
14.3.2	Säulenanzeige mit Leuchtdioden	260
14.3.3	Schaltungen mit monostabilen Elementen	261
14.3.4	Transportbandsteuerung (Projektaufgabe)	262
14.3.5	Codeprüfung (Projektaufgabe)	263
14.4	Prüfungsaufgaben	
	Automatisierungstechnik	264
14.4.1	Abfülleinrichtung für Schmierstoffe	264
14.4.2	Füllstandsregelung Wasserhochbehälter	265

## 15 Aufgaben zur Mechanik



15.1	Rauminhalte und Massen	266
15.2	Übersetzungen	267
15.3	Kraft und Kraftmoment	268
15.4	Kräfte und Bewegungslehre	270

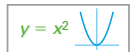
## 16 Arbeiten mit Datenblättern



16.1	Einführung in den Datenblattgebrauch	271
16.1.1	Allgemeine Angaben	271
16.1.2	Technische Kenngrößen in Datenblättern	272
16.1.3	Umgang mit Datenblättern von Spannungsreglern und Timer-Bausteinen	274

16.2	Überstromschutzeinrichtungen	275
16.3	Kleintransformatoren	276
16.4	Schütze	277

## 17 Ergänzendes Fachwissen Mathematik



17.1	Gleichungen	278
17.1.1	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	278
17.1.2	Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten	279
17.1.3	Quadratische Gleichungen	280
17.2	Funktionen	282
17.2.1	Beschreibungsformen bei Funktionen	282
17.2.2	Lineare Funktionen	283
17.2.3	Quadratische Funktionen	284
17.2.4	Trigonometrische Funktionen	285
17.2.4.1	Sinusfunktion und Kosinusfunktion	285
17.2.4.2	Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion	286
17.2.4.3	Tangensfunktion	287
17.2.4.4	Sinussatz und Kosinussatz	288
17.2.5	Exponentialfunktionen	289
17.2.6	Umkehrfunktionen	290
17.3	Differenzieren	291
17.3.1	Differenzenquotient und Differenzialquotient	291
17.3.2	Ableitungen von Funktionen	292
17.3.3	Kettenregel	293
17.4	Integrieren	294
17.4.1	Unbestimmtes Integral	294
17.4.2	Bestimmtes Integral	296
17.4.3	Mittelwerte	297
17.5	Funktionen mit komplexen Größen	298
17.5.1	Zahlen in der komplexen Zahlenebene	298
17.5.2	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	299
17.5.3	Widerstand und Leitwert in der komplexen Ebene	300
17.5.4	Komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen	301
17.5.5	Leistungsberechnung in Wechselstromschaltungen	302
17.6	Reihen	303
17.6.1	Arithmetische Reihe	303
17.6.2	Geometrische Reihe	303

## Anhang

Kurzlösungen zu den Aufgaben im Buch	305
Wichtige Größen und Einheiten	353
Mathematische Begriffe und Basiseinheiten	354
Wichtige Normen	355
Formelzeichen und ihre Bedeutung	356
Indizes, Zeichen und ihre Bedeutung	357
Sachwortverzeichnis	358



# 1 Rechnen mit Zahlen

Zahlen bestehen aus Ziffern. Im dekadischen Zahlensystem (von lat. decem = zehn) verwendet man Dezimalzahlen, die aus den Ziffern 0 bis 9 gebildet werden. Reelle Zahlen (Kurzzeichen  $\mathbb{R}$ ) sind Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind (rationale Zahlen Kurzzeichen  $\mathbb{Q}$ ) oder es sind Kommazahlen mit unendlich vielen nicht periodischen Nachkommastellen (irrationale Zahlen). Die reellen Zahlen von **Tabelle 1** sind Teilmenge der komplexen Zahlen (Seite 298).

Die Zahlen gehören meist mehreren Zahlenmengen an. So gehört z.B. die Zahl 5 den Mengen der natürlichen Zahlen, der ungeraden natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen an. Die Zahl 5 ist jeweils ein Element (Kurzzeichen  $\in$ , sprich: ist Element von) der angegebenen Zahlenmengen.

## Beispiel 1: Zahlen zuordnen

Zu welchen Zahlenmengen gehören die Zahlen

- a) 3    b) 1,8    c)  $\pi$ ?

**Lösung:**

a)  $3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  b)  $1,8 \in \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  c)  $\pi$  ist eine irrationale Zahl.

## 1.1 Grundgesetze

### 1.1.1 Vertauschungsgesetz, Verbindungsgesetz, Verteilungsgesetz

#### Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)<sup>1</sup>

Bei der Addition kann man die Glieder eines Terms beliebig vertauschen. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

Ein Term<sup>2</sup> besteht aus Zahlen, die mit Rechenzeichen verknüpft sind, z.B.  $-4 + 7$ . Bei der Multiplikation sind die Vorzeichenregeln zu beachten.

#### Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)<sup>3</sup>

Bei der Addition können die Glieder eines Terms beliebig durch Klammern zusammengefasst werden. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

Die Klammern werden zuerst ausgerechnet. Das Malzeichen oder Multiplikationszeichen ( $\cdot$ ) kann zwischen Faktoren entfallen, außer bei Zahlen ohne Klammern.

**Tabelle 1: Reelle Zahlen  $\mathbb{R}$**

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ z.B. $-2; -1; 0; 11; 12; \dots$	Gebrochene Zahlen (Brüche) z.B. $\frac{3}{4}; \frac{5}{7}; 0,5; 0,3$
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}_0$ z.B. $0; 1; 2; 3; 4; \dots$	
Zahlengerade	
Irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	
Algebraische irrationale Zahlen z.B. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$	Transzendente irrationale Zahlen z.B. $e, \pi, \log 7$
Zahlengerade	

## Vorzeichenregeln

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ : + = +$$

$$+ : - = -$$

$$- : + = -$$

$$- : - = +$$

## Beispiel 2: Kommutativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Term  $(-3) \cdot 5 \cdot (-6)$  das Kommutativgesetz an und berechnen Sie ihn.

**Lösung:**

$$(-3) \cdot 5 \cdot (-6) = 5 \cdot (-3) \cdot (-6) = (-6) \cdot (-3) \cdot 5 = 90$$

## Beispiel 3: Assoziativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Produktterm  $3 \cdot 2 \cdot 5$  das Assoziativgesetz an und berechnen Sie.

**Lösung:**

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

<sup>1</sup> lat. commutare = ändern, vertauschen, <sup>3</sup> lat. associare = verbinden

<sup>2</sup> lat. terminus = Ausdruck

## Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)<sup>1</sup>

Kommen in einer Rechnung Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division gemischt vor, ohne dass Klammern gesetzt sind, so sind zuerst die durch Malzeichen oder durch Teilzeichen verbundenen Terme zu berechnen (**Punktrechnung geht vor Strichrechnung**), z.B. ist  $5 + 2 \cdot 4 = 5 + 8 = 13$ . Wenn anders gerechnet werden soll, setzt man Klammern, z.B. ist  $(5 + 2) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$ .

Bei der Multiplikation von Klammern wird jeder Summand mit dem Faktor multipliziert.

### Beispiel 1: Distributivgesetz anwenden

Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz:  $(-5) \cdot (2 + 7)$ .

Lösung:

$$(-5) \cdot (2 + 7) = (-5) \cdot 2 + (-5) \cdot 7 = -10 - 35 = -45$$

## Aufgaben zu 1.1.1

Wenden Sie das Kommutativgesetz an und berechnen Sie die Terme.

1. a)  $3 - 5 + 8 - 1$   
c)  $2 - 4 + 5 - 9$
2. a)  $7 - 3 - 2 + 8$   
c)  $9 - 2 + 7$
3. a)  $(-3) \cdot 2 \cdot 2$   
c)  $2 \cdot 3 \cdot (-7)$
4. a)  $(-8) \cdot 4 \cdot 2$   
c)  $2 \cdot 5 \cdot (-2)$
5. a)  $6 + 2 + 4$   
c)  $3 - 8 + 11$
6. a)  $5 + 4 + 3$   
c)  $3 - 9 + 6$
7. a)  $3 \cdot 5 \cdot 4$
8. a)  $6 \cdot 4 \cdot 2$
- b)  $6 + 12 - 10 - 3$   
d)  $8 - 7 + 5$
- b)  $5 - 2 + 3 - 1$   
d)  $3 - 1 - 5 + 23$
- b)  $2 \cdot (-5) \cdot (-3)$   
d)  $3 \cdot (-2) \cdot 9$
- b)  $3 \cdot (-5) \cdot (-3)$   
d)  $6 \cdot (-1) \cdot 1$

Wenden Sie das Assoziativgesetz auf Terme an und berechnen Sie diese.

5. a)  $6 + 2 + 4$   
c)  $3 - 8 + 11$
6. a)  $5 + 4 + 3$   
c)  $3 - 9 + 6$
7. a)  $3 \cdot 5 \cdot 4$
8. a)  $6 \cdot 4 \cdot 2$
- b)  $-3 + 2 - 5$   
d)  $8 + 2 - 4$
- b)  $4 + 2 - 3$   
d)  $8 + 2 - 4$
- b)  $(-3) \cdot 5 \cdot 2$
- b)  $(-2) \cdot 4 \cdot 3$

Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz.

9. a)  $3(5 + 2)$
10. a)  $4(8 + 3)$
11. a)  $(-2)(7 + 5)$   
c)  $(-6)(8 - 3)$
12. a)  $(-7)(8 - 6)$   
c)  $(-4)(6 - 2)$
- b)  $5(7 - 4)$
- b)  $3(5 - 2)$
- b)  $3(7 - 6 + 1)$   
d)  $(-5)(6 - 14)$
- b)  $5(9 - 5 - 4)$   
d)  $(-9)(8 - 12)$

## 1.1.2 Bruchrechnen

Brüche entstehen bei der Division von z.B. ganzen Zahlen. Die Vorzeichenregeln beim Dividieren entsprechen den Vorzeichenregeln beim Multiplizieren. Man unterscheidet verschiedene Arten von Brüchen (**Tabelle 1**).

**Tabelle 1: Arten von Brüchen**

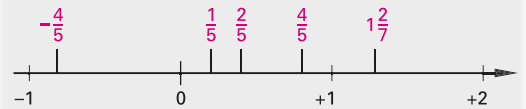
Echter Bruch	Unechter Bruch	Scheinbruch
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{1}$
Zähler kleiner als Nenner	Zähler größer als Nenner	Nenner gleich 1

Zahlengerade



Gemischte Zahl	Gleichnamige Brüche	Ungleichnamige Brüche
$1\frac{2}{7} = 1 + \frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{5}{9}$
Ganze Zahl und Bruch	Nenner alle gleich	Nenner alle ungleich

Zahlengerade



### Beispiel 2: Rechnen mit Brüchen

Schreiben Sie  $15 : 6$  als Bruch und berechnen Sie die Dezimalzahl.

Lösung:

$$15 : 6 = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten besondere Rechenregeln (**Tabelle 1**, folgende Seite).

Brüche werden erweitert oder gekürzt, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl vervielfacht oder durch die gleiche Zahl teilt.

<sup>1</sup> lat. distribuere = verteilen

Aufgaben zu 1.1.2

Berechnen Sie.

1. a)  $\frac{+65}{+13}$     b)  $\frac{+144}{+16}$     c)  $\frac{-96}{+4}$     d)  $\frac{+48}{-3}$   
e)  $\frac{-27}{-9}$     f)  $\frac{+169}{-13}$     g)  $\frac{-144}{-12}$
2. a)  $\frac{+88}{-11}$     b)  $\frac{+136}{+17}$     c)  $\frac{+64}{-16}$     d)  $\frac{+156}{-12}$   
e)  $\frac{-81}{-9}$     f)  $\frac{+171}{-19}$     g)  $\frac{-232}{-8}$
3. a)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6}$                       b)  $\frac{3}{5} - \frac{2}{15} + \frac{7}{30}$   
c)  $\frac{7}{24} - \frac{11}{30} - \frac{8}{15} + \frac{3}{8}$
4. a)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$                       b)  $\frac{5}{8} - \frac{5}{24} + \frac{5}{48}$   
c)  $\frac{17}{18} - \frac{7}{9} + \frac{11}{12} - \frac{1}{4}$
5. a)  $\frac{2}{53} \cdot 8$                       b)  $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$                       c)  $\frac{8}{21} \cdot 1\frac{2}{5}$   
d)  $\frac{5}{31} : \frac{2}{13}$                       e)  $8\frac{5}{7} : 3\frac{3}{5}$
6. a)  $\frac{5}{37} \cdot 7$                       b)  $\frac{11}{5} \cdot \frac{9}{5}$                       c)  $\frac{2}{15} \cdot 2\frac{3}{7}$   
d)  $\frac{7}{75} : \frac{8}{5}$                       e)  $\frac{4}{9} : \frac{7}{13}$
7. Wandeln Sie in Dezimalbrüche um.  
a)  $\frac{3}{5}$     b)  $\frac{4}{15}$     c)  $\frac{12}{125}$     d)  $\frac{35}{55}$     e)  $\frac{154}{224}$
8. Wandeln Sie in Brüche um.  
a) 0,25    b) 0,875    c) 1,23    d) 2,05    e) 0,0075
9. Berechnen Sie.  
a)  $\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(2\frac{2}{5} - \frac{5}{4}\right)$   
b)  $\left(4\frac{4}{5} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(2\frac{1}{5} + 1\frac{5}{6}\right)$
10. Berechnen Sie.  
a)  $\frac{8\frac{7}{5} - 6\frac{5}{8}}{3\frac{8}{9} + 2\frac{2}{5}}$                       b)  $\frac{4\frac{5}{8} - 6\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2}}{6\frac{1}{3} - 2\frac{4}{5} - 1\frac{1}{8}}$

Tabelle 1: Rechnen mit Brüchen

Art	Regeln, Beispiele
Addition / Subtraktion	<b>Gleichnamige Brüche:</b> Zähler addieren oder subtrahieren, Nenner bleibt gleich. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2-1+4}{5} = \frac{5}{5} = 1$
	<b>Ungleichnamige Brüche:</b> Nenner gleichnamig machen (Hauptnenner bilden, Bruch erweitern). $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{15} - \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{20}$ $= \frac{24+45-40}{60} = \frac{29}{60}$
Multiplikation	<b>Ganze Zahl mit Bruch:</b> Ganze Zahl mal Zähler, Nenner bleibt gleich. $5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$
	<b>Bruch mit Bruch:</b> Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$
	<b>Gemischte Zahl mit ganzer Zahl:</b> Gemischte Zahl in Bruch verwandeln. $2\frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{11}{5} \cdot 4 = \frac{11 \cdot 4}{5 \cdot 1} = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$ oder $2\frac{1}{5} \cdot 4 = \left(2 + \frac{1}{5}\right) \cdot 4 = 8 + \frac{4}{5} = 8\frac{4}{5}$
	<b>Gemischte Zahl mit gemischter Zahl:</b> Gemischte Zahlen in Brüche verwandeln. $1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 5} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$
Division	<b>Bruch durch ganze Zahl:</b> Ganze Zahl mal Nenner, Zähler bleibt gleich. $\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$
	<b>Ganze Zahl durch Bruch:</b> Ganze Zahl mal Kehrwert des Bruches. $5 : \frac{3}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$
	<b>Bruch durch Bruch:</b> Zählerbruch mal Kehrwert des Nennerbruches. $\frac{3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28} = 1\frac{1}{20}$

Ein Bruch wird durch einen Bruch geteilt, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

## 1.2 Potenzen

In der Mathematik versteht man unter einer Potenz ein Produkt gleicher Zahlen in verkürzter Schreibweise.

### 1.2.1 Zehnerpotenzen

#### 1.2.1.1 Werte der Zehnerpotenzen

Wird die Zahl 10 als Faktor  $n$ -mal verwendet, so bildet man die Potenz, indem man die Grundzahl (Basis) 10 hinschreibt und  $n$  als Hochzahl (Exponent) dazusetzt (**Bild 1**).

**Beispiel 1:** Als Zehnerpotenz schreiben

Schreiben Sie  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$  als Zehnerpotenz.

**Lösung:**

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$  (sprich: zehn hoch vier).

Umgekehrt berechnet man eine Zehnerpotenz, indem man sie als Faktorenreihe hinschreibt und diese ausrechnet (**Tabelle 1**).

**Beispiel 2:** Potenzwert berechnen

Berechnen Sie  $10^9$  (sprich: zehn hoch neun).

**Lösung:**

$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000000$

Man berechnet den Kehrwert einer Potenz, indem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.

Eine negative Hochzahl bedeutet also, dass der Kehrwert der Potenz mit derselben positiven Hochzahl zu berechnen ist.

**Beispiel 3:** Negativen Potenzwert berechnen

Schreiben Sie  $10^{-3}$  (sprich: zehn hoch minus drei) als Dezimalzahl.

**Lösung:**

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Jede Potenz mit der Hochzahl 0 hat den Wert 1.

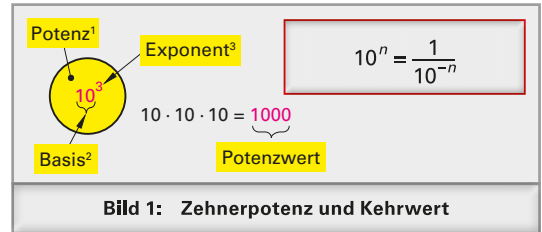
Zahlen, insbesondere sehr große oder sehr kleine Zahlen, kann man als Produktterme von übersehbaren Zahlen und Zehnerpotenzen darstellen. Man ermittelt dazu die Zehnerpotenz der Einerstelle des Faktors.

**Beispiel 4:** Kommastellen versetzen

Die Zahl 0,00000000152 ist so darzustellen, dass 1,52 der Faktor ist.

**Lösung:**

Die 1 steht an 9. Nachkommastelle  $\hat{=} 10^{-9}$   
 $\Rightarrow 0,00000000152 = 1,52 \cdot 10^{-9}$



**Tabelle 1: Zehnerpotenzen (Beispiele)**

Potenz	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$
Potenzwert	100	10	1	0,1	0,01

Bei Computern und Taschenrechnern werden große und kleine Zahlen als Produktterme mit Zehnerpotenzen ausgegeben und können auch so eingegeben werden. Für die Basis 10 wird dabei  $E$  oder  $EE$  ausgegeben oder eingegeben; die nach  $E$  folgende Zahl ist der Exponent zur Basis 10. Vor  $E$  muss ein Faktor stehen, z.B.:  $1EE6 \hat{=} 10^6 \hat{=} 1 \cdot 10^6$ .

**Beispiel 5:** Potenzwert als Zahl darstellen

Als Ergebnis erscheint auf einem Bildschirm  $10.5E+4$ . Welcher Zahlenwert ist das?

**Lösung:**

$10.5E+4 = 10,5 \cdot 10^4 = 105000$

#### Aufgaben zu 1.2.1

Schreiben Sie als Faktorenreihe.

- a)  $10^4$  b)  $10^{-1}$  c)  $10^3$  d)  $10^{-6}$
- a)  $10^{-2}$  b)  $10^5$  c)  $10^{-7}$  d)  $10^8$

Berechnen Sie die Werte folgender Potenzen.

- a)  $10^6$  b)  $10^{-3}$  c)  $10^{-2}$  d)  $10^{-9}$
- a)  $10^{-1}$  b)  $10^0$  c)  $10^{-6}$  d)  $10^8$

Bilden Sie die Kehrwerte.

- a)  $10^{-6}$  b)  $10^7$  c)  $10^9$  d)  $10^{-12}$
- a)  $10^{-3}$  b)  $10^0$  c)  $10^3$  d)  $10^1$

Berechnen Sie die Dezimalzahl der Kehrwerte.

- a)  $10^0$  b)  $10^1$  c)  $10^{-3}$  d)  $10^4$
- a)  $10^{-6}$  b)  $10^{-4}$  c)  $10^2$  d)  $10^{-5}$

Schreiben Sie als Produkt mit einer Zehnerpotenz.

- a) 24000 b) 0,0023 c) 700000
- a) 12000 b) 0,00012 c) 340000

<sup>1</sup> Potenz von lat. potens = mächtig

<sup>2</sup> Basis von lat. basis = Sockel

<sup>3</sup> Exponent von lat. exponere = ausstellen

## 1.2.1.2 Rechnen mit Zehnerpotenzen

Durch Anwendung der Potenzgesetze vereinfachen sich Addition und Subtraktion bei gleichen Exponenten.

**Beispiel 1:** Potenzen addieren  
Berechnen Sie  $10^6 + 10^3$ .

*Lösung:*

$$10^6 + 10^3 = 1000 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 = 1001 \cdot 10^3 = \mathbf{1001000}$$

Zehnerpotenzen werden **multipliziert**, indem man die Hochzahlen **addiert**.

**Beispiel 2:** Potenzen multiplizieren  
Berechnen Sie  $10^6 \cdot 10^3$ .

*Lösung:*

$$10^6 \cdot 10^3 = 10^{6+3} = \mathbf{10^9}$$

Durch eine Zehnerpotenz wird **dividiert**, indem man deren Hochzahl **subtrahiert**.

**Beispiel 3:** Potenzen dividieren  
Berechnen Sie  $10^6 : 10^3$ .

*Lösung:*

$$10^6 : 10^3 = 10^{6-3} = \mathbf{10^3}$$

Zehnerpotenzen werden **potenziert**, indem man die Hochzahlen **multipliziert**.

**Beispiel 4:** Potenzen potenzieren  
Berechnen Sie  $(10^3)^4$ .

*Lösung:*

$$(10^3)^4 = 10^{3 \cdot 4} = \mathbf{10^{12}}$$

Oft werden für die Darstellung von Zahlen mit Potenzen Vorsätze verwendet (**Tabelle 1**).

## Aufgaben zu 1.2.1.2

Berechnen Sie.

1. a)  $10^6 + 10^2 - 10^0$       b)  $10^{-3} + 10^1 - 10^2$   
c)  $10^6 + 10^3 + 10^3$

2. a)  $10^2 - 10^1 - 10^{-2}$       b)  $10^{-6} + 10^{-7} + 10^0$   
c)  $10^{-3} + 10^3 - 10^{-6}$

Stellen Sie als Zehnerpotenz dar.

3. a)  $10^{13} : 10^9$       b)  $10^6 \cdot 10^5$       c)  $10^{12} : 10^{-6}$   
4. a)  $10^9 : 10^6$       b)  $10^{27} : 10^{14}$       c)  $10^{-3} \cdot 10^{-6}$

Berechnen Sie.

5. a)  $10^{-12} \cdot 10^{12}$       b)  $10^3 \cdot 10^{-6}$       c)  $10^8 \cdot 10^0 \cdot 10^{-6}$

Potenzgesetze:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$a, b$  beliebige Zahlen       $m, n$  Hochzahlen

**Tabelle 1: Vorsätze anstelle von Zehnerpotenzen**

Zeichen	Vorsatz	Faktor	Zeichen	Vorsatz	Faktor
Y	Yotta	$10^{24}$	d	Dezi	$10^{-1}$
Z	Zetta	$10^{21}$	c	Zenti	$10^{-2}$
E	Exa	$10^{18}$	m	Milli	$10^{-3}$
P	Peta	$10^{15}$	$\mu$	Mikro	$10^{-6}$
T	Tera	$10^{12}$	n	Nano	$10^{-9}$
G	Giga	$10^9$	p	Piko	$10^{-12}$
M	Mega	$10^6$	f	Femto	$10^{-15}$
k	Kilo	$10^3$	a	Atto	$10^{-18}$
h	Hekto	$10^2$	z	Zepto	$10^{-21}$
da	Deka	$10^1$	y	Yokto	$10^{-24}$

6. a)  $10^0 : 10^{12}$       b)  $10^1 \cdot 10^{-6}$       c)  $10^{-3} \cdot 10^9$

Berechnen Sie für folgende Brüche den Wert als Dezimalzahl.

7. a)  $\frac{10 \cdot 10^6}{10^{-3} \cdot 10^6}$       b)  $\frac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}}$       c)  $\frac{10^3 \cdot (10^{-6})^2}{10^{-9} \cdot 10^{-2}}$

8. a)  $\frac{10^2 \cdot 10^{-4}}{10^{-12} \cdot 10^9}$       b)  $\frac{10^{-3} \cdot 10^6}{10^{-4} \cdot 10^5}$       c)  $\frac{10^{-2} \cdot (10^6)^2}{10^3 \cdot 10^4}$

Zerlegen Sie in Faktoren mit Zehnerpotenzen und berechnen Sie.

9. a)  $\frac{42000 \cdot 500}{0,06}$       b)  $\frac{46000 \cdot 0,5}{50000}$

c)  $\frac{0,0065 \cdot 0,025}{13000 \cdot 0,0005}$       d)  $\frac{4200 \cdot 0,007}{35000}$

10. a)  $\frac{0,0035 \cdot 620}{310 \cdot 0,07}$       b)  $\frac{0,007 \cdot 630}{0,0009}$

c)  $\frac{28000 \cdot 0,4}{7000 \cdot 400}$       d)  $\frac{22 \cdot 0,0004}{880}$

11.  $\frac{(28 \cdot 10^2 - 2,6 \cdot 10^3) \cdot 4,47 \cdot 7,6 \cdot 10^{-6} \cdot 43 \cdot 10^7}{12,7 \cdot 10^{-3} \cdot 122 \cdot 10^{-3}}$

12.  $\frac{(22,7 \cdot 10^5 - 2,8 \cdot 10^4) \cdot 343 \cdot 10^{-6} \cdot 66 \cdot 10^{-7}}{21,9 \cdot 10^{-2} \cdot 12,2 \cdot 10^{-4}}$

## 1.2.2 Sonstige Potenzen mit ganzen Exponenten

Man kann sämtliche Zahlen als Grundzahlen (Basis) für Potenzen verwenden.

Je nach Basis unterscheidet man außer den Zehnerpotenzen z.B. Zweierpotenzen, Achterpotenzen und Sechzehnerpotenzen.

Bei Speichern in der Datentechnik wird z.B. die Anzahl der Speicherelemente aus der Anzahl der Adressleiter und der Anzahl der Datenleiter mit Zweierpotenzen berechnet (**Bild 1**).

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. Sie werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Sie werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert oder dividiert, indem man auf die Basen das Assoziativgesetz anwendet und das Ergebnis potenziert.

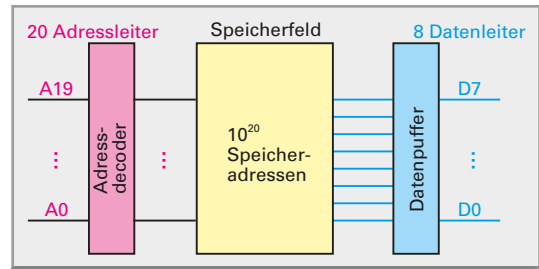
$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

$$z = 2^n$$

$a$  beliebige Zahl

$n$  ganzer Exponent (Hochzahl), z.B. Adressleiter

$z$  Anzahl der Speicherzellen



**Bild 1: Vereinfachter Speicheraufbau**

**Beispiel 1:** Speicherstellenzahl berechnen

Wie viele Speicherzellen können mit 20 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden (**Bild 1**)?

**Lösung:**

$$z = 2^{20} \cdot 2^3 = 2^{23} = \mathbf{8388608}$$

**Beispiel 2:** Potenzen dividieren

Berechnen Sie  $8^4 : 2^4$ .

**Lösung:**

$$8^4 : 2^4 = \left(\frac{8}{2}\right)^4 = 4^4 = \mathbf{256}$$

**Beispiel 3:** Potenzwert berechnen

Berechnen Sie die Potenz  $(3^2)^4$ .

**Lösung:**

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = \mathbf{6561}$$

Berechnen Sie.

3. a)  $8^2 + 6^2$ ; b)  $8^2 \cdot 8^3$ ; c)  $8^2 \cdot 4^2$ ; d)  $\frac{8^4}{2^4}$

4. a)  $\frac{16^2}{8^2}$ ; b)  $4^2 \cdot 4^3$ ; c)  $\frac{4^3}{4^4}$ ; d)  $(4^2)^3$

5. a)  $\frac{3^2 \cdot 6^3}{3^4 \cdot 6^4}$ ; b)  $\frac{10^2 \cdot 6^3}{3^{-1} \cdot 6^4}$ ; c)  $\frac{2^8 \cdot 2^{-5}}{2^{-3} \cdot 2^4}$

6. a)  $\frac{4^2 \cdot 6^3}{3^3 \cdot 8^2}$ ; b)  $\frac{3^4}{1,5^4} + 3^8 \cdot 3^{-6}$ ; c)  $\frac{3^{-2}}{3^{-4}}$

7. a)  $\frac{(8^4)^3}{64^3}$ ; b)  $3^{-6} : (3 \cdot 3 \cdot 3)^{-2}$

8. a)  $\left(\frac{28 \cdot 2^{-3}}{4 \cdot 2^{-4}}\right)^2$ ; b)  $\left(\frac{7^3 - 3,5^2}{7^3 \cdot 2^2}\right)^{-1}$

9. Wie viele Speicherzellen können mit 8 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden?

10. Beim Speicher **Bild 1** ist D7 unterbrochen. Welche Zahlen können mit D0 bis D6 noch dargestellt werden?

11. Die Adressleiter A18 und A19 sind unterbrochen (**Bild 1**). Wie viele Speicherzellen können noch benutzt werden?

### Aufgaben zu 1.2.2

1. Bestimmen Sie die Zweierpotenzen mit folgenden Exponenten.

- a) 2      b) 1      c) 0      d) 4

2. Ermitteln Sie die Achterpotenzen mit folgenden Exponenten.

- a) 2      b) 1      c) 0      d) 3

1.3 Rechnen mit Wurzeln

Beim Wurzelziehen oder Radizieren<sup>1</sup> zerlegt man eine Zahl  $a$  in eine mögliche Anzahl  $n$  gleicher Faktoren. Der Faktor ist die Wurzel  $c$ .

Wurzeln haben bei geradem Wurzelexponenten positives Vorzeichen, bei ungeradem Exponenten ist auch ein negatives Vorzeichen möglich.

Die 2. Wurzel heißt auch Quadratwurzel. Ihr Ergebnis ist  $\geq 0$ . Bei allen Wurzeln außer der Quadratwurzel müssen die Wurzelexponenten angegeben werden.

**Beispiel 1:** Quadratwurzel bestimmen  
Zerlegen Sie die Zahl  $a = 36$  in  $n = 2$  gleiche Faktoren und geben Sie die Wurzel an.

**Lösung:**  
 $36 = 6 \cdot 6 \Rightarrow \sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$   
( $\sqrt{36}$  spricht: Wurzel aus 36)

**Beispiel 2:** 3. Wurzel berechnen  
Berechnen Sie die 3. Wurzel aus 27.

**Lösung:**  
 $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$   
( $\sqrt[3]{27}$  spricht: Dritte Wurzel aus 27)

Wurzeln können auch als Potenzen geschrieben werden. Der Radikand erhält dabei als Exponent den Kehrwert des Wurzelexponenten. Für die Berechnung von in Potenzen umgewandelten Wurzeln gelten die Potenzrechenregeln.

**Beispiel 3:** Potenzwert berechnen  
Wandeln Sie  $\sqrt[6]{74}$  in eine Potenz um und berechnen Sie.

**Lösung:**  
 $\sqrt[6]{74} = 74^{\frac{1}{6}} = 74^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = (74^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{74}} = 2,049$

Quadratwurzeln berechnet man mit dem Taschenrechner. Zur Ermittlung der Stellenzahl der Wurzel zerlegt man die Radikanden in einen Faktor und eine Zehnerpotenz mit *geradzahlig*er Hochzahl.

Ist der Radikand ein Summenterm, so muss dieser zuerst berechnet und anschließend die Wurzel gezogen werden.

Wurzelexponent

Wurzelzeichen

$\sqrt[n]{a} = c$

Wurzel

Radikand

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a, b$  beliebige Zahlen  
 $m, n$  Exponenten, Wurzelexponent  
| | Kurzzeichen für Betrag

Tabelle 1: Vorzeichen von Wurzeln		
Wurzelart	Wurzel-vorzeichen	Beispiel
Wurzelexponent geradzahlig, Radikand positiv	+	$\sqrt{36} = +6$
Wurzelexponent ungerade, Radikand positiv	+	$\sqrt[3]{27} = +3$ da $(+3)^3 = +27$
Wurzelexponent ungerade, Radikand negativ	-	$\sqrt[3]{-27} = -3$ da $(-3)^3 = -27$

Aufgaben zu 1.3

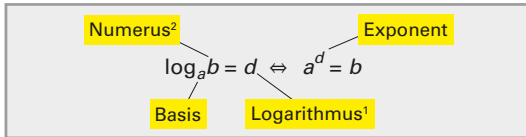
Berechnen Sie.

1. a)  $\sqrt{49}$     b)  $\sqrt{2500}$     c)  $\sqrt{144}$     d)  $\sqrt{1600}$
2. a)  $\sqrt{64}$     b)  $\sqrt{3600}$     c)  $\sqrt{81}$     d)  $\sqrt{900}$
3. a)  $\sqrt{4240}$     b)  $\sqrt{68775}$     c)  $\sqrt{455870}$     d)  $\sqrt{30428}$
4. a)  $\sqrt{6540}$     b)  $\sqrt{41433}$     c)  $\sqrt{867654}$     d)  $\sqrt{3422}$
5. a)  $\sqrt{3^2 + 5^2}$     b)  $\sqrt{3,5^2 + 4,2^2}$     c)  $\sqrt{2^2 + 2,5^2}$
6. a)  $\sqrt{5^2 + 2^2}$     b)  $\sqrt{4,2^2 + 5,3^2}$     c)  $\sqrt{2,5^2 + 3^2}$
7. a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$     b)  $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{17}$     c)  $\sqrt{16} : \sqrt{4}$   
d)  $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5}$     e)  $(\sqrt{5})^3$     f)  $\sqrt[3]{64}$
8. a)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$     b)  $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{32}$     c)  $\sqrt{25} : \sqrt{5}$   
d)  $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$     e)  $(\sqrt{7})^3$     f)  $\sqrt[4]{256}$

<sup>1</sup> lat. radix = Wurzel

## 1.4 Logarithmen

### 1.4.1 Rechenregeln, natürlicher und binärer Logarithmus



Der Logarithmus<sup>1</sup> ist der Exponent, mit welcher man die Basis  $a$  potenzieren muss, um den Numerus<sup>2</sup>  $b$  zu erhalten.  $d = \log_a b$  heißt:  $d$  ist der Logarithmus von Numerus  $b$  zur Basis  $a$ .

**Beispiel 1:** Beliebige Basis berechnen  
Berechnen Sie den Logarithmus zur Basis  $a$  von  $c = a^n$ .

**Lösung:**  
 $\log_a c = \log_a a^n = n$   
( $\log_a c$  spricht: Logarithmus zur Basis  $a$  von  $c$ )

**Beispiel 2:** Zehnerlogarithmus berechnen  
Berechnen Sie  $\log_{10} 0,01$ .

**Lösung:**  
 $0,01 = 10^{-2} \Rightarrow \log_{10} 0,01 = -2$

Natürliche Logarithmen, z.B.  $\ln 5$ , haben die Basis  $e = 2,718...$  Man kann sie meist direkt dem Taschenrechner entnehmen.

Binäre Logarithmen, z.B.  $\lg 3$ , haben die Basis 2. Man kann alle Logarithmen untereinander umrechnen.

**Beispiel 3:** Binären Logarithmus berechnen  
Bestimmen Sie den binären Logarithmus der Zahl 32,6.

**Lösung:**  
Mit dem Taschenrechner ermittelt man  $\lg 32,6 = 1,5132$ ;  
 $\Rightarrow \lg 32,6 = 3,3219 \cdot 1,5132 = 5,0268$

#### Aufgaben zu 1.4.1

Ermitteln Sie die natürlichen Logarithmen.

1. a)  $\ln 12$  b)  $\ln 24$  c)  $\ln 47$  d)  $\ln 86$  e)  $\ln 96$
2. a)  $\ln 35$  b)  $\ln 21$  c)  $\ln 56$  d)  $\ln 75$  e)  $\ln 89$

Bestimmen Sie die binären Logarithmen.

3. a)  $\lg 12$  b)  $\lg 35$  c)  $\lg 2$  d)  $\lg 8$  e)  $\lg 65$
4. a)  $\lg 5$  b)  $\lg 33$  c)  $\lg 7$  d)  $\lg 69$  e)  $\lg 6$

#### Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a (c^m) = m \cdot \log_a c$$

$$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \log_a c$$

Die Rechenregeln gelten für  $a > 1$  und  $c > 0$  und  $d > 0$ .  
 $\log_a 0 = -\infty$ ;  $\log_a 1 = 0$ ;  $\log_a a = 1$

Durch Logarithmieren werden Multiplikationen zu Additionen, Divisionen zu Subtraktionen, Potenzrechnungen und Wurzelrechnungen zu Multiplikationen.

#### Umrechnungen

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$\log_2 x = \lg x$$

$$\log_e x = \ln x$$

Beispiel für  
 $a = 2$ :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

e Euler'sche Zahl  $\approx 2,718 281 828 459 045 235 ...$   
ln natürlicher Logarithmus, Basis  $e \approx 2,718$   
lg Zehnerlogarithmus, Basis 10  
lb binärer Logarithmus, Basis 2

Rechnen Sie die Zehnerlogarithmen in natürliche Logarithmen um.

5. a) 0,3577 b) 2,4689 c) 1,6643 d) 3,7712
6. a) 0,9934 b) 1,7832 c) 4,2231 d) 0,2121

Rechnen Sie die natürlichen Logarithmen in Zehnerlogarithmen um.

7. a) 3,4012 b) 1,45 c) 4,7274 d) 1,7918
8. a) 0,3478 b) 1,6094 c) 6,0162 d) 3,4012

Rechnen Sie die Zehnerlogarithmen in binäre Logarithmen um.

9. a) 1,6551 b) 2,7681 c) 0,3324 d) 0,7455
10. a) 0,0917 b) 2,6287 c) 1,3424 d) 0,6800

<sup>1</sup> griech. logos = Verhältnis und griech. arithmós = Zahl  
<sup>2</sup> lat. numerus = Zahl



## 1.4.2 Zehnerlogarithmen

Die Zehnerlogarithmen, z.B.  $\lg 2$ , haben die Basis 10. Man entnimmt sie dem Taschenrechner mit der Taste  $\log$ .

In der Elektronik benötigt man zur Darstellung von Kennlinien oft logarithmische Maßstäbe, um einen großen Zahlenbereich zu erfassen. Der Abstand eines beliebigen Wertes  $x$  vom Anfangspunkt der Achse lässt sich berechnen. Die Zusammenhänge zeigt **Bild 1**.

Logarithmische Maßstäbe dienen zur Darstellung großer Zahlenbereiche.

### Beispiel 1: Logarithmische Einteilung

Teilen Sie eine Strecke von 5 cm von 1 bis 10 im logarithmischen Maßstab.

*Lösung:*

Man sucht die Zehnerlogarithmen von 1 bis 10 und multipliziert sie jeweils mit der Länge der gewählten Strecke. Die sich ergebenden Werte trägt man vom Anfang der Strecke aus ab und beschriftet die Punkte mit 1 ... 10 (**Bild 2**).

Durch Einteilen einer Strecke in

**3 Teile – 4 Teile – 3 Teile**

erhält man eine logarithmische Teilung für die Werte 1, 2, 5 und 10 (**Bild 3**).

### Aufgaben zu 1.4.2

Berechnen Sie.

1. a)  $\lg 15$    b)  $\lg 23$    c)  $\lg 41$    d)  $\lg 86$    e)  $\lg 87$
2. a)  $\lg 26$    b)  $\lg 68$    c)  $\lg 77$    d)  $\lg 96$    e)  $\lg 240$
3. a)  $\lg 0,5$    b)  $\lg 3,5$    c)  $\lg 6,8$    d)  $\lg 0,043$
4. a)  $\lg 0,7$    b)  $\lg 8,7$    c)  $\lg 5,925$    d)  $\lg 0,0084$
5. Teilen Sie eine Strecke von 16 cm im logarithmischen Maßstab von 1 bis 10 000.
6. Stellen Sie eine logarithmische Teilung von 1 bis 100 000 auf einer Strecke mit der Länge von 15 cm her.
7. Welchen Wert  $l_x$  in cm hat der Punkt  $x = 50$ , wenn der Anfangswert  $x_A = 10$ , Endwert  $x_E = 150$  und  $l_{10} = 8$  cm sind?

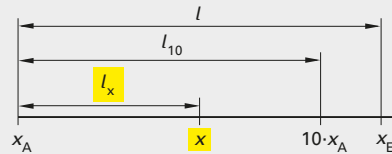
$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\lg x = 0,4343 \cdot \ln x$$

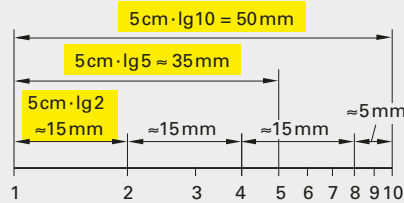
$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$l_x = l_{10} \cdot \lg \frac{x}{x_A}$$

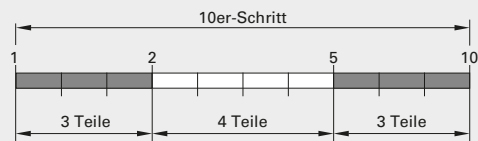
$\lg$  Zehnerlogarithmus  
 $\ln$  natürlicher Logarithmus  
 $l_x$  Abstand des Wertes  $x$  von  $x_A$   
 $l_{10}$  Abstand für den Faktor 10  
 $x$  Zahlenwert an der Achse  
 $x_A$  Zahlenwert am Anfang der Achse



**Bild 1: Logarithmische Teilung**



**Bild 2: Längeneinteilung bei logarithmischer Teilung**



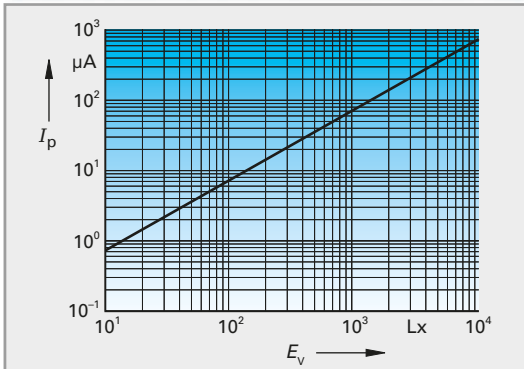
**Bild 3: Maßstab zum Zeichnen**

8. Welchen Wert  $l_x$  in cm hat der Punkt  $x = 0,04$  einer Achsteilung, wenn der Endwert  $x_E = 0,1$  ist? Anfangswert  $x_A = 0,01$ ,  $l_{10} = 10$  cm.
9. Der Wert  $x_E$  einer Achsteilung entspricht 0,3. Sein Abstand vom Achsanfang mit  $x_A = 0,01$  beträgt 9,54 cm. Wie groß ist  $l_{10}$ ?
10. Bei einer Achsteilung ist  $l_{10} = 8$  cm und entspricht dem Endwert 0,5. Welchem Wert  $x$  entspricht  $l_x = 6,23$  cm ( $x_A = 0,05$ )?

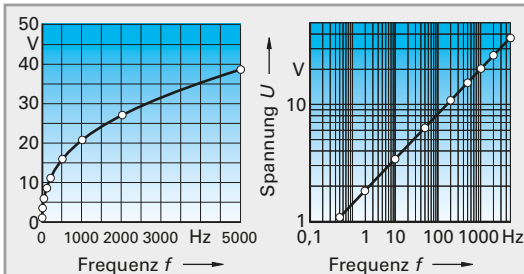
### 1.4.3 Logarithmische Darstellung, Linearisieren

Durch logarithmische Teilung der Achsen einer Kennlinie können mehrere Zehnerpotenzen übersichtlich dargestellt werden. **Bild 1** zeigt die Kennlinie eines lichtabhängigen Widerstandes (LDR) in doppelt logarithmischer Darstellung. **Bild 2** zeigt die Linearisierung durch Logarithmierung, links linearer, rechts doppelt logarithmischer Maßstab.

Logarithmisch geteilte Achsen haben keinen Nullpunkt.



**Bild 1:** Kennlinie lichtabhängiger Widerstand in doppelt logarithmischer Darstellung



**Bild 2:** Linearisierung einer Kennlinie

#### Beispiel 1: LDR-Stromstärke ablesen

Welcher Strom  $I$  fließt bei einer Beleuchtungsstärke von  $10^3 \text{ lx}$  nach **Bild 1**?

Lösung:

Abgelesen aus Kennlinie:  $I_p = 70 \mu\text{A}$

#### Aufgaben zu 1.4.3

- Lesen Sie die jeweils zugehörige Beleuchtungsstärke nach **Bild 1** ab für a)  $I = 200 \mu\text{A}$ , b)  $I = 5 \mu\text{A}$ .

- Lesen Sie die jeweils zugehörige Stromstärke nach **Bild 1** ab für a)  $E = 100 \text{ lx}$ , b)  $E = 2000 \text{ lx}$ .
- Lesen Sie den jeweils zugehörigen Spannungswert nach **Bild 2** ab für a)  $f = 1000 \text{ Hz}$ , b)  $f = 500 \text{ Hz}$ .
- Lesen Sie die jeweils zugehörige Frequenz nach **Bild 2** ab für a)  $U = 30 \text{ V}$ , b)  $U = 5 \text{ V}$ .

### 1.5 Kehrwert, Prozentrechnen

$$1\% = \frac{1}{100} \cdot G$$

$$\frac{p}{100} = \frac{W}{G}$$

%	Prozent	W	Prozentwert
p	Prozentsatz	G	Grundwert

Mit der Kehrwerttaste  $\frac{1}{x}$  oder  $x^{-1}$  wird der Kehrwert der zuletzt eingegebenen Zahl bzw. des zuletzt ermittelten Zwischenergebnisses gebildet. Mit der Tastfolge „Grundwert  $\times$  Prozentsatz  $\%$ “ wird der Prozentwert ermittelt.

#### Aufgaben zu 1.5

Berechnen Sie

- a)  $13,82 + 1,85 + 1,85 + 1,85 + 1,85 + 1,85$   
b)  $64,8 - 2,45 - 2,45 - 2,45 - 2,45$
- a)  $35 : 7$  b)  $83 : 7$  c)  $18,3 : 7$   
d)  $65,75 : 7$  e)  $-43,2 : 7$  f)  $0,7732 : 7$
- Mit der Konstantenautomatik sind die Potenzwerte zu berechnen für  $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^9$ .
- Eine Energiesparlampe kostet 1,35 €. Wie viel kosten  
a) 3 b) 7 c) 9 d) 13 e) 18 f) 23 Energiesparlampen?
- Für 1,- € erhält man 1,569 \$. Wie viele Dollar erhält man für  
a) 150,- € b) 380,- € c) 25,- €  
d) 420,- € e) 1250,- €?
- Ein Pkw verbraucht auf 100 km durchschnittlich 9,8l Benzin. Wie viel Benzin braucht er für  
a) 20 km b) 180 km c) 65 km  
d) 285 km e) 1480 km?

Berechnen Sie

- a)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9}$  b)  $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}$  c)  $\frac{1}{7+4-3}$
- a)  $\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{8} + \frac{1}{20} - \frac{1}{4}$  c)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15}$
- a) 14% von 458 b) 162% von 384,-€
- a) 28,5% von 64 N b) 18,5% von  $680 \text{ m}^2$

## 2 Rechnen mit Größen

### 2.1 Begriffe beim Rechnen mit Größen

Physikalische Größen, z.B. Länge, Masse, Energie, Stromstärke, sind messbare Eigenschaften von Gegenständen, physikalischen Zuständen oder Vorgängen. Der spezielle Wert einer Größe wird *Größenwert* und in der Messtechnik *Messwert* genannt.

Der spezielle Wert einer Größe ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Das Malzeichen ( $\cdot$ ) wird weggelassen, wie es beim Rechnen mit Buchstaben meist üblich ist.

**Einheiten** sind oft aus einem Fremdwort entstanden oder auch zu Ehren von Wissenschaftlern benannt, z. B. das Volt<sup>1</sup>.

**Einheitenzeichen** verwendet man zur Abkürzung der Einheit (**Tabelle 1**). Einheitenzeichen sind senkrecht gedruckt (**Bild 1**).

**Formelzeichen** verwendet man zur Abkürzung der Größen, insbesondere bei Berechnungen. Als Formelzeichen verwendet man Großbuchstaben oder Kleinbuchstaben des lateinischen oder des griechischen Alphabets, bei Bedarf mit einem angehängten, tiefgesetzten Zeichen (*Index*), z. B.  $U_i$  für die Spannung am Eingang. Formelzeichen sind *kursiv* (schräg) gedruckt, Indexzeichen aufrecht.

Formelzeichen werden im Buch *kursiv* geschrieben, Einheitenzeichen aufrecht.

Ein Formelzeichen in einer eckigen Klammer bedeutet „Einheit von ...“.  $[l]$  bedeutet „Einheit der Länge“, z. B.  $[l] = \text{m}$ .

Die meisten Formelzeichen, Einheiten und Einheitenzeichen sind genormt (Tabelle 1). *Basisgrößen* sind sieben festgelegte Größen, aus denen alle anderen Größen abgeleitet wurden.

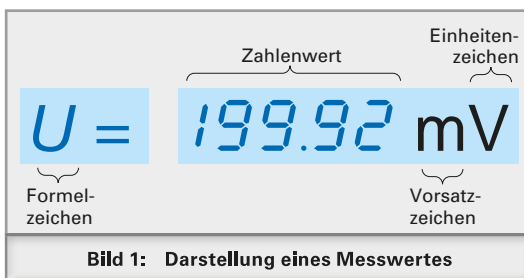
#### Aufgaben zu 2.1

1. Geben Sie von folgenden Angaben die physikalischen Größen in Worten an.

- a)  $U = 220 \text{ V}$     b)  $I = 16 \text{ A}$     c)  $t = 70 \text{ s}$   
d)  $l = 80 \text{ m}$     e)  $R = 80 \Omega$

**Tabelle 1: Wichtige Größen**

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
<b>Basisgrößen</b>			
Länge	$l$	Meter	m
Masse	$m$	Kilogramm	kg
Zeit	$t$	Sekunde	s
Stromstärke	$I$	Ampere	A
Temperatur	$T$	Kelvin	K
Stoffmenge	$n$	Mol	mol
Lichtstärke	$I_v$	Candela	cd
<b>Abgeleitete Größen (Beispiele)</b>			
Frequenz	$f$	Hertz	Hz
Kraft	$F$	Newton	N
Leistung	$P$	Watt	W
Spannung	$U$	Volt	V
Widerstand	$R$	Ohm	$\Omega$



**Bild 1: Darstellung eines Messwertes**

Beim Rechnen mit Größen müssen die Einheiten angegeben werden, auch bei der Zwischenrechnung.

2. Geben Sie von folgenden Angaben die Einheiten in Worten an.

- a)  $U = 1500 \text{ V}$     b)  $I = 0,7 \text{ A}$     c)  $m = 70 \text{ kg}$   
d)  $R = 750 \Omega$     e)  $t = 420 \text{ s}$

3. Schreiben Sie die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig.

In einer Glühlampe fließt ein Strom von 0,5 A.

- a) \_\_\_\_\_ Diode \_\_\_\_\_ Spannung von 1,5 \_\_\_\_\_.  
b) \_\_\_\_\_ Schichtwiderstand \_\_\_\_\_ Strom von 0,6 A.

4. Wie heißen die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig?

Durch eine Spule fließt ein Strom von 0,3 A.

- a) \_\_\_\_\_ Kondensator liegt \_\_\_\_\_ 120 V.  
b) \_\_\_\_\_ Diode \_\_\_\_\_ 0,2 A.

<sup>1</sup> nach ALESSANDRO VOLTA, ital. Physiker, 1745 bis 1827

## 2.2 Umrechnen der Einheiten

**Vorsätze.** Ist der Zahlenwert einer Größe sehr klein, z.B. bei 0,000002 A, oder aber sehr groß, z.B. bei 20000 V, so verwendet man einen Vorsatz zur Einheit. Dieser gibt eine Zehnerpotenz an, mit welcher der Zahlenwert malzunehmen ist (**Tabelle 1**).

**Beispiel 1:** Widerstand umformen  
100 kΩ sind in Ω auszudrücken.

**Lösung:**

$$100,00000... \text{ k}\Omega = \mathbf{100\,000\,\Omega}$$

**Beispiel 2:** Stromstärke umformen  
50000 μA sind in A auszudrücken.

**Lösung:**

$$50\,000\,\mu\text{A} = 0,050\,\text{A} = \mathbf{0,050\,\text{A}}$$

Zur Vermeidung von Verwechslungen von Vorsatz m (Milli) mit Einheit m (Meter) wird die Einheit m (Meter) stets an das Ende gesetzt. Am bedeutet also Ampere mal Meter, mA bedeutet Milliampere.

Soll eine aus Einheiten zusammengesetzte Einheit, z.B. km/h (h von lat. hora = Stunde), in eine aus anderen Einheiten zusammengesetzte Einheit umgerechnet werden, so rechnet man die gegebenen Einheiten einzeln nacheinander um. Dabei multipliziert man mit Brüchen vom Wert 1, z.B.  $\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}$ , die so gewählt sind, dass die unerwünschte Einheit herausgekürzt wird.

**Beispiel 3:** Geschwindigkeit umformen

Eine Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Drücken Sie diese in m/s aus.

**Lösung:**

$$72\text{ km/h} = \frac{72\text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \cdot \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = \mathbf{20\text{ m/s}}$$

### Aufgaben zu 2.2

- Wandeln Sie um.
  - 44200 mV in V
  - 0,002 A in mA
  - 220 μV in V
  - 88000 μV in mV
- Wandeln Sie um.
  - 7,05 kV in V
  - 880 mΩ in Ω
  - 840 μA in mA
  - 825 ns in s
- Der Eingangswiderstand eines Feldeffekttransistors beträgt  $10^{10}\,\Omega$ . Wie viel MΩ sind das?

**Tabelle 1: Vorsätze zu Einheiten, Vorsatzzeichen**

Exponent	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo
$> 1$	E	P	T	G	M	k
	$10^{18}$	$10^{15}$	$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$
$< 1$	Milli	Mikro	Nano	Piko	Femto	Atto
	m	μ	n	p	f	a
	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$	$10^{-18}$

- Ein Isolationswiderstand beträgt 820 Millionen Ω. Wie viel kΩ sind das?
- Bei einem Kurzschluss treten 8020 A auf. Wie viel kA sind das?
- Die Leistung eines Thermoelements berechnet man zu  $18 \cdot 10^{-4}\text{ W}$ . Wie viel mW sind das?

## 2.3 Addition und Subtraktion

Man kann nur Größen mit gleicher Einheit addieren oder subtrahieren. Dabei wandelt man diese Größen so um, dass ihre Einheiten die gleichen Vorsätze haben.

**Beispiel 4:** Addition

$$20\text{ mV} + 1,5\text{ V} = 0,02\text{ V} + 1,5\text{ V} = \mathbf{1,52\text{ V}}$$

oder

$$20\text{ mV} + 1,5\text{ V} = 20\text{ mV} + 1500\text{ mV} = \mathbf{1520\text{ mV}}$$

Für die Subtraktion gilt das Kommutativgesetz ebenfalls, man muss aber die Größen zusammen mit ihren Vorzeichen vertauschen.

**Beispiel 5:** Subtraktion

$$12\text{ V} - 4\text{ V} + 2\text{ V} = 12\text{ V} + 2\text{ V} - 4\text{ V} = \mathbf{10\text{ V}}$$

### Aufgaben zu 2.3

Addieren Sie.

- 233 V und 1,1 kV
  - 0,38 A und 400 mA
  - 144 Ω und 0,12 kΩ
- 2330 mA und 1,2 A
  - 220 mV und 0,3 A
  - 27 cm und 1220 mm