



Bibliothek des technischen Wissens

Baustatik

Planen – Berechnen –
Begutachten von Tragwerken

Band 1

Walter Mahringer

1. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 43979

Autor:
Walter Mahringer, Dipl.-Ing., Nürnberg

Lektorat:
Peter Peschel, OStD, Göttingen

Bildbearbeitung:
Verlag Europa-Lehrmittel, Abteilung Bildbearbeitung, Ostfildern

Das vorliegende Buch wurde auf der **Grundlage der aktuellen amtlichen Rechtschreibregeln** erstellt.

1. Auflage 2013
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-4397-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2013 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Grutten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald & Grafik und Sound, 50679 Köln
Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Ertstadt
Druck: M.P. Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

VORWORT

Das vorliegende Statik-Lehrwerk entstand aus Vorlesungsskripten und Übungseinheiten der Fachgebiete Baustoffkunde, Beton- und Stahlbetonbau, Stahlbau und Baustatik im Rahmen der staatlich geprüften Ausbildung für Bautechniker.

Es vermittelt die wichtigsten statischen Grundlagen beim Planen, Erstellen und Begutachten von Tragwerken und trägt gleichzeitig zur Grundausbildung der Studierenden im Fachgebiet Baustatik bei. Dabei wird keinesfalls ein Anspruch auf eine lückenlose Darbietung des Gebietes Baustatik erhoben. Es bemüht sich jedoch, in der bisweilen fast erdrückenden Computerherrschaft ohne außergewöhnlichen Aufwand der höheren Mathematik – die Beherrschung der grundlegenden Mathematik vorausgesetzt – statische und fachgebietsübergreifende Zusammenhänge erklärend anzubieten.

Solches Wissen ist die Voraussetzung dafür, einerseits die nötigen Erweiterungen und Fortschritte der Technik im Zusammenhang mit Wirtschaftlichkeit zu erreichen, andererseits mögliche Fehlentwicklungen und Fehlplanungen, verbunden mit Taurigkeit und Folgeschäden minimieren zu können.

Dazu ein Beispiel:

Durch die immer intensivere rechnerische Ausreizung der Tragwerksmaterialien sollten folgende Risikofaktoren (einige zur Auswahl) mit einbezogen werden:

- die angesetzten statischen Systeme des Tragwerks,
- die Klimaverhältnisse, denen das Bauwerk ausgesetzt ist und sein wird, verbunden mit evtl. Veränderungen (Altern) der verwendeten Baustoffe,
- Baugrundverhältnisse, die durch Witterungseinflüsse (mögliche Unterspülungen) und zu erwartende Nachbarbebauungen (Grundwasser, Energienutzung) die Baukonstruktion beeinträchtigen können,
- nutzungsbedingt mögliche Veränderungen von Belastungs- und Bemessungssituationen.

Besonderer Wert wurde auf die Herleitung statischer Grundlagen gelegt, was für deren Anwendung nicht immer erforderlich ist. Jedoch kann es manchmal eine Basis dafür bieten, selbständig von der Norm abweichende Sachverhalte zu erfassen und zu beurteilen. In diesem Zusammenhang ergeht die Bitte an den Nutzerkreis, für die Darstellungsweise dargebotener Themen Kritik und Verbesserungsvorschläge anzumelden.

Im Anhang sind einige Themen behandelt, um darauf hinzuweisen, dass die Baustatik Rahmengrößen anderer Sparten der Bautechnik (z. B. Werkstofftechnik, Gründungsmaßnahmen) einzubeziehen hat. Beispiele in den Themengebieten und im Anhang versuchen Zusammenhänge zwischen den Abschnitten herzustellen und somit Verstehen und Anwendung zu erleichtern. Eine Auswahl mathematischer Grundlagen ist im Anhang angeboten.

Zu vermerken ist, dass die physikalischen und mathematischen Grundsätze eingehalten sind. Auf Näherungen wird in jedem Fall hingewiesen.

Ergänzend zu dem Vorerwähnten wendet sich das Werk besonders an folgenden Nutzerkreis:

- Studenten im 1. und 2. Semester der Fachhochschulen
- Studenten der Akademien
- Studenten der Technikerschulen
- Studenten der Meisterschulen Bautechnik
- Schülerinnen und Schüler der beruflichen Gymnasien, Schwerpunkt Bautechnik
- Bauzeichnerinnen und Bauzeichner

Autor, Lektor und Verlag sind allen Benutzern für Hinweise und Anregungen zur Verbesserung des Fachbuches dankbar (lektorat@europa-lehrmittel.de).

Inhaltsverzeichnis

Physikalische Grundlagen, Kräfte und Momente	10	2.4.2	Zusammengeschweißtes I-Profil aus Flachstählen	45
1.1 Abgrenzung Masse – Kraft	11	2.4.3	2 ungleichschenklige \square Stähle mit Stegblech und Gurtplatte	45
1.2 Kraft	11	2.4.4	2-stegiger Querschnitt aus Breitflachstählen	46
1.3 Zusammensetzen von Kräften, Resultierende Kraft R	12	2.5 Flächenmomente 1. Grades	46	
1.3.1 Zusammensetzen von Kräften auf der gleichen Wirkungslinie	12	2.5.1 Allgemein	46	
1.3.2 Zusammensetzen zweier Kräfte auf sich schneidenden Wirkungslinien ..	13	2.5.2 Plattenbalken nach 2.2.1	46	
1.3.3 Zusammensetzen von Kräften im zentralen Kräftesystem	15	2.5.3 Rechteckquerschnitt	47	
1.3.4 Zusammensetzen von Kräften im allgemeinen Kräftesystem	18	2.5.4 Zusammengesetztes Stahlprofil.	47	
■ Drehmoment (Moment) M	18	2.6 Flächenmomente 2. Grades, Polares Flächenmoment, Flächenzentrifugalmoment	47	
■ Kräftepaar	18	2.6.1 Flächenmomente 2. Grades	47	
■ Drehmoment mehrerer Kräfte um Pol B	19	2.6.2 Polares Flächenmoment	47	
■ Seileck und Poleck	19	2.6.3 Flächenzentrifugalmoment (Deviationsmoment)	47	
1.4 Zerlegen von Kräften in der Ebene ..	24	2.6.4 Flächenmoment 2. Grades um parallele Achsen, Satz von Steiner. . .	48	
1.4.1 Zerlegen einer Kraft F nach zwei vorgegebenen Wirkungslinien	24	2.6.4.1 Rechteckfläche	48	
1.4.2 Zerlegen einer Kraft F nach zwei zu ihr parallelen Wirkungslinien W_{F_1} und W_{F_2}	26	2.6.4.2 Plattenbalken	49	
1.4.3 Zerlegen einer Kraft F nach drei gegebenen Wirkungslinien in der Ebene ..	28	2.6.4.3 Querschnittsfläche, geschweißtes I-Profil	50	
1.5 Gleichgewicht im ebenen Kräftesystem	30	2.6.4.4 Kreisfläche	50	
1.5.1 Grundlegendes zum Gleichgewicht ..	30	2.7 Hauptachsen, Hauptflächenmomente	50	
1.5.2 Zwei Kräfte F, F' auf einer Wirkungslinie	31	2.8 Elastisches und plastisches Widerstandsmoment	52	
1.5.3 Gleichgewicht im zentralen Kräftesystem	31	2.8.1 Elastisches Widerstandsmoment W_{el} (Rechteckquerschnitt)	52	
1.5.4 Gleichgewicht für eine Kraft F mittels drei Kräften auf vorgegebenen Wirkungslinien (Culmann)	33	2.8.2 Plastisches Widerstandsmoment W_{pl} (Rechteckquerschnitt)	52	
1.6 Beispiele	34	2.8.2.1 Plastisches Widerstandsmoment W_{pl} (Rechteckquerschnitt)	52	
■ Einfeldträger, statisch bestimmt ..	34	2.8.2.2 Plastisches Widerstandsmoment W_{pl} für Walzprofilquerschnitt (Stahlträger) ..	53	
■ Angelehnte Leiter	35	Belastungen, Einwirkungen, Lastweiterleitung	56	
■ Stehleiter	36	3.1 Grundlegendes	57	
Querschnitte und Querschnittswerte ..	42	3.1.1 Einwirkungen auf Tragwerke	57	
2.1 Einfache Querschnitte	43	3.1.2 Einwirkungsarten	58	
2.2 Zusammengesetzte Querschnitte ..	43	3.2 Lasten durch Kräfte	58	
2.2.1 Plattenbalken	43	3.2.1 Ständige Lasten g, G	58	
2.2.2 Hohlquerschnitte	43	3.2.2 Veränderliche Lasten q, Q	58	
2.3 Stahlprofile, Profildmaße, Querschnittswerte	44	3.3 Verteilung der Lasten	59	
2.4 Zusammengesetzte Stahlprofile	45	3.3.1 Flächenlasten	59	
2.4.1 2 IPE 160 mit 2 Gurtplatten \square 300.8 .	45	3.3.1.1 Gleichmäßig verteilte Flächenlasten .	59	
		3.3.1.2 Nicht gleichmäßig verteilte Flächenlast	59	
		3.3.2 Streckenlasten	59	
		3.3.2.1 Gleichmäßig verteilte Streckenlasten	59	

Arbeit, virtuelle Arbeit	168
7.1 Grundlagen	169
7.2 Betrachtung eines Stabwerkes (Biegeträger)	169
7.2.1 Äußere Arbeit A_a	169
7.2.2 Innere Arbeit A_i	169
7.2.3 Arbeitsgleichung	170
7.2.4 Virtuelle Arbeit	170
7.2.5 Berechnung der Verformung an einem Vollwandträger (Biegeträger) mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte	171
7.2.5.1 Wirkliches System	172
7.2.5.2 Virtuelles System	172
7.2.5.3 Arbeitsgleichung	172
7.2.5.4 Integraltafel	172
7.2.6 Berechnung von Verformungen bei verschiedenen Systemen	174
7.2.7 Beispiele	
■ Beispiel 1 Kragträger, Verdrehung und Durchbiegung	174
■ Beispiel 2 Einfeldträger mit Kragarm, Durchbiegungen ..	175
■ Beispiel 3 Einfeldträger, Verdrehung und Durchbiegungen ..	176
■ Beispiel 4 Dreigelenksystem (Sparrensystem), Firstdurchbiegung	177
■ Beispiel 5 Zweigelenkrahmen, Horizontalverschiebung, gegenseitige Horizontalverschiebung eines Punktpaares	178
■ Beispiel 6 Kreisbogen, Horizontalverschiebung	179
■ Beispiel 7 Kragträger mit veränderlichem Flächenmoment, Verdrehung	180
7.2.8 Verformungen bei Fachwerkträgern (Hinweis)	180

Anhang A

Übungsaufgaben 1 bis 21	182
--------------------------------------	-----

Anhang B

Elastisch gebetteter Fundamentstreifen unter Einzellasten	192
--	-----

Anhang C

Spannungs-Dehnungsverhalten von Baustoffen	194
1 Grundlagen	194
1.1 Elastisches Verhalten (Elastizität) ..	194
1.2 Plastisches Verhalten	194
1.3 Elastizitätsgrenze	194

1.4 Ermittlung des Elastizitätsmoduls (E-Modul) und Spannungs-Dehnungs-Diagramm	194
1.5 Die Bedeutung des Elastizitätsmoduls für eine Baukonstruktion	195
2 Spannungs- und Dehnungsverhalten von Stahl	195
2.1 Zugversuch	195
2.2 Darstellung und Vorgangsbeschreibung	195
3 Holz	197
4 Beton	198

Anhang D

Biegeträger, Formeln für häufig vorkommende Lastsysteme	201
1 Statisch bestimmte Träger	201
1.1 Kragträger	201
1.2 Träger auf zwei Stützen	203
2 Statisch unbestimmte Träger auf zwei Stützen	212
3 Durchlaufträger mit 2, 3, 4 gleichen Stützweiten, Anwendungsbeispiel ..	217

Anhang E

Mathematische Grundlagen	220
Addition, Subtraktion	220
Potenzen	220
Multiplikation	220
Division	220
Rechnen mit Vorzeichen und Rechenzeichen	220
Punktrechnen geht vor Strichrechnen	220
Distributivgesetz	220
Rechnen mit Klammern	221
Bruchrechnung	221
Erweitern von Brüchen	221
Kürzen von Brüchen	221
Addition und Subtraktion von Brüchen	222
Multiplikation von Brüchen	222
Division von Brüchen	222
Dezimalbruch oder Dezimalzahl	222
Prozentrechnung	223
Quadrieren, Quadratwurzel	223
Satz des Pythagoras	224
Höhensatz	224
Kubikwurzel	224
Wurzeln	224
Gleichungen	224
Proportion	226
Funktionen	227
Lineare Funktion	227
Funktion 2. Grades	228

Sachwortverzeichnis	230
----------------------------------	-----

EINLEITUNG

Die Statik als Teilgebiet der Mechanik ist die Lehre von den Gesetzen des Gleichgewichts unter Kraftwirkung stehender fester Körper. Der Name kommt vom lateinischen Wort „stare“ und bedeutet „stehen“.

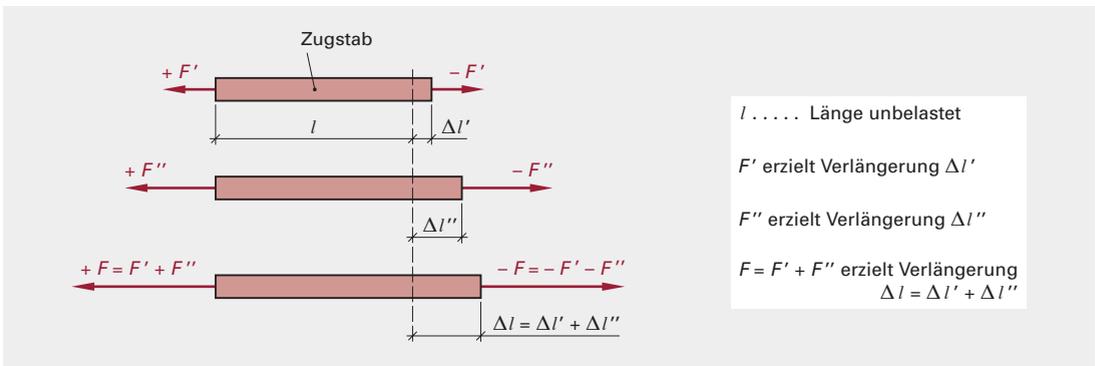
Der Gleichgewichtszustand der Tragwerke sowohl ohne (Theorie 1. Ordnung) als auch mit (Theorie 2. Ordnung) Berücksichtigung der Verformung und die Festigkeitslehre als Teilgebiet sind die Grundlage für die Baustatik.

Die Festigkeitslehre beruht auf folgenden Zusammenhängen:

Bei Einwirkungen auf ein Tragwerk entstehen Verformungen, die durch Spannungen im Baustoff ausgelöst werden. Die Elastizitätstheorie betrachtet den mathematischen Zusammenhang zwischen den Kräften, den Spannungen und den zugehörigen Verformungen. Die dafür wichtigen Kenngrößen, die das Verhalten der Werkstoffe kennzeichnen, sind Ergebnisse und Erfahrungen der Technologie (Werkstofftechnik).

Außer im Gebiet der Stabilität beziehen sich die hier ausgeführten Betrachtungen auf die Theorie 1. Ordnung. Dies bedeutet eine erhebliche Vereinfachung der Problematik, weil die erwarteten Verformungen nicht in die Berechnungen eingeführt werden (Gleichgewichtsbetrachtung am unverformten System). Somit gilt auch das Superpositionsgesetz, das bedeutet, dass z.B. Stützkkräfte, Schnittkräfte, Formänderungen getrennt für einzelne Einwirkungen ermittelt und überlagert werden können.

Dazu ein Beispiel zur Erläuterung:



Zum Themenaufbau des Werks:

Die Reihenfolge der Abschnitte 2 bis 6 entspricht dem Aufbau eines statischen Nachweises in der Tragwerksplanung mit Querschnitt – Lastsystem – Stütz- und Schnittkräften – Bemessung (Spannung) – Gebrauchstauglichkeit (Formänderungen).

Dabei umfasst der Abschnitt 1 mit den Themenschwerpunkten Kräfte, Momente, Gleichgewicht die baustatischen Grundlagen, während der Abschnitt 7 (Arbeit, Virtuelle Arbeit) zunächst eine Erweiterung des Abschnittes 6 (Formänderungen) darstellt.

Inhaltsverzeichnis Abschnitt 1

Physikalische Grundlagen, Kräfte und Momente 10		1.4 Zerlegen von Kräften in der Ebene . . . 24
1.1 Abgrenzung Masse – Kraft 11		1.4.1 Zerlegen einer Kraft F nach zwei vorgegebenen Wirkungslinien 24
1.2 Kraft 11		1.4.2 Zerlegen einer Kraft F nach zwei zu ihr parallelen Wirkungslinien WIF_1 und WIF_2 26
1.3 Zusammensetzen von Kräften, Resultierende Kraft R 12		1.4.3 Zerlegen einer Kraft F nach drei gegebenen Wirkungslinien in der Ebene. . . 28
1.3.1 Zusammensetzen von Kräften auf der gleichen Wirkungslinie 12		1.5 Gleichgewicht im ebenen Kräftesystem 30
1.3.2 Zusammensetzen zweier Kräfte auf sich schneidenden Wirkungslinien . . . 13		1.5.1 Grundlegendes zum Gleichgewicht. . . 30
1.3.3 Zusammensetzen von Kräften im zentralen Kräftesystem 15		1.5.2 Zwei Kräfte F, F' auf einer Wirkungslinie. 31
1.3.4 Zusammensetzen von Kräften im allgemeinen Kräftesystem 18		1.5.3 Gleichgewicht im zentralen Kräftesystem 31
■ Drehmoment (Moment) M 18		1.5.4 Gleichgewicht für eine Kraft F mittels drei Kräften auf vorgegebenen Wirkungslinien (Culmann) 33
■ Kräftepaar 18		1.6 Beispiele 34
■ Drehmoment mehrerer Kräfte um Pol B 19		■ Einfeldträger, statisch bestimmt . . . 34
■ Seileck und Poleck 19		■ Angelehnte Leiter 35
		■ Stehleiter 36

1 Physikalische Grundlagen, Kräfte und Momente

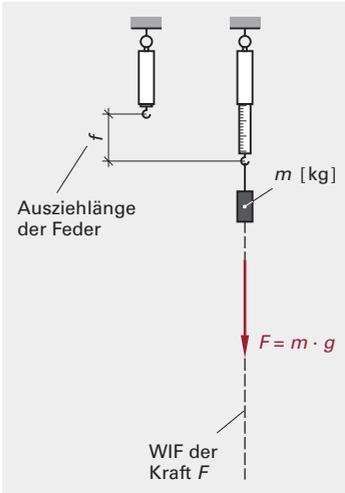


Abb. 10.1

In der Baustatik als Teil der Mechanik und damit der Naturwissenschaft Physik ist die **Kraft** eine Größe, die einer gründlicheren Betrachtung bedarf. Beim einfachen Hinsehen ist eine Kraft oft nicht erkennbar. Erst bei Verformungen und Bewegungen wird die Ursache „Kraft“ erkennbar.

Federwaage (Abb. 10.1)

Die Verlängerung f der Feder ist verursacht durch die Kraft F , die axial der Feder nach unten (richtiger ausgedrückt zum Erdmittelpunkt) wirkt (Wirkungslinie der Kraft F wird WIF benannt).

Es gilt: $F = m \cdot g$ [N]

Hebevorrichtung (Abb. 10.2)

Eine Masse m wird durch die Hebevorrichtung über eine Seilrolle nach oben gezogen. Die Hebevorrichtung ist am bestehenden Gebäude unterstützt.

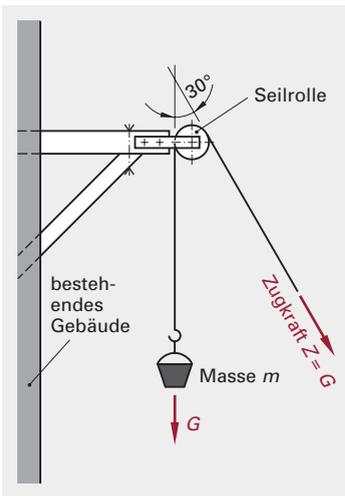


Abb. 10.2

Aufgabe ① Ermittlung des Gewichtes G aus der Masse $m = 40$ kg.

Aufgabe ② Größe und Lage der resultierenden Kraft R aus den Kräften G und Z , wenn der Winkel zwischen der Wirkungslinie von G (WIG) und der Wirkungslinie von Z (WIZ) 30° beträgt.

Lösung Rechnerische und grafische Lösung sinnvoll.

Zweiseitiger Hebel (Abb. 10.3)

Ein Kind sitzt auf einer Wippe, die in g drehbar gelagert ist.

Das Kind hat eine Masse m von 20 kg; damit ein Gewicht

$$K = m \cdot g$$

$$K = 20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 200 \text{ N}$$

Das Eigengewicht des Holzbalkens wird vernachlässigt.

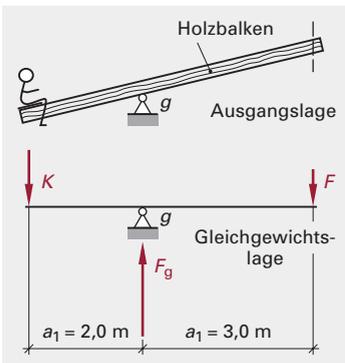


Abb. 10.3

Aufgabe ① Welche Kraft F muss aufgebracht werden, um die Wippe in der Gleichgewichtslage zu halten?

Lösung Gleichgewichtsbedingung $\Sigma \text{Mom} (g) = 0$
 sprich: „Summe der Momente um den Drehpunkt g ist gleich Null“.

⤵ Betrachtete Drehrichtung positiv

$$-K \cdot a_1 + F \cdot a_2 = 0 \quad \text{folgt} \quad F = \frac{K \cdot a_1}{a_2}$$

Aufgabe ② Wie groß ist dann die Stützkraft F_g ?

Lösung Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$
 sprich: „Summe der Vertikalkräfte gleich Null“.

⤴ Betrachtete Krafrichtung positiv

$$F_g - K - F = 0 \quad \text{folgt} \quad F_g = K + F$$

Aufgabe ③ Setzen Sie die Zahlenwerte $a_1 = 2,0$ m; $a_2 = 3,0$ m ein und ermitteln Sie F und F_g .

1.1 Abgrenzung Masse – Kraft

Unter der Masse eines Körpers wird dessen Stoffmenge verstanden. Die Stoffmenge besitzt ein Volumen V und ein Gewicht G als Kraft. Der Zusammenhang zwischen Masse und Kraft ist das Grundgesetz der Dynamik nach Isaac Newton¹⁾.

Es gilt

$$F = m \cdot a$$

mit m Masse des Körpers in [kg]

a Beschleunigung in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

F Kraft in $\left[\frac{kg \cdot m}{s^2} = N\right]$

N für „Newton“

Für das Gewicht G der Masse m durch Erdanziehung (Gravitation) gilt

$$G = m \cdot g$$

mit g Erdbeschleunigung

$g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ (gerundet $10 \frac{m}{s^2}$)

G Gewicht $G \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} = N\right]$

Beispiel Gewicht G des Körpers (Abb. 11.1)

Der Körper übt auf die Unterlage eine Kraft G (Gewicht) aus, die durch die Masse m und deren Erdanziehung hervorgerufen wird.

$$G = m \cdot g$$

$$G = 1 \text{ [kg]} \cdot 10 \left[\frac{m}{s^2}\right] = 10 \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} = N\right]$$

$$G = 10 \text{ [N]}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$$

$$1 \text{ MN} = 1000 \text{ kN}$$

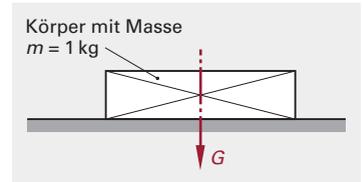


Abb. 11.1

1.2 Kraft

Die **Kraft** ist ein Vektor, d. h. eine gerichtete Größe.

Die Kraft ist durch drei Größen festgelegt:

- **Betrag** der Kraft

Der Betrag der Kraft wird mittels Kräftemaßstab auf einer Länge dargestellt.

- **Wirkungslinie WI** und **Kraftrichtung** (Pfeil); längs der Wirkungslinie ist die Kraft am starren Körper verschiebbar.

- **Angriffspunkt** der Kraft

Beispiel Kraft $F = 25 \text{ kN}$

Wirkungslinie WIF (30° zur Horizontalen geneigt)

Kraftrichtung durch Pfeil

Vektorsymbol für die Kraft $F \vec{F}$

Kräftemaßstab gewählt $10 \text{ kN} \hat{=} 1 \text{ cm}$
folgt $25 \text{ kN} \hat{=} 2,5 \text{ cm}$

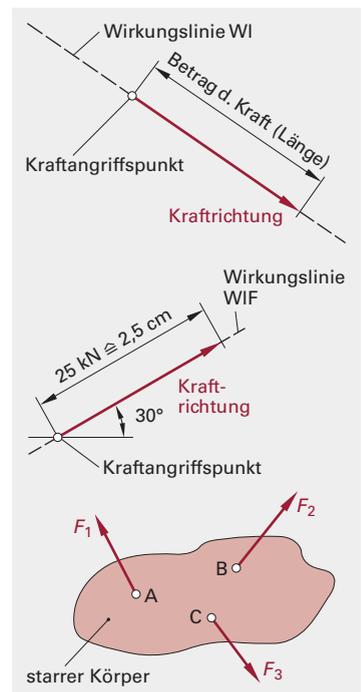


Abb. 11.2

Ebenes Kraftsystem am starren Körper

Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, haben verschiedene Angriffspunkte. Die Kräfte F_1, F_2, F_3 bilden ein ebenes Kraftsystem.

An einem starren Körper dürfen die Kräfte auf ihren Wirkungslinien verschoben werden. Dabei ändert sich der Zustand des starren Körpers nicht. Auch können Einzelkräfte durch ihre **Resultierende** ersetzt werden (Abschnitt 1.3), wobei die Wirkung auf den starren Körper gleich bleibt. Das bedeutet, dass die beiden Kraftsysteme – sowohl Einzelkräfte als auch Resultierende aus den Einzelkräften – gleichwertige (**äquivalente**) Kraftsysteme sind.

¹⁾ Isaac Newton, 1643–1727, englischer Physiker und Mathematiker

1.3 Zusammensetzen von Kräften, Resultierende Kraft R

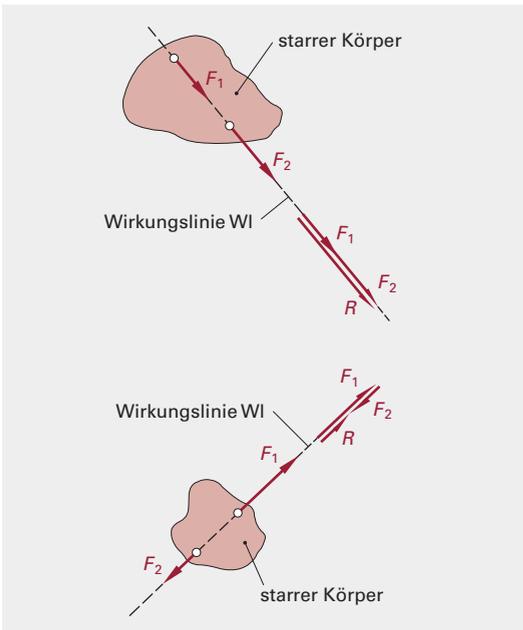


Abb. 12.1

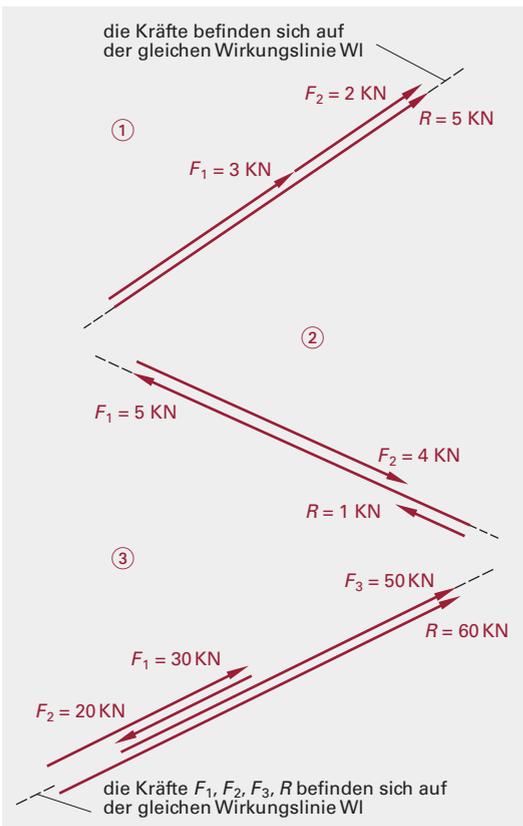


Abb. 12.2

Es wird angenommen, dass es sich um ein ebenes Kraftsystem handelt. Das heißt, die dargestellten Kräfte liegen in einer Ebene, der Zeichenebene.

1.3.1 Zusammensetzen von Kräften auf der gleichen Wirkungslinie

Zusammensetzen von Kräften auf der gleichen Wirkungslinie erfolgt durch Addition bzw. Subtraktion der Kräfte F_1 und F_2 . Es entsteht eine gleichwertige Wirkung am Kraftsystem durch die Resultierende R .

Addition $F_1 + F_2 = R$
 R Resultierende oder resultierende Kraft

Die Kräfte F_1, F_2, R befinden sich auf der gleichen Wirkungslinie WI (vgl. Abb. 12.1 und 12.2).

Subtraktion $F_1 - F_2 = R$

Die Resultierende R hat die gleiche Wirkung wie das Kraftsystem aus F_1 und F_2 .

Beispiel ①

$F_1 = 3 \text{ kN}$ und $F_2 = 2 \text{ kN}$ auf der gleichen Wirkungslinie und gleicher Richtung.

Kräftemaßstab $1 \text{ kN} \cong 1 \text{ cm}$

Addition
 $R = F_1 + F_2$
 $R = 3 \text{ kN} + 2 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$

Beispiel ②

$F_1 = 5 \text{ kN}$ und $F_2 = 4 \text{ kN}$ auf der gleichen Wirkungslinie.

Kräftemaßstab $1 \text{ kN} \cong 1 \text{ cm}$

Subtraktion
 $R = F_1 - F_2$
 $R = 5 \text{ kN} - 4 \text{ kN} = 1 \text{ kN}$

Beispiel ③

$F_1 = 30 \text{ kN}$; $F_2 = 20 \text{ kN}$; $F_3 = 50 \text{ kN}$ auf der gleichen Wirkungslinie.

Kräftemaßstab $10 \text{ kN} \cong 1 \text{ cm}$

$R = F_1 - F_2 + F_3$
 $R = 30 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + 50 \text{ kN}$
 $R = 60 \text{ kN}$

1.3.2 Zusammensetzen zweier Kräfte auf sich schneidenden Wirkungslinien

Zentrales Kraftsystem

Dabei hat das **Kräfteparallelogramm** grundlegende Bedeutung. Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt (bzw. deren Wirkungslinien sich im Schnittpunkt S schneiden) lassen sich durch eine Resultierende R ersetzen, die die Diagonale im Kräfteparallelogramm ist.

1 Zeichnerische (grafische) Lösung

Das Zusammensetzen erfolgt im **Kräfteplan**, wobei die beiden Kräfte F_1 und F_2 an den Pfeilspitzen aneinandergereiht werden.

Die Resultierende R ergibt sich als Verbindungslinie vom Anfangspunkt A' der Kraft F_1 zum Endpunkt B' als Pfeilspitze der Kraft F_2 (vgl. Abb. 13.1 b2).

Die Resultierende R ergibt sich ebenso als Verbindungslinie vom Anfangspunkt A der Kraft F_2 zum Endpunkt B als Pfeilspitze der Kraft F_1 (vgl. Abb. 13.1 b1).

Durch Aneinanderfügen der beiden Krätedreiecke (1) und (2) – Strecken AB und $A'B'$ zur Deckung bringen – entsteht das Kräfteparallelogramm (Abb. 13.1c).

Anschließend wird parallel zu R im Kräfteplan die Wirkungslinie von R (WIR) in den **Lageplan** durch den Schnittpunkt S (WIF_1/WIF_2) eingetragen (Abb. 13.1d).

Die Resultierende R im Lageplan besitzt die gleiche Wirkung wie die Kräfte F_1 und F_2 (Äquivalenz).

2 Rechnerische Lösung

Kräfteparallelogramm

Die Resultierende R wird mittels Kosinussatz aus dem Krätedreieck ermittelt.

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \gamma$$

mit $\gamma = 180^\circ - \alpha \Rightarrow -\cos \gamma = \cos \alpha$ gilt

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{R} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{F_2}{R} \cdot \sin \gamma \quad (\text{Abb. 13.1e})$$

mit $\gamma = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \sin \gamma = \sin \alpha$

α_1 Neigung der Wirkungslinie der Resultierenden zur Horizontalen.

Hinweis:

Sinussatz $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

hier $\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1}$

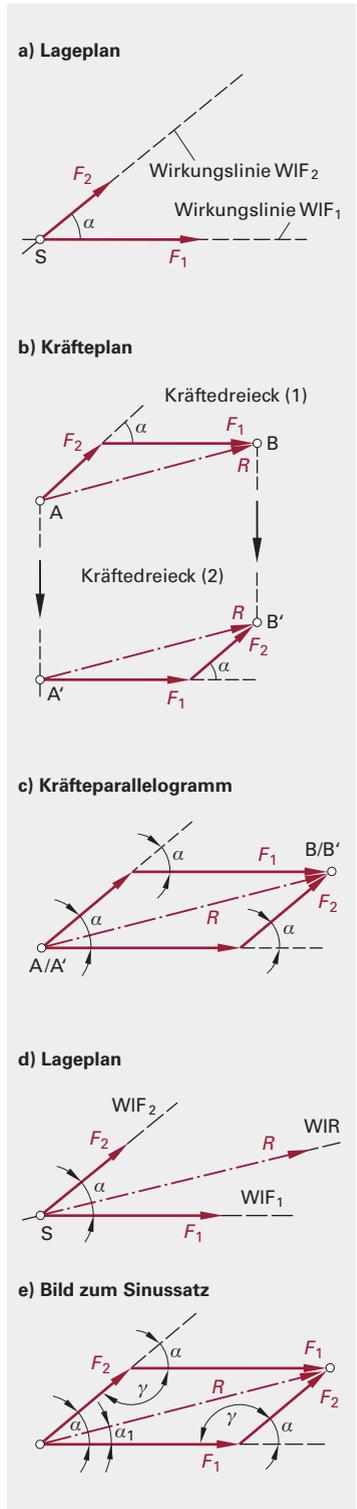


Abb. 13.1

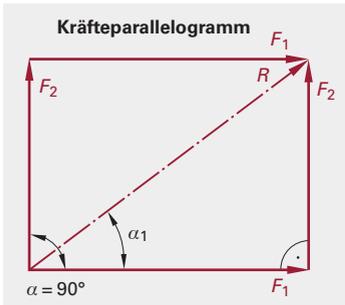


Abb. 14.1

3 Sonderfall $\alpha = 90^\circ$

Wirkungslinie WIF_1 und Wirkungslinie WIF_2 stehen aufeinander senkrecht

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad \text{mit } \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (\text{Pythagoras})$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{F_2}{R} \quad \text{oder} \quad \tan \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1}$$

α_1 Neigung der Resultierenden zur Horizontalen.

In Zahlenwerten:

Kräftemaßstab $1 \text{ kN} \hat{=} 1 \text{ cm}$; $F_1 = 4 \text{ kN}$; $F_2 = 3 \text{ kN}$; $\alpha = 90^\circ$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 36,9^\circ$$

Beispiel Zusammensetzen zweier Kräfte $F_1 = 800 \text{ kN}$ (Wirkungslinie WIF_1) und $F_2 = 500 \text{ kN}$ (Wirkungslinie WIF_2); $\alpha = 70^\circ$

Die beiden Kräfte F_1 und F_2 werden bis zum Schnittpunkt S auf ihren Wirkungslinien verschoben.

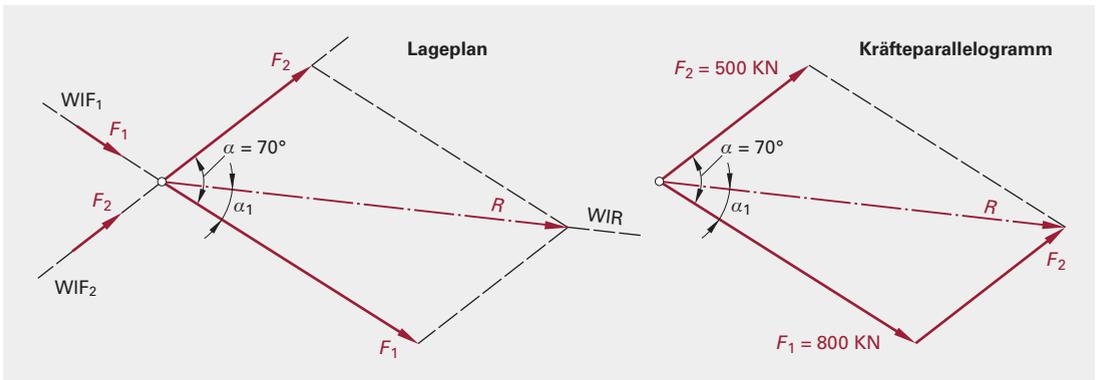


Abb. 14.2

Grafische Lösung

Zusammensetzen der beiden Kräfte F_1 , F_2 im Kräfteplan mithilfe des Kräfteparallelogramms

Kräftemaßstab $1 \text{ cm} \hat{=} 200 \text{ kN}$; $F_1 = 800 \text{ kN} \hat{=} 4 \text{ cm}$, $F_2 = 500 \text{ kN} \hat{=} 2,5 \text{ cm}$

Aus Abmessen für R mit $5,35 \text{ cm}$ beträgt $R = 5,35 \text{ cm} \cdot 200 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 1070 \text{ kN}$; anschließend Parallelverschiebung der Resultierenden R vom Kräfteplan in den Lageplan.

Anmerkung: Die Bestimmungsgenauigkeit der Resultierenden R hängt von der Zeichengenauigkeit ab.

Rechnerische Lösung

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \Rightarrow R = \sqrt{800^2 + 500^2 + 2 \cdot 800 \cdot 500 \cdot \cos 70^\circ} \Rightarrow R = 1078,7 \text{ kN}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{F_2}{R} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{500}{1078,7} \cdot \sin 70^\circ$$

$$\sin \alpha_1 = 0,4356 \Rightarrow \alpha_1 = 25,8^\circ$$

Hinweis:

Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$
 $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \beta$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$

1.3.3 Zusammensetzen von Kräften im zentralen Kräftesystem

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte ein, so stellt sich häufig die Aufgabe, das gegebene Kräftesystem F_i durch eine Einzelkraft (Resultierende R) von gleicher Wirkung (als äquivalente Kraft) zu ersetzen. Die Resultierende R wird im Kräfteplan grafisch ermittelt und in den Lageplan durch Parallelverschiebung eingebracht. Damit weist die Resultierende R die gleiche Wirkung auf wie das Kräftesystem F_i mit $i = 1 \dots 4$.

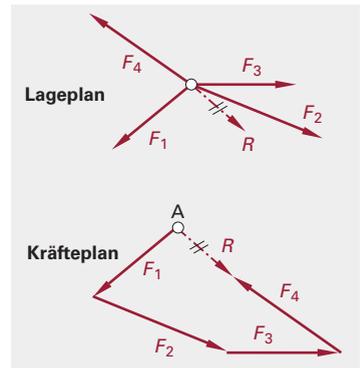


Abb. 15.1

Einzellasten F_i eines **zentralen Kräftesystems** werden zu einer Resultierenden R als äquivalente Kraft zusammengesetzt.

Grafische Lösung

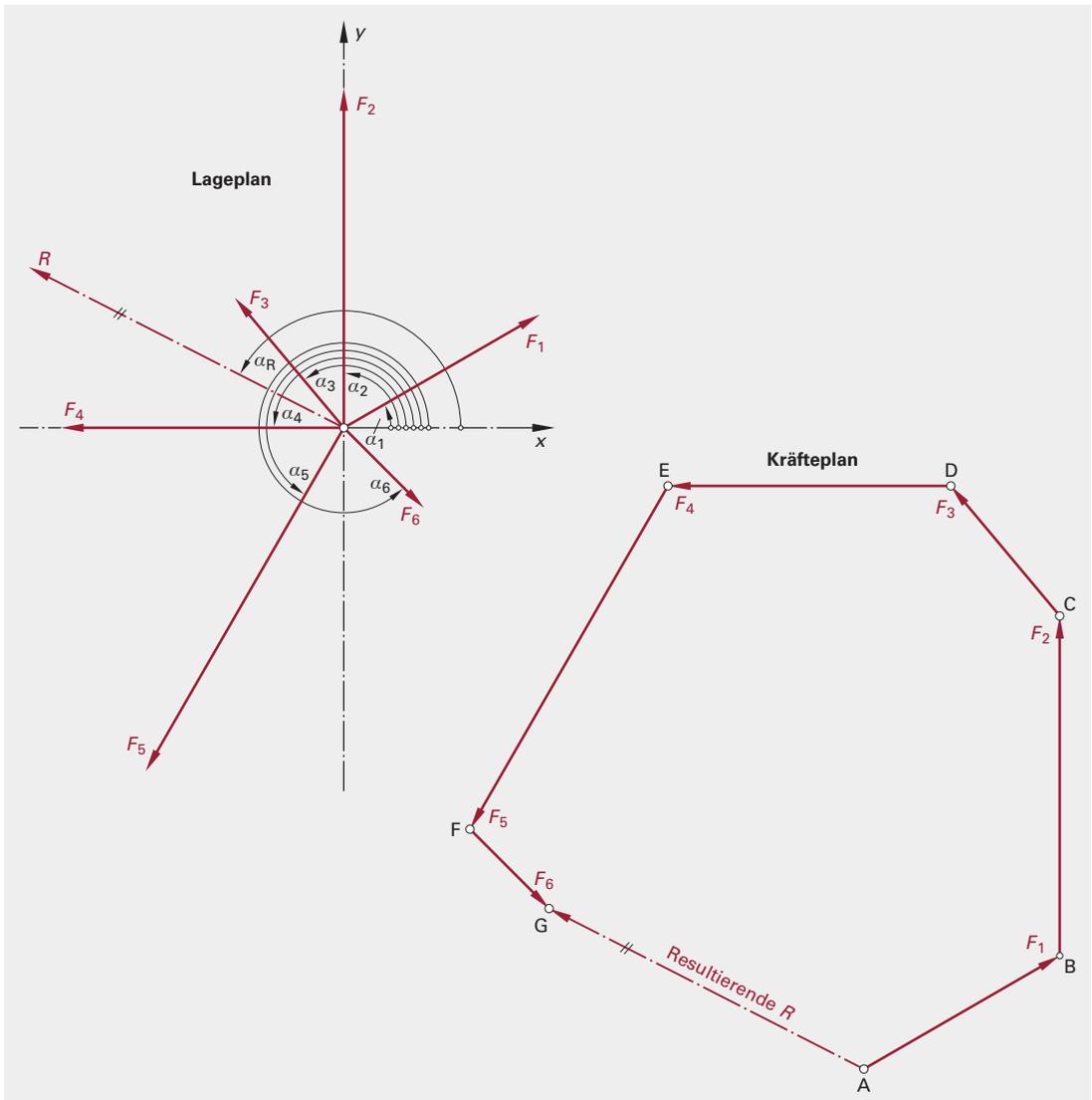


Abb. 15.2

Durchführung und Erklärung

Die Wirkungslinien mehrerer Kräfte (hier $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$) liegen in einer Ebene und schneiden sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt, der gleichzeitig der Ursprung des x, y -Koordinatensystems ist.

Das Zusammensetzen der Kräfte erfolgt im Kräfteck durch Parallelverschiebung der Kräfte aus dem Lageplan in den Kräfteplan. Die einzelnen Kräfte werden, beginnend mit dem Anfangspunkt A der Kraft F_1 zum Endpunkt B, Anfangspunkt B der Kraft F_2 zum Endpunkt C, Anfangspunkt C der Kraft F_3 zum Endpunkt D, Anfangspunkt D der Kraft F_4 zum Endpunkt E, Anfangspunkt E der Kraft F_5 zum Endpunkt F, Anfangspunkt F der Kraft F_6 zum Endpunkt G aneinandergereiht.

Vom Anfangspunkt A der Kraft F_1 zum Endpunkt G der Kraft F_6 verläuft die Resultierende R . Dabei ist die Größe die Länge des Kraftpfeils und die Richtung die Pfeilrichtung von A nach G. Die Wirkungslinie der Resultierenden R ergibt sich durch

Parallelverschiebung aus dem Kräfteplan in den Lageplan und führt durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Kräfte (hier Ursprung des x, y -Koordinatensystems).

Hinweise

- Die Aneinanderreihung der Kräfte F_1 bis F_6 kann in beliebiger Reihenfolge geschehen
- Die Kräfte F_1 bis F_6 haben in ihrer Gesamtheit die gleiche Wirkung wie die Resultierende R .

In Zahlenwerten mit dem Kräftemaßstab 1 cm \cong 1 kN (in den Abb. 15.2 und 16.1 etwas verkleinert)

$$F_1 = 4 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_1 = 30^\circ$$

$$F_2 = 6 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ$$

$$F_3 = 3 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_3 = 130^\circ$$

$$F_4 = 5 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_4 = 180^\circ$$

$$F_5 = 7 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_5 = 240^\circ$$

$$F_6 = 2 \text{ kN} \Rightarrow \alpha_6 = 315^\circ$$

ergibt die Resultierende (gemessene Werte)

$$R_x = 5,55 \text{ kN} \Rightarrow R_y = 2,80 \text{ kN} \Rightarrow R = 6,25 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 153^\circ$$

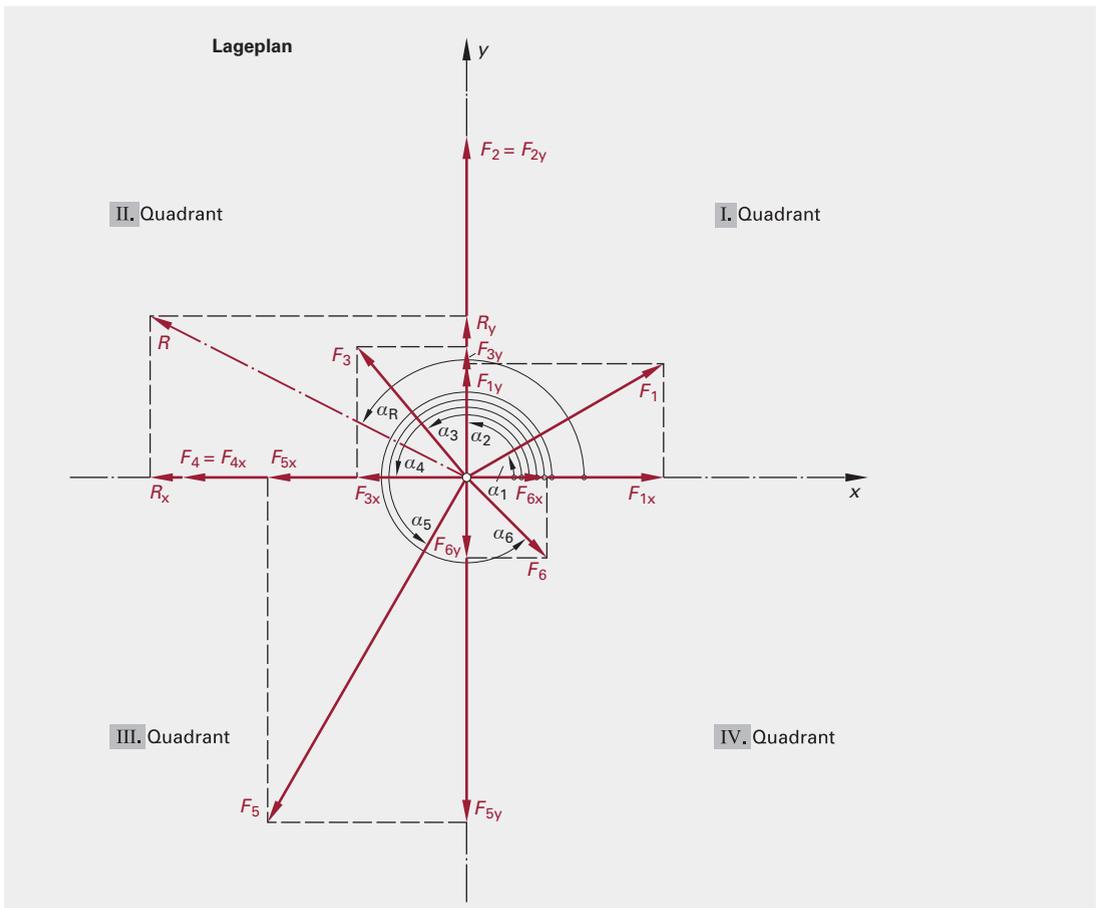


Abb. 16.1

Rechnerische Lösung

Einzellasten F_i mit Komponenten F_{ix}, F_{iy}

α_i für $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Ermittlung der Resultierenden R mit Komponenten R_x, R_y und Neigungswinkel α_R

Die Einzelkräfte F_i werden im x, y -Koordinatensystem in ihre Komponenten F_{ix} und F_{iy} zerlegt (vgl. Abschnitt 1.3.2 Beispiel 2).

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$

für $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Es gilt

Die Summe der F_{ix} -Komponenten ist die Komponente R_x der Resultierenden R

$$\sum F_{ix} = R_x$$

und

die Summe der F_{iy} -Komponenten ist die Komponente R_y der Resultierenden R

$$\sum F_{iy} = R_y$$

daraus folgt

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Neigungswinkel α_R für die Wirkungslinie der Resultierenden

$$\tan \alpha_R = \frac{\sum F_{iy}}{\sum F_{ix}} = \frac{R_y}{R_x}$$

Zahlenwerte:

$i = 1$ bis $6 \Rightarrow$ d. h. 6 Einzelkräfte

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	[kN] F_i	α_i	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$F_i \cdot \cos \alpha$ [kN]	$F_i \cdot \sin \alpha$ [kN]
F_1	4	30°	0,8660	0,5000	+ 3,464	+ 2,000
F_2	6	90°	∅	1,0000	∅	+ 6,000
F_3	3	130°	- 0,6428	0,7660	- 1,928	+ 2,298
F_4	5	180°	- 1,0000	∅	- 5,000	∅
F_5	7	240°	- 0,5000	- 0,8660	- 3,500	- 6,062
F_6	2	315°	+ 0,7071	- 0,7071	+ 1,414	- 1,414
R					\sum - 5,550	\sum + 2,822

Auswertung in Tabellenform (zwei Stellen nach dem Komma).

Spalte 6

Summe der Komponenten F_{ix} in x -Richtung ergibt die Komponente der Resultierenden R_x

$$R_x = -5,55 \text{ kN}$$

Spalte 7

Summe der Komponenten F_{iy} in y -Richtung ergibt die Komponente der Resultierenden R_y

$$R_y = +2,82 \text{ kN}$$

Aus dem Vorzeichen für R_x (negativ) und für R_y (positiv) folgt die Lage von R im II. Quadranten.

$$\text{Resultierende } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(-5,55)^2 + 2,82^2} = 6,23 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_R = \frac{+2,82}{-5,55} = -0,5085 \Rightarrow \alpha_R = 153^\circ$$

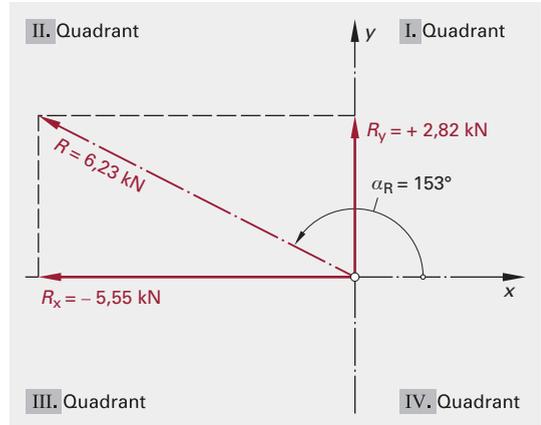


Abb. 17.1

Lage der Resultierenden

Allgemein ergibt sich die Lage für die Resultierende R aus den Vorzeichen der Komponenten R_x und R_y und der Neigungswinkel α_R aus

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

R_x (+ Vorzeichen)	R_y (+ Vorzeichen)	$\tan \alpha_R$ (+ Vorzeichen)	I. Quadrant
R_x (-)	R_y (+)	$\tan \alpha_R$ (-)	II. Quadrant
R_x (-)	R_y (-)	$\tan \alpha_R$ (+)	III. Quadrant
R_x (+)	R_y (-)	$\tan \alpha_R$ (-)	IV. Quadrant

1.3.4 Zusammensetzen von Kräften im allgemeinen Kräftesystem

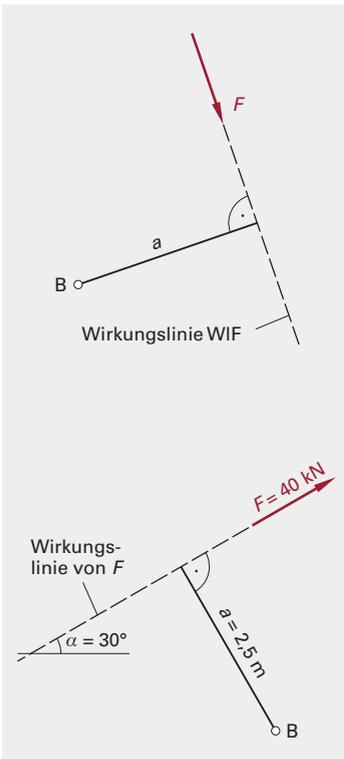


Abb. 18.1

■ Drehmoment (Moment) M (Abb. 18.1)

Das Moment M ermittelt sich aus dem Produkt von der Kraft F und deren Hebelarm a .

$$M = F \cdot a \quad \text{mit}$$

F Kraft in den Einheiten N, kN, MN

a Abstand vom Bezugspunkt B von der Wirkungslinie WIF der Kraft F (Hebelarm) in den Einheiten cm, m

M Moment in den Einheiten kNm, MNm, kNcm

\hat{M} bedeutet rechtsdrehendes Moment im Uhrzeigersinn um den Bezugspunkt B

Allgemeine Festlegung

⇒ rechtsdrehendes Moment $\hat{+}$ Vorzeichen positiv

⇒ linksdrehendes Moment $\hat{-}$ Vorzeichen negativ.

Beispiel

gegeben Kraft $F = 40 \text{ kN}$

Wirkungslinie der Kraft F

Abstand $a = 2,50 \text{ m}$

gesucht ist das Drehmoment M , das von der Kraft F um den Pol B wirkt.

$$\begin{aligned} M &= F \cdot a \\ &= 40 \text{ kN} \cdot 2,50 \text{ m} \\ M &= 100 \text{ kNm} \end{aligned}$$

■ Kräftepaar (Abb. 18.2)

Ein Kräftepaar besteht aus zwei entgegengesetzt gerichteten, gleich großen Kräften, deren Wirkungslinien zueinander parallel sind und deren Abstand a_1 beträgt.

Das Drehmoment M der beiden Kräfte F_1 und F_2 um Pol B beträgt mit $\hat{+}$

$$M = -F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + a_1)$$

mit $|F_1| = |F_2| = F$ folgt

$$M = -F \cdot a + F \cdot a + F \cdot a_1$$

$$M = F \cdot a_1$$

Demnach ist das Drehmoment des Kräftepaares unabhängig von der Lage des Pols B, da die Größe a keinen Einfluss auf das Drehmoment des Kräftepaares hat.

Das Drehmoment des Kräftepaares beträgt

$$M = F \cdot a_1$$

Hinweis:

$|F_1| = |F_2| = F$ $|F_1|$ bedeutet absoluter Betrag der Kraft F_1 ohne Berücksichtigung des Vorzeichens.

Beispiel

Kräftepaar $F = 40 \text{ kN}$

Hebelarm $a_1 = 3 \text{ m}$ folgt

Drehmoment des Kräftepaares $M = 40 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 120 \text{ kNm}$

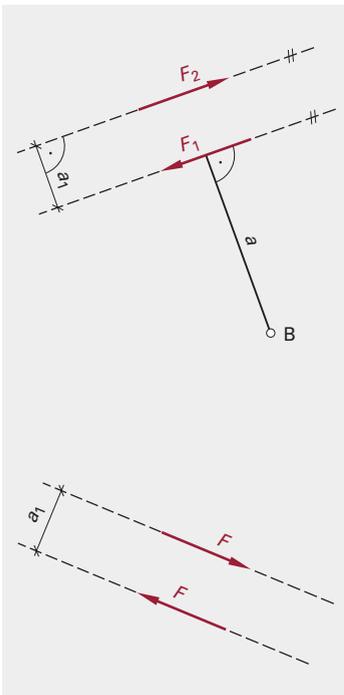


Abb. 18.2

■ **Drehmoment mehrerer Kräfte um Pol B** (Abb. 19.1)

$$M_B = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4$$

\overleftrightarrow{M}_B (sprich Drehmoment um Pol B rechtsdrehend im Uhrzeigersinn positiv)

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{M}_B &= + 25 \text{ kN} \cdot 1,40 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 2,45 \text{ m} + \\ &+ 15 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot 1,90 \text{ m} \\ &= + 35 \text{ kNm} - 49 \text{ kNm} + 15 \text{ kNm} - 57 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\overleftrightarrow{M}_B = - 56 \text{ kNm}$$

negatives Vorzeichen bedeutet, dass sich die angesetzte Drehrichtung $\overleftrightarrow{}$ für das Moment M_B umdreht. Demnach dreht das Moment M_B links gegen den Uhrzeigersinn ($\overleftarrow{}$) um B.

Da die Resultierende R aus den Einzelkräften F_1, F_2, F_3, F_4 die gleiche Wirkung aufweist wie die Kräfte F_1, F_2, F_3, F_4 (vgl. Abschnitt 1.3.1), folgt für das Drehmoment um Pol B

$$M_B = R \cdot a_R \text{ mit}$$

$$M_B = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4$$

R Resultierende Kraft aus F_1, F_2, F_3, F_4

a_R Abstand der Wirkungslinie der Resultierenden R von Pol B

ergibt

$$a_R = \frac{M_B}{R} = \frac{F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4}{R}$$

Beispiel grafische Ermittlung der Resultierenden im Kräfteplan

Kräftemaßstab: 10 kN \cong 0,75 cm

Längenmaßstab: 1 m \cong 1 cm (M 1:100)

ergibt: $R = 25 \text{ kN}$ (gemessen: 2,5 cm)

$$\text{folgt } a_R = - \frac{56 \text{ kNm}}{25 \text{ kN}} = - 2,24 \text{ m}$$

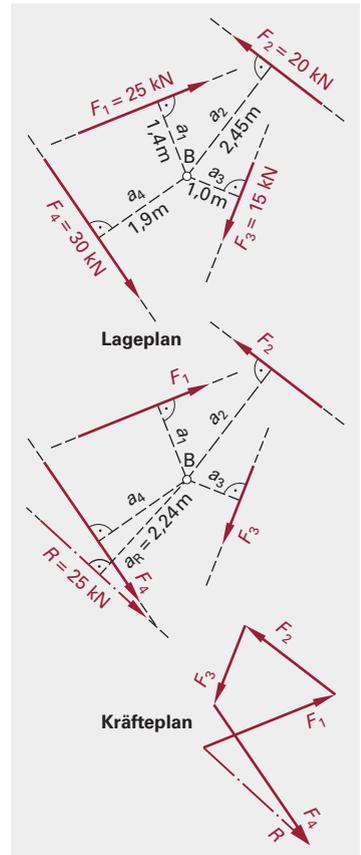


Abb. 19.1

■ **Seileck und Poleck**

Mittels Seileck (im Lageplan) und Poleck (im Kräfteplan) werden beliebige Kräfte in der Ebene grafisch zusammengesetzt.

Verfahren I (siehe Abb. 19.2)

Das Verfahren wird zunächst anhand zweier beliebiger Kräfte F_1, F_2 in einer Ebene wirkend gezeigt.

Die beiden Kräfte F_1, F_2 werden zusammengesetzt mithilfe zweier Zusatzkräfte S_1, S_2 , die auf der gleichen Wirkungslinie liegen, gleiche Größe haben, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Die beiden Zusatzkräfte S_1, S_2 heben sich in ihrer Wirkung auf und haben demnach keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Zunächst werden im Kräfteplan die Teilresultierende R_1 (aus F_1 und S_1) und die Teilresultierende R_2 (aus F_2 und S_2) gebildet.

Im Lageplan führt die Teilresultierende R_1 durch den Punkt A (Schnittpunkt von Wirkungslinie F_1 mit Wirkungslinie S_1), die Teilresultierende R_2 durch

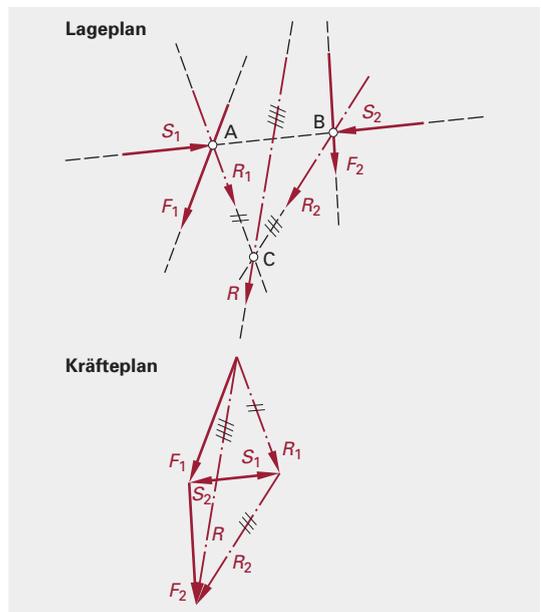


Abb. 19.2

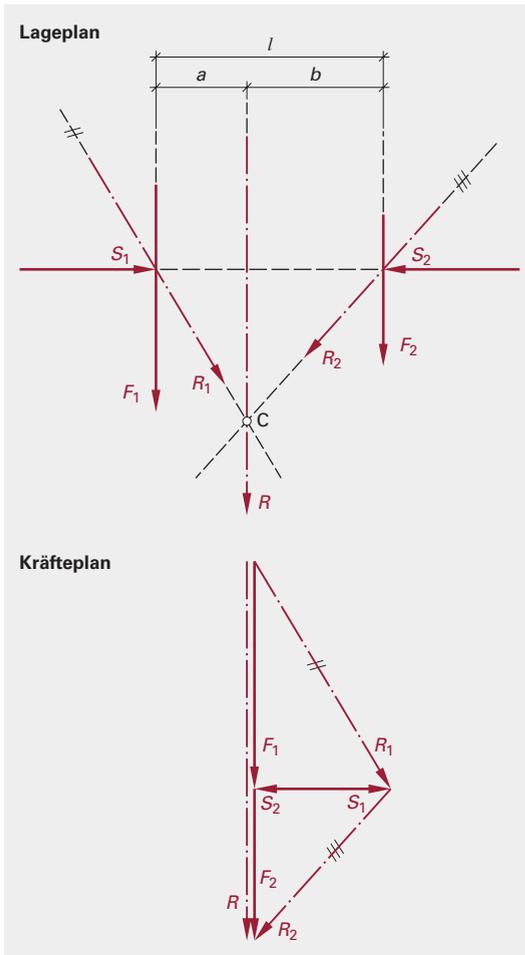


Abb. 20.1

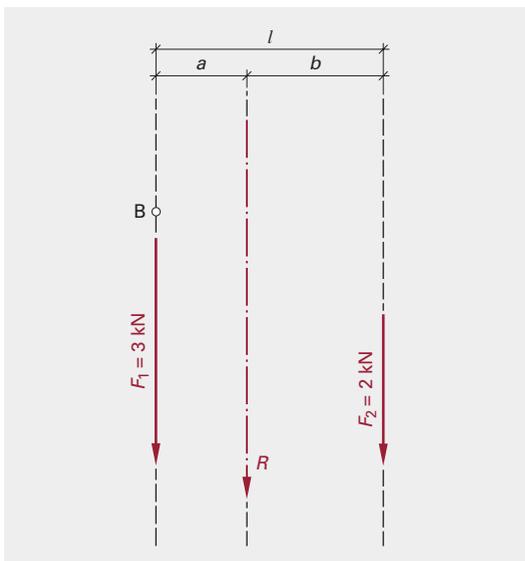


Abb. 20.2

den Punkt B (Schnittpunkt von Wirkungslinie F_2 mit Wirkungslinie S_2).

Dabei ergeben sich die Wirkungslinien von R_1 und R_2 jeweils durch Parallelverschiebung der Kräfte R_1 und R_2 aus dem Kräfteplan.

Durch den Schnittpunkt C der Wirkungslinien von R_1 und R_2 führt die Resultierende R , deren Wirkungslinie sich durch Parallelverschiebung aus dem Kräfteplan ergibt.

Beispiel

Zwei parallele Kräfte F_1 und F_2 werden zusammengesetzt (siehe Abb. 20.1).

Grafische Lösung

Mittels der beiden Zusatzkräfte S_1, S_2 auf beliebiger gleicher Wirkungslinie, jeweils gleicher Größe, entgegengesetzt gerichtet, erfolgt die Bildung der Teilresultierenden R_1, R_2 und der Resultierenden R im Kräfteplan.

Der Schnittpunkt C der Wirkungslinien R_1 und R_2 im Lageplan gibt die Lage der Resultierenden R .

In Zahlenwerten:

gegeben: $F_1 = 3 \text{ kN}$; $F_2 = 2 \text{ kN}$

Abstand der parallelen Wirkungslinien von F_1 zu F_2 beträgt $l = 3,0 \text{ m}$

Resultierende R :

$$R = F_1 + F_2$$

$$R = 3 \text{ kN} + 2 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$$

gemessen: $a = 1,2 \text{ m} \cong 1,2 \text{ m}$

$$b = 1,8 \text{ m} \cong 1,8 \text{ m}$$

Rechnerische Lösung (siehe Abb. 20.2)

Die Einzelkräfte F_1, F_2 erzeugen die gleiche Wirkung wie die Resultierende R (vgl. Abschnitt 1.3.1).

Wahl eines beliebigen Drehpols B; zweckmäßige Wahl auf Wirkungslinie von F_1 bzw. Wirkungslinie von F_2 .

Drehmoment um Drehpol B

$$\overset{\curvearrowright}{M}_B = R \cdot a = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot l$$

mit $R = F_1 + F_2$ folgt $(F_1 + F_2) \cdot a = F_2 \cdot l$

Lage der Resultierenden R mit $a = \frac{F_2 \cdot l}{F_1 + F_2}$

In Zahlenwerten:

$F_1 = 3 \text{ kN}$; $F_2 = 2 \text{ kN}$; $l = 3,0 \text{ m}$ folgt

$$R = F_1 + F_2 = 3 \text{ kN} + 2 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$$

$$a = \frac{2 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m}}{5 \text{ kN}} = 1,2 \text{ m}$$