

Formeln Mechatronik

nach den Büchern „Tabellenbuch Mechatronik“, „Fachkunde Mechatronik“, „Rechnen und Projektieren Mechatronik“

8. Auflage

Autoren von „Formeln Mechatronik“:

Gregor Häberle	Dr.-Ing.	Tettngang
Konstantin Häberle	MSc EEIT, MSc Math	Zürich
Verena Häberle	MSc EEIT	Zürich
Bernd Schiemann	Dipl.-Ing.	Durbach
Claudius Scholer	Dipl.-Ing., Dipl.-Gewerbelehrer	Metzingen
Matthias Schultheiß	Dipl.-Ing., Dipl.-Gewerbelehrer	Ummendorf, Biberach a. d. Riss

Leitung des Arbeitskreises: Dr.-Ing. Gregor Häberle

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Vorwort

Diese Formelsammlung dient zum Lösen von fachmathematischen Aufgaben in der beruflichen Praxis oder in der Aus- und Weiterbildung, z. B. bei Prüfungen oder Klausuren. Sie enthält komprimiert die dafür erforderlichen Formeln aus den Teilbereichen der Elektrotechnik, des Maschinenbaus und der Informationstechnik.

Dabei sind berücksichtigt alle wesentlichen Formeln z. B. der Themengebiete Mathematik, technische Physik, Produktion, Messen, Steuern, Regeln, elektrische Antriebe, Leitungsberechnungen, Schutzeinrichtungen, Digitaltechnik, Datentechnik, statistische Berechnungen, betriebswirtschaftliche Kalkulationen.

Die Formeln sind auf den Seiten nummeriert, sodass bei Gruppenarbeit oder im Unterricht eine Verständigung vereinfacht ist. Die Formelzeichenerklärungen sind auf jeder Seite gegeben. Die zu verwendenden Einheiten sind durch Einheitengleichungen angegeben.

In der **8. Auflage** wurden weitere **Formelumstellungen** vorgenommen. Somit ist ein leichteres Anwenden der Formeln möglich. Auch können selbst umgestellte Formeln dadurch leicht überprüft werden. **Neu** aufgenommen wurden Pendel- und Drehschwingungen, Arbeitspunkteinstellungen, Filter, Beleuchtung und Wartungsfaktoren, Stromgefährdungen, schrägverzahnte Stirnräder, Reglereinstellungen, Reglerauswahl, Hauptnutzungszeiten.

Verbesserungsvorschläge können gerne per E-Mail gerichtet sein an lektorat@europa-lehrmittel.de.

Sommer 2025

Die Autoren

Europa-Nr.: 45515
ISBN 978-3-7585-4223-7

8. Auflage 2025
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

Bei Fragen zur Produktsicherheit wenden Sie sich bitte an produktsicherheit@europa-lehrmittel.de.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2025 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, Düsseldorf Straße 23, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Ertstadt
Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagfoto: Siemens-Pressebilder www.siemens.com/presse
Druck: Plump Druck & Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Rechenregeln 1

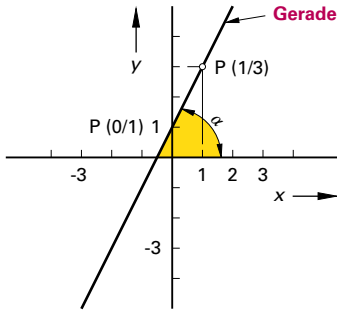
Vorzeichenregeln	(Fortsetzung Regeln der Bruchrechnung)	(Fortsetzung Regeln d. Klammerrechnung)
<p>Positives Produkt</p> $a \cdot b = a \cdot b = b \cdot a = ab = ba$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab = ba$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(+) \cdot (+) = (+)$ 1 </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(-) \cdot (-) = (+)$ 2 </div> <p>Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen besitzen. Der Multiplikationspunkt vor Buchstaben darf entfallen, nicht aber vor Zahlen.</p>	<p>Addition, Subtraktion ungleichnamiger Brüche</p> $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{xb + ya}{ab}$ <p>Hauptnenner: ab</p> <p>Der Hauptnenner muss gebildet werden. Durch Erweitern der Brüche werden diese auf den Hauptnenner gebracht. Anschließend kann addiert bzw. subtrahiert werden.</p>	<p>Multiplizieren von Klammerausdrücken</p> $(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ 8 </div> <p>Jedes Glied der Klammer wird mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert.</p>
<p>Negatives Produkt</p> $a \cdot (-b) = -a \cdot b = -ab$ $(-a) \cdot b = -a \cdot b = -ab$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(+) \cdot (-) = (-)$ 3 </div> <p>Das Produkt ist negativ, wenn beide Faktoren ungleiche Vorzeichen besitzen. Der Multiplikationspunkt vor Buchstaben darf entfallen, nicht aber vor Zahlen.</p>	<p>Multiplikation von Brüchen</p> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} = \frac{xy}{ab}$ 7 </div> <p>Zähler und Nenner werden jeweils getrennt multipliziert.</p>	<p>Quadrieren von Klammerausdrücken</p> $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$ $= a^2 + ab + ab + b^2$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 9 </div> $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$ $= a^2 - ab - ab + b^2$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 10 </div> <p>Beim Quadrieren von Klammerausdrücken ist auf die richtige Berechnung der Zeichen Plus und Minus zu achten (siehe Vorzeichenregeln).</p>
<p>Positiver Quotient</p> $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(+) : (+) = (+)$ 4 </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(-) : (-) = (+)$ 5 </div> <p>Der Quotient ist positiv, wenn Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) gleiche Vorzeichen besitzen.</p>	<p>Division von Brüchen</p> $\frac{x}{a} : \frac{y}{b} = \frac{x/a}{y/b} = \frac{x \cdot b}{a \cdot y}$ <p>Der Dividend $\frac{x}{a}$ wird mit dem Kehrwert des Divisors $\frac{y}{b}$ multipliziert.</p>	<p>Dividieren eines Klammerausdrucks</p> $(a + b) : c = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $\frac{a - b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ <p>Jedes Glied der Klammer wird durch den Divisor dividiert.</p>
<p>Negativer Quotient</p> $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ <div style="border: 1px solid red; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $(+) : (-) = (-)$ 6 </div> <p>Der Quotient ist negativ, wenn Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) ungleiche Vorzeichen besitzen.</p>	<p>Kürzen, Erweitern von Brüchen</p> $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ <p>Der Wert eines Bruchs bleibt unverändert, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.</p>	<p>Klammerauflösung, Punktrechnung, Strichrechnung</p> $a \cdot (2x - x) + b \cdot (5y + 2y)$ $= ax + b \cdot 7y = ax + 7by$ <p>Die Klammerauflösung ist vor der Punktrechnung, diese wiederum vor der Strichrechnung auszuführen.</p>
<p>Punktrechnungen, Strichrechnungen</p> $2a \cdot b - 4c \cdot 2d = 2ab - 8cd$ <p>Punktrechnungen (\cdot und $:$) müssen vor Strichrechnungen ($+$ und $-$) ausgeführt werden.</p>	<p>Regeln der Klammerrechnung</p> <p>Pluszeichen vor Klammer</p> $a + (b - c) = a + b - c$ <p>Ein Pluszeichen vor einer Klammer erlaubt das Weglassen der Klammer.</p>	<p>Regeln beim Potenzieren</p> <p>Multiplizieren von Potenzen gleicher Basis</p> $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ $a^2 \cdot a^3 = a^{(2+3)} = a^5$ <p>Die Exponenten werden addiert.</p>
<p>Regeln der Bruchrechnung</p> <p>Addition, Subtraktion gleichnamiger Brüche</p> $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = \frac{x + y - z}{a}$ <p>Bei gleichnamigen Brüchen werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert.</p>	<p>Minuszeichen vor Klammer</p> $a - (b - c) = a - b + c$ <p>Ein Minuszeichen vor einer Klammer bewirkt, dass bei Weglassen der Klammer aus Pluszeichen in der Klammer Minuszeichen und aus Minuszeichen Pluszeichen werden.</p>	<p>Dividieren von Potenzen gleicher Basis</p> $\frac{a^4}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^2$ $a^4 : a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{(4-2)} = a^2$ <p>Die Exponenten werden subtrahiert.</p>
Siehe auch Umschlagseite am Buchende		(Fortsetzung nächste Seite)

Rechenregeln 2		
(Fortsetzung Regeln beim Potenzieren)	(Fortsetzung Regeln beim Radizieren)	(Fortsetzung Regeln beim Umformen von Gleichungen)
Multiplizieren von Potenzen mit einem Faktor $a \cdot 10^3 = a \cdot 1000 = 1000 a$ $a \cdot 10^{-2} = a \cdot \frac{1}{100} = 0,01 a$ Zuerst muss die Potenz berechnet werden, dann erfolgt die Multiplikation mit dem Faktor.	Multiplizieren. Dividieren von Wurzeln $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad 3$ $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad 4$ Das Produkt bzw. der Quotient der Radikanden wird radiziert, wenn die Radikanden den gleichen Wurzelexponent besitzen.	Zusätzliches Multiplizieren auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{x}{a} = b$ $\frac{x \cdot a}{a} = b \cdot a$ $x = b \cdot a$ Durch Multiplizieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.
Potenz mit Exponent Null $a^0 = 1 \quad 1$ $(x + y)^0 = 1$ $3^0 = 1; e^0 = 1$ Jede Potenz mit dem Exponent Null besitzt den Wert 1.	Radizieren einer Wurzel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad 5$ Die Exponenten der Wurzeln können zum Radizieren multipliziert werden.	Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung $x = a + b$ $x^2 = (a + b)^2$ $x^2 = a^2 + 2 ab + b^2$ Durch gleiches Potenzieren auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.
Potenzieren einer Potenz $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ Die Exponenten werden bei gleicher Basis multipliziert.	Radizieren einer Potenz $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \quad 6$ Der Exponent der Potenz wird durch den Wurzelexponent dividiert.	Radizieren auf beiden Seiten der Gleichung $x^2 = a + b$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{a + b}$ $x = \pm \sqrt{a + b}$
Regeln beim Radizieren (Wurzelziehen)	Regeln beim Umformen von Gleichungen	
Radikand als Produkt $\sqrt[4]{a \cdot b} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$ Die Wurzel kann aus jedem Faktor oder aus dem Produkt gezogen werden.	Zusätzliches Addieren auf beiden Seiten der Gleichung $x - a = c$ $x - a + a = c + a$ $x = c + a$ Durch Addieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.	Durch gleiches Radizieren auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.
Radikand als Summe, Differenz $\sqrt{a - b} = \sqrt{a - b}$ Es kann nur aus dem Ergebnis einer Summe oder Differenz die Wurzel gezogen werden, solange der Radikand > 0 .	Zusätzliches Subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung $x + b = c$ $x + b - b = c - b$ $x = c - b$ Durch Subtrahieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.	Regeln beim Umgang mit Ungleichungen
Potenzschreibweise $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad 2$ Eine Wurzel kann auch als Potenz geschrieben werden.		Seitentausch $a > b + c$ $\Rightarrow b + c < a$ Multiplikation mit (-1) $(b + c) < a$ $\Rightarrow (b + c) \cdot (-1) > a \cdot (-1)$ Kehrwertbildung $a > b + c$ $\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b + c}$
Addieren, Subtrahieren von Wurzeln $a \cdot \sqrt[3]{x} + b \cdot \sqrt[3]{x} = (a + b) \cdot \sqrt[3]{x}$ $a \cdot \sqrt[4]{x} - b \cdot \sqrt[4]{x} = (a - b) \cdot \sqrt[4]{x}$ Die Wurzeln können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie die gleiche Basis und den gleichen Exponent besitzen.	Zusätzliches Dividieren auf beiden Seiten der Gleichung $a \cdot x = c$ $\frac{a \cdot x}{a} = \frac{c}{a}$ $x = \frac{c}{a}$ Durch Dividieren der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung bleibt die Gleichung erhalten.	Kehrwertbildung und Multiplikation mit (-1) $a > b$ $c < d$ $\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $\Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{d}$ $\Rightarrow -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$ $\Rightarrow -\frac{1}{c} < -\frac{1}{d}$ Durch Vertauschen, Multiplizieren mit (-1) oder Kehrwertbildung der Seiten einer Ungleichung wird $>$ zu $<$ und $<$ zu $>$.

Funktionen

Linear-affine Funktion

Jedem x -Wert ist genau ein Funktionswert $y = f(x)$ zugeordnet.
 $y = f(x) = mx + c$



$y = f(x) = 2x + 1$

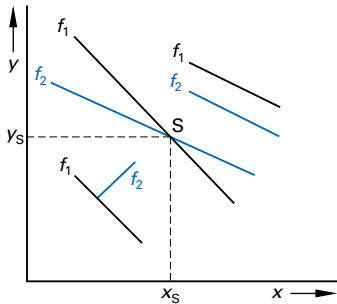
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2$

$c = y_1 - m \cdot x_1 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$c = y_2 - m \cdot x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$

bei gegebenem Winkel α :
 $m = \tan \alpha$

Zwei Geraden



$y_1 = f_1(x) = m_1x + c_1$

$y_2 = f_2(x) = m_2x + c_2$

Parallele Geraden:

$m_1 = m_2 \quad c_1 \neq c_2$

Senkrechte Geraden:

$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad c_1, c_2 \text{ beliebig}$

Schnittpunkt $S(x_S, y_S)$:

$x_S = \frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1} \quad m_1 \neq m_2$

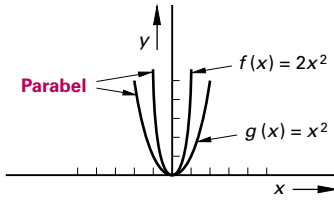
$y_S = m_1 \cdot x_S + c_1$

$y_S = m_2 \cdot x_S + c_2$

(Fortsetzung Regeln Funktionen)

Quadratische Funktion

Ein Funktionswert $y = f(x)$ kann an 2 verschiedenen Stellen x auftreten.
 $y = f(x) = ax^2$ (Parabel)



$y = f(x) = 2x^2$ und $y = g(x) = x^2$

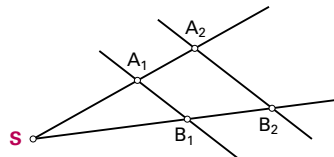
Strahlensätze

1. Strahlensatz

Schneiden parallele Geraden zwei von einem Schnittpunkt S ausgehende Strahlen, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2}$

$\frac{SA_1}{A_1A_2} = \frac{SB_1}{B_1B_2}$



2. Strahlensatz

Schneiden parallele Geraden zwei von einem Schnittpunkt S ausgehende Strahlen, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Schnittpunkt S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl.

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{SA_1}{SA_2}$

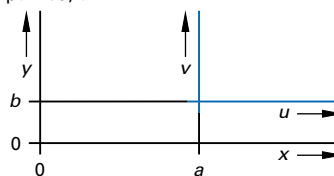
$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{SB_1}{SB_2}$

Koordinatensysteme

Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems

Altes Koordinatensystem: x, y mit Nullpunkt $0,0$

neues Koordinatensystem: u, v mit Nullpunkt a, b



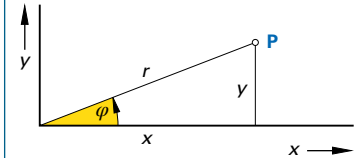
$x = u + a$ und $y = v + b$
 $u = x - a$ und $v = y - b$

(Fortsetzung Regeln Koordinatensysteme)

Kartesische Koordinaten $x, y \rightarrow$ Polarkoordinaten r, φ

Im Polarkoordinatensystem ist jeder Punkt P in einer Ebene durch einen Winkel φ und einen Abstand r definiert.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$



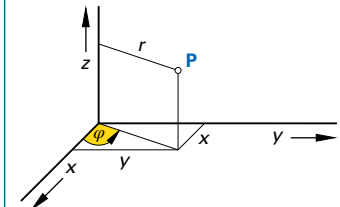
Polarkoordinaten \rightarrow Kartesische Koordinaten

$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi$

Kartesische Koordinaten $x, y, z \rightarrow$ Zylinderkoordinaten r, φ, z

Ein Punkt P im Raum wird bei der Darstellung mittels Zylinderkoordinaten durch die beiden Abstandskordinaten r und z sowie den Winkel φ beschrieben.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}; \quad z = z$



Zylinderkoordinaten $r, \varphi, z \rightarrow$ Kartesische Koordinaten x, y, z

$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi; \quad z = z$

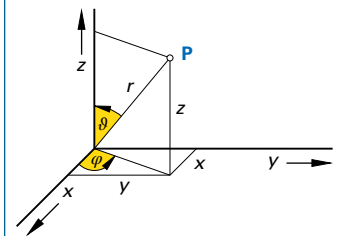
Kartesische Koordinaten \rightarrow Kugelkoordinaten

Ein Punkt P im Raum wird bei der Darstellung mittels Kugelkoordinaten durch eine Abstandskordinate r und zwei Winkelkoordinaten ϑ, φ beschrieben.

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ für $x > 0$

$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$



Kugelkoordinaten \rightarrow Kartesische Koordinaten

$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi; \quad z = r \cdot \cos \vartheta$

Mit einer Unbekannten

Lineare Gleichung

$$ax + b = 0$$

$$\Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

a, b sind Konstanten, wobei $a \neq 0$.

Es gibt für x einen Ergebniswert.

Quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Es kann 2 Lösungen für x geben.

Mit zwei Unbekannten

Lineares Gleichungssystem 2. Grades

$$ax + by = c \quad \text{und}$$

$$dx + ey = f$$

1. Lösung mit *Gleichsetzungsmethode*, d.h. beide Gleichungen nach z.B. $y = \dots$ auflösen, dann gleichsetzen und nach $x = \dots$ auflösen. Den ermittelten x -Wert dann in eine der beiden Gleichungen $y = \dots$ einsetzen.

Beispiel Gleichsetzungsmethode:

$$3x + 2y = 4 \quad \text{und}$$

$$-2x + 3y = 1$$

Auflösen nach x :

$$x = (4 - 2y)/3$$

$$x = (3y - 1)/2$$

Gleichsetzen der Gleichungen:

$$(4 - 2y)/3 = (3y - 1)/2$$

$$-2y/3 - 3y/2 = -1/2 - 4/3$$

$$2y/3 + 3y/2 = 1/2 + 4/3$$

$$(4y + 9y)/6 = (3 + 8)/6$$

$$13y = 11 \Rightarrow y = 11/13 = 0,85$$

Einsetzen von y in eine Gleichung:

$$x = (4 - 2 \cdot 11/13)/3 = 0,77$$

2. Lösung mit *Additionsmethode*, d.h. beide Gleichungen werden addiert. Zuvor wird jede Gleichung mit einem Faktor so multipliziert, dass x oder y den gleichen Koeffizienten aufweisen, sodass durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen eine Variable entfällt.

Beispiel Additionsmethode:

$$3x + 2y = 4 \quad \text{und}$$

$$-2x + 3y = 1$$

Durch Multiplikation mit 2 bzw. 3 erhält man in beiden Gleichungen $6x$.

$$6x + 4y = 8$$

$$-6x + 9y = 3$$

$$0 + 13y = 11 \Rightarrow y = 11/13$$

$$\Rightarrow x = (8 - 4 \cdot 11/13)/6 = 0,77$$

$$y = 0,85$$

(Fortsetzung)

Determinantenverfahren für lineares Gleichungssystem 2. Grades

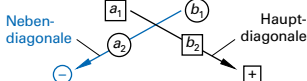
$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Determinante erstellen:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Merkhilfe für Determinanten-Berechnung



Von den Produkttermen der Hauptdiagonalen werden die Produktterme der Nebendiagonalen subtrahiert.

Determinante berechnen:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

x -Determinante berechnen:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2$$

y -Determinante berechnen:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$$

x berechnen:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{für } D <> 0$$

y berechnen:

$$y = \frac{D_y}{D} \quad \text{für } D <> 0$$

Beispiel:

$$3x + 2y = 4$$

$$-2x + 3y = 1$$

Determinante berechnen:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 13$$

x -Determinante berechnen:

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 10$$

y -Determinante berechnen:

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 11$$

x berechnen:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{13} = 0,77$$

y berechnen:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{13} = 0,85$$

Alle drei Verfahren führen zu gleichen Ergebnissen.

Mit drei Unbekannten

Determinantenverfahren für lineares Gleichungssystem 3. Grades

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

Determinante erstellen:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante berechnen

\Rightarrow Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (c_1 b_2 a_3 + a_1 c_2 b_3 + b_1 a_2 c_3)$$

x -Determinante erstellen:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

x -Determinante berechnen

\Rightarrow Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - (c_1 b_2 d_3 + d_1 c_2 b_3 + b_1 d_2 c_3)$$

y -Determinante erstellen, berechnen

\Rightarrow Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_3 - (c_1 d_2 a_3 + a_1 c_2 d_3 + d_1 a_2 c_3)$$

z -Determinante erstellen, berechnen

\Rightarrow Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen:

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - (d_1 b_2 a_3 + a_1 d_2 b_3 + b_1 a_2 d_3)$$

x, y, z berechnen für $D <> 0$:

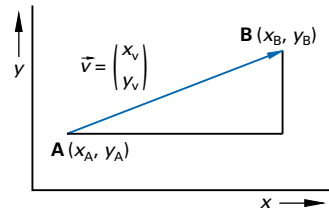
$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

x, y, z Unbekannte; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ Koeffizienten von x, y, z ; c_1, c_2, c_3 rechte Seiten der Gleichungen; d_1, d_2, d_3 rechte Seiten der Gleichungen; c_1, c_2, c_3 Koeffizienten von z in rechter Spalte

Zweidimensional



Vektoren haben einen Betrag und eine Richtung. Der Betrag entspricht der Länge des Vektors. Vektoren werden durch Buchstaben und einen Pfeil dargestellt:

Vektor \vec{v} mit Betrag v (Länge) (für $v > 0$)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}, |\vec{v}| = v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

Vektor zwischen Punkten A und B:

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit Zahl c :

$$c \cdot \vec{v} = c \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

Skalares Produkt von Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Wenn \vec{a} senkrecht zu \vec{b} : $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Wenn \vec{a} parallel zu \vec{b} : $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b$

Allgemein: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$

φ ist der Winkel zwischen den zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a \cdot b}$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

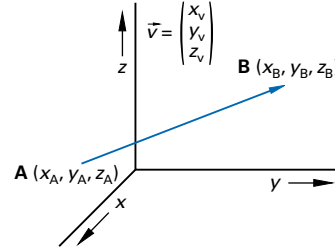
$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$c(\vec{a} \circ \vec{b}) = (c \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (c \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{d}$$

Dreidimensional



Vektor \vec{v} mit Betrag v (Länge) (für $v > 0$)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, |\vec{v}| = v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

Vektor zwischen Punkten A und B:

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) \Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit Zahl c :

$$c \cdot \vec{v} = c \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \\ c \cdot z_v \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

Skalares Produkt von Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Wenn \vec{a} senkrecht zu \vec{b} : $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Wenn \vec{a} parallel zu \vec{b} : $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b$

Allgemein: $\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$

φ ist der Winkel zwischen den zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Berechnung wie im zweidimensionalen Fall.

Rechenregeln: wie bei zweidimensional.

Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Das Kreuzprodukt ist die Verknüpfung zweier Vektoren, dessen Ergebnis wieder ein Vektor ist, der senkrecht auf den beiden Vektoren steht.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a \\ x_b \cdot z_a - x_a \cdot z_b \\ x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a \end{pmatrix}$$

Allgemein: $\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin \varphi$

(Fortsetzung)

Rechenregeln für Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{d}$$

Wenn \vec{a} parallel zu \vec{b} : $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

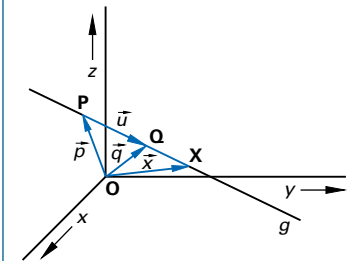
Wenn \vec{a} senkrecht zu \vec{b} : $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} :

Berechnung des $\cos \varphi$ wie im zweidimensionalen Fall.

Vektorgleichung einer Geraden im Raum:

Der Ortsvektor \vec{x} geht zu einem beliebigen Punkt auf der Gerade g .



$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$

\vec{p} Stützvektor; \vec{u} Richtungsvektor;

\vec{q} Vektor Punkt O zu Punkt Q

r Parameter, der \vec{u} verlängert, verkürzt oder seine Richtung ändert, damit jeder Geradenpunkt X mit \vec{x} beschrieben werden kann.

O Koordinatenursprung

P Stützpunkt, Aufpunkt auf Gerade

Q gegebener Punkt auf Gerade

X beliebiger Punkt auf Gerade

Beispiel:

Eine Gerade geht durch die Punkte P (2,4,3) und Q (-3,0,2).

a) Wie lautet die Vektorgleichung der Geraden?

b) Welchen Punkt A erhält man, wenn $r=2$ gewählt wird?

Lösung:

a)

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3-2 \\ 0-4 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o Operator für skalare Multiplikation; x Operator für Kreuzprodukt

Differenzialrechnung (Ableitung)

Integralrechnung

Funktion	1. Ableitung	Zu integrierende Funktion	Integrierte Funktion
$f(x) = a$ (Konstante)	$f'(x) = 0$	Nachfolgend gilt: $X = ax + b$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\int X^n dx$	$X^{n+1}/(n+1)$ für $n < -1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$\int dx/X$	$1/a \cdot \ln X$ auch für $a = -1$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$	$\int x \cdot X^n dx$	$X^{n+2}/(a^2(n+2)) - X^{n+1}/(a^2(n+1))$
$f(x) = 1/x^n$	$f'(x) = -n/x^{n+1}$	$\int x dx/X$	$x/a - b/a^2 \cdot \ln X$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = 1/(2 \cdot \sqrt{x})$	$\int x dx/X^2$	$b/(a^2 \cdot X) + 1/a^2 \cdot \ln X$
$f(x) = x \sqrt{x}$	$f'(x) = 3/2 \sqrt{x}$	$\int x^2 dx/X^2$	$(X - 2b \cdot \ln X - b^2/X)/a^3$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = 1/(n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}})$	$\int dx/(x \cdot X)$	$-1/b \cdot \ln (X/a)$
$f(x) = 1/\sqrt{x}$	$f'(x) = -1/(2 \cdot x \sqrt{x})$	$\int dx/(x \cdot X^2)$	$-1/b^2 \cdot (\ln (X/a) - b/X)$
$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$	Nachfolgend gilt: $X = a^2 + x^2$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\int dx/X$	$1/a \cdot \arctan (x/a)$
$f(x) = \sin ax$	$f'(x) = a \cdot \sin (ax + \pi/2)$	$\int x dx/X$	$\pm 1/2 \cdot \ln X$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\int dx/X^2$	$x/(2a^2 \cdot X) + 1/(2a^3) \cdot \arctan (x/a)$
$f(x) = \cos ax$	$f'(x) = a \cdot \cos (ax + \pi/2)$	Integrale mit Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens	
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$	$\int \sin ax dx$	$-1/a \cdot \cos ax$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -1/\sin^2 x$	$\int \sin^2 ax dx$	$x/2 - 1/(4a) \cdot \sin 2ax$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$	$\int x \cdot \sin ax dx$	$(\sin ax)/a^2 - (x \cdot \cos ax)/a$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$	$\int x^2 \sin ax dx$	$(2x \cdot \sin ax)/a^2 - (x^2/a - 2/a^3) \cdot \cos ax$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = 1/(1+x^2)$	$\int \cos ax dx$	$1/a \cdot \sin ax$
$f(x) = \text{arc cot } x$	$f'(x) = -1/(1+x^2)$	$\int \cos^2 ax dx$	$x/2 + 1/(4a) \cdot \sin 2ax$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\int x \cdot \cos ax dx$	$(\cos ax)/a^2 + (x \cdot \sin ax)/a$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\int x^2 \cos ax dx$	$(2x \cdot \cos ax)/a^2 + (x^2/a - 2/a^3) \cdot \sin ax$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$	$\int \sin ax \cos ax dx$	$1/(2a) \cdot \sin^2 ax$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = 1/(x \cdot \ln a)$	$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx$	$x/8 - (\sin 4ax)/(32a)$
Ableitungsregeln		$\int \tan ax dx$	$-1/a \cdot \ln \cos ax$
Faktorregel:		$\int \tan^2 ax dx$	$(\tan ax)/a - x$
$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$	$\int \cot ax dx$	$1/a \cdot \ln \sin ax$
Summenregel:		$\int \cot^2 ax dx$	$(-\cot ax)/a - x$
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	Integrale mit e-Funktion, Logarithmus	
Produktregel:		$\int e^{ax} dx$	$1/a \cdot e^{ax}$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$\int x \cdot e^{ax} dx$	$e^{ax}/a^2 \cdot (ax - 1)$
Quotientenregel:		$\int x^2 \cdot e^{ax} dx$	$e^{ax} (x^2/a - 2x/a^2 + 2/a^3)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$	$\int \ln x dx$	$x \ln x - x$
Kettenregel:		$\int (\ln x)^2 dx$	$x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
$f(x) = g(u(x))$	$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ äußere Ableitung innere Ableitung	Anmerkungen:	
Beispiel 1 zu Kettenregel:		Das Integrieren ist die Umkehrung vom Differenzieren. Wird die integrierte Funktion abgeleitet, so erhält man die zu integrierende Funktion.	
$f(x) = (3x-5)^4$	$f'(x) = 4 \cdot (3x-5)^3 \cdot 3 = 12 \cdot (3x-5)^3$	Das angewendete Divisionszeichen „/“ erfordert das Beachten von Klammer-Ausdrücken und entspricht dem Divisionszeichen Bruchstrich:	
$u(x) = 3x-5$	$u'(x) = 3$	$a - b/c + (a-b)/c - cd/(e-f) \cdot g - h/i \cdot \sin ax =$	
$g(u) = u^4$	$g'(u) = 4 \cdot u^3$	$a - \frac{b}{c} + \frac{a-b}{c} - \frac{cdg}{e-f} - \frac{h \cdot \sin ax}{i}$	
Beispiel 2 zu Kettenregel:			
$f(x) = e^{(2x-4)}$	$f'(x) = e^{(2x-4)} \cdot 2 = 2 \cdot e^{(2x-4)}$		
$u(x) = 2x-4$	$u'(x) = 2$		
$g(u) = e^u$	$g'(u) = e^u$		

Rechnen mit Excel

Grundrechenarten	Erweiterte Rechenarten	Rundungsfunktionen
<p>Addition +, Subtraktion -, Multiplikation *, Division / Bei einer Rechenanweisung muss eine Zelle mit = beginnen. = Operand 1 Operator Operand 2</p> <p>Beispiele: Zelleninhalte A1=5, B3=2, C3=3 Zahlen Zellen Klammern =5*3 =A1-B3 =5*(A1-B3)*C3</p> <p>Ergebnisse: 15 3 5</p>	<p>Potenzrechnung Berechnen einer potenzierten Zahl. =POTENZ(Zelle a Wert Basis; Zelle b Exponent)</p> <p>Beispiel: Zelleninhalte A1=2, B1=3 =POTENZ(A1;B1) Ergebnis: 8</p>	<p>Runden Eine Zahl wird auf eine angegebene Anzahl Dezimalstellen gerundet. =RUNDEN (Zelle a Zahl; Zelle b Anzahl Stellen)</p> <p>Beispiel: Zelleninhalte A1=1,195; B1=1 =RUNDEN(A1;B1) Ergebnis: 1,2</p>
<p>Summenbildung • Berechnen der Summe der Zelleninhalte von Zelle 1 bis Zelle n. =SUMME(Zelle 1:Zelle n)</p> <p>Beispiel: Zelleninhalt jeweils 1 in A1 bis A10 =SUMME(A1:A10) Ergebnis: 10</p> <p>• Berechnen der Summe von Zahlen und/oder Zelleninhalten. =SUMME(Zelle a; Zelle b; Zelle c; ...)</p>	<p>Wurzelberechnung (Radizieren) Berechnen einer Quadratwurzel einer Zahl oder Zahl einer Zelle. =WURZEL(Zelle)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zelle A1=4 =WURZEL(A1) Ergebnis: 2</p>	<p>Ab abrunden Eine Zahl wird immer abgerundet. =ABRUNDEN(Zelle a Zahl; Zelle b Anzahl Stellen)</p> <p>Au aufrunden Eine Zahl wird immer aufgerundet. =AUFRUNDEN(Zelle a Zahl; Zelle b Anzahl Stellen)</p>
<p>Summe Wenn ... Addieren von Zahlen eines Bereichs, die einer Bedingung entsprechen, z.B. Addieren aller Zahlen > 5. =SUMMEWENN(Zelle 1:Zelle n; "Bedingung")</p> <p>Beispiel: Zelleninhalt jeweils 1 in A1 bis A8, A9=5, A10=6 =SUMMEWENN(A1:A10;">=5") Ergebnis: 11</p>	<p>Logarithmusberechnung Berechnen des Logarithmuswertes einer Zahl oder Zahl einer Zelle zu einer Basis. =Log(Zelle a; Zelle b Wert Basis)</p> <p>Beispiel: Zelleninhalte A1=100, B1=10 =LOG(A1;B1) Ergebnis: 2</p> <p>Zehnerlogarithmus (Basis10) =LOG10(Zelle)</p> <p>Natürlicher Logarithmus (Basis e=2,718) =LN(Zelle)</p>	<p>Kürzen Eine Zahl wird mit einer angegebenen Anzahl Nachkommastellen ausgegeben. =KÜRZEN(Zelle a; Zelle b)</p> <p>Beispiel: Zelleninhalte A1=5,126, B1=2 =KÜRZEN(A1;B1) Ergebnis: 5,12</p>
<p>Produktbildung Bilden des Produkts von Zahlen und/oder Zahlen in Zellen. =PRODUKT(Zelle a; Zelle b; Zelle c; ...)</p> <p>Beispiel: Inhalte der Zellen A1=4, A5=2, B3=2 =PRODUKT(A1;A5;B3) Ergebnis: 16</p>	<p>Exponentenfunktion Berechnen eines Potenzwertes, ausgehend von der Basis e (2,718) und einem Exponent als Zahl oder Zahl einer Zelle. =EXP(Zelle)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zelle A1=5 =EXP(A1) Ergebnis: 148,413</p>	<p>Ganzzahl Eine Zahl wird auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet. =GANZZAHL(Zelle a)</p> <p>Gerade Eine Zahl wird auf die nächsthöhere ganze Zahl aufgerundet. =GERADE(Zelle a)</p>
<p>Quotientenbildung Bilden des Quotienten und Abschneiden der Nachkommastellen. =QUOTIENT(Zelle a Dividend; Zelle b Divisor)</p> <p>Beispiel: Inhalte der Zellen A1=5, A5=3 =QUOTIENT(A1;A5) Ergebnis: 1</p>	<p>Mittelwertbildung Der Mittelwert von Zahlen und/oder Zahlen in Zellen wird berechnet. =MITTELWERT(Zelle a; Zelle b; Zelle c; ...)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zellen A1=4, B1=6 =MITTELWERT (A1;B1) Ergebnis: 5</p>	<p>Trigonometrische Funktionen</p> <p>sin, cos, tan, cot Berechnen der entsprechenden Werte eines Winkels im Bogenmaß (Radiant). =SIN(Zelle)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zelle A1=0,5236 =SIN(A1) Ergebnis: 0,5</p>
<p>Restwertermittlung Restwert bei Division wird berechnet. =REST(Zelle a Dividend, Zelle b Divisor)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zellen A1=5, A2=2 =REST(A1;A2) Ergebnis: 1</p>	<p>UND-Funktion Es werden Zellen/Zahlen mit anderen Zellen/Zahlen verglichen. Als Ergebnis wird WAHR oder FALSCH angezeigt. =UND (Zelle a Bedingung; Zelle b Bedingung)</p> <p>Beispiel: Inhalt Zellen A1=5, B1=2 =UND(A1<10;B1>1) Ergebnis: WAHR</p>	<p>arcsin, arccos, arctan, arccot Berechnen eines Winkels im Bogenmaß (Radiant). =ARCSIN(Zelle)</p> <p>Bogenmaß Berechnen eines Winkels im Bogenmaß. =BOGENMASS(Zelle)</p> <p>Grad Berechnen eines Winkelwertes in Grad. =GRAD(Zelle)</p>

Zahlensysteme

Dezimal	Dual	Oktal	Sedez.	Dezimal	Dual	Oktal	Sedez.	Bemerkungen
0	0	0	0	9	1 0 0 1	11	9	Basis im Dezimalsystem: 10
1	0 1	1	1	10	1 0 1 0	12	A	Basis im Dualsystem: 2
2	1 0	2	2	11	1 0 1 1	13	B	Basis im Oktalsystem: 8
3	1 1	3	3	12	1 1 0 0	14	C	Basis im Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem): 16
4	1 0 0	4	4	13	1 1 0 1	15	D	Für Dualsystem:
5	1 0 1	5	5	14	1 1 1 0	16	E	1. Stelle links vom Komma 2^0
6	1 1 0	6	6	15	1 1 1 1	17	F	n-te Stelle links vom Komma 2^{n-1}
7	1 1 1	7	7	16	1 0 0 0 0	20	10	1. Stelle rechts vom Komma 2^{-1}
8	1 0 0 0	10	8	17	1 0 0 0 1	21	11	n-te Stelle rechts vom Komma 2^{-n}

Rechnen mit Dualzahlen

Regel	Verfahren	Beispiel
Addition $0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=10$	Subtraktion $0-0=0$ $1-0=1$ $1-1=0$ $10-1=1$	Addition: $\begin{array}{r} 110010 \\ + 10011 \\ \hline 1000101 \end{array}$ Subtraktion: $\begin{array}{r} 11101 \\ - 1011 \\ \hline 10010 \end{array}$
Subtraktion durch Komplementaddition <i>Verfahren ohne Vorzeichenstelle</i> Subtrahend 10010 1er-Komplement 01101 $\begin{array}{r} 01101 \\ + 1 \\ \hline 01110 \end{array}$ 2er-Komplement 01110	Vom Subtrahenden wird durch Invertierung das 1er-Komplement gebildet. Daraus wird durch Addition von 1 das 2er-Komplement gebildet und zum Minuenden addiert. Erfolgt ein Übertrag in der höchsten Stelle, so wird dieser gestrichen. Erfolgt kein Übertrag in der höchsten Stelle, so ist das Ergebnis negativ. Den Zahlenwert erhält man dann durch Bildung des 2er-Komplements.	Subtraktion: $10110 - 101$ Subtrahend 00101 1er-Komplement 11010 2er-Komplement 11011 $\begin{array}{r} 10110 \text{ (Minuend)} \\ + 11011 \\ \hline 110001 \triangleq 10001 \end{array}$
Multiplikation und Division $1 \cdot 1 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 0 = 0$	Die Multiplikation erfolgt wie bei Dezimalzahlen durch stellenverschobene Addition der Teilprodukte. Entsprechend erfolgt die Division.	$\begin{array}{r} 101 \cdot 110 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array}$

Umrechnungen in andere Zahlensysteme

Verfahren	Beispiel																																								
Dualzahl in Dezimalzahl Man bildet von rechts nach links die Potenzwerte zur Basis 2 und addiert sie.	Eine Dualzahl lautet 1001010. <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Dualzahl</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Stelle</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>a) Potenzwerte</td> <td>$1 \cdot 2^6$</td> <td>$0 \cdot 2^5$</td> <td>$0 \cdot 2^4$</td> <td>$1 \cdot 2^3$</td> <td>$0 \cdot 2^2$</td> <td>$1 \cdot 2^1$</td> <td>$0 \cdot 2^0$</td> </tr> <tr> <td>b) Dezimalzahlen</td> <td>64</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>8</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>2</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>=</td> <td>74</td> </tr> </table>	Dualzahl	1	0	0	1	0	1	0	Stelle	6	5	4	3	2	1	0	a) Potenzwerte	$1 \cdot 2^6$	$0 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$0 \cdot 2^0$	b) Dezimalzahlen	64	+	0	+	0	+	8	+	0	+	2	+	0	=	74
Dualzahl	1	0	0	1	0	1	0																																		
Stelle	6	5	4	3	2	1	0																																		
a) Potenzwerte	$1 \cdot 2^6$	$0 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$0 \cdot 2^0$																																		
b) Dezimalzahlen	64	+	0	+	0	+	8	+	0	+	2	+	0	=	74																										
Delimalzahl in Dualzahl Man teilt jeweils durch 2 und schreibt die Reste auf. Diese ergeben, von unten nach oben gelesen, die Dualzahl. Bei Division mit 8 bzw. 16 erhält man auf diese Art eine Oktalzahl bzw. eine Hexadezimalzahl.	Wandeln Sie die Dezimalzahl 78 in eine Dualzahl um <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>$78 : 2 = 39$</td> <td>Rest 0</td> <td>\Rightarrow</td> <td>Dualziffer 0</td> </tr> <tr> <td>$39 : 2 = 19$</td> <td>1</td> <td>\Rightarrow</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$19 : 2 = 9$</td> <td>1</td> <td>\Rightarrow</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$9 : 2 = 4$</td> <td>1</td> <td>\Rightarrow</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$4 : 2 = 2$</td> <td>0</td> <td>\Rightarrow</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$2 : 2 = 1$</td> <td>0</td> <td>\Rightarrow</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$1 : 2 = 1$</td> <td>1</td> <td>\Rightarrow</td> <td>1</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$78 \triangleq 1001110$</p> <p style="text-align: center;">Leserichtung \rightarrow</p>	$78 : 2 = 39$	Rest 0	\Rightarrow	Dualziffer 0	$39 : 2 = 19$	1	\Rightarrow	1	$19 : 2 = 9$	1	\Rightarrow	1	$9 : 2 = 4$	1	\Rightarrow	1	$4 : 2 = 2$	0	\Rightarrow	0	$2 : 2 = 1$	0	\Rightarrow	0	$1 : 2 = 1$	1	\Rightarrow	1												
$78 : 2 = 39$	Rest 0	\Rightarrow	Dualziffer 0																																						
$39 : 2 = 19$	1	\Rightarrow	1																																						
$19 : 2 = 9$	1	\Rightarrow	1																																						
$9 : 2 = 4$	1	\Rightarrow	1																																						
$4 : 2 = 2$	0	\Rightarrow	0																																						
$2 : 2 = 1$	0	\Rightarrow	0																																						
$1 : 2 = 1$	1	\Rightarrow	1																																						
Sedezimalzahl in Dezimalzahl Umwandlung der Ziffern 0 bis F in 4-stellige Dualzahlen und diese dann in Dezimalzahlen.	Wandeln Sie die Sedezimalzahl (Hexadezimalzahl) 2A3 in eine Dezimalzahl um. <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0010</td> <td style="text-align: center;">1010</td> <td style="text-align: center;">0011</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">512</td> <td style="text-align: center;">128</td> <td style="text-align: center;">32</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">$+ 2 + 1 = 675$</td> </tr> </table>	2	A	3	0010	1010	0011	512	128	32	$+ 2 + 1 = 675$																														
2	A	3																																							
0010	1010	0011																																							
512	128	32																																							
$+ 2 + 1 = 675$																																									

Vorsätze, Zehnerpotenzen, Logarithmen

Vorsätze Prefixes

Für physikalische Größen (auch bei Übertragungsraten)					Für Speichergrößen mit Bit, Byte			
Vorsatzzeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)	Vorsatzzeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)	Vorsatzzeichen	Vorsatz	Bedeutung (Faktor)
y	Yokto	10^{-24}	da	Deka	10	-	-	-
z	Zepto	10^{-21}	h	Hekto	10^2	-	-	-
a	Atto	10^{-18}	k	Kilo	10^3	K, Ki	Kilo, Kibi	2^{10}
f	Femto	10^{-15}	M	Mega	10^6	M, Mi	Mega, Mebi	2^{20}
p	Pico	10^{-12}	G	Giga	10^9	G, Gi	Giga, Gibi	2^{30}
n	Nano	10^{-9}	T	Tera	10^{12}	T, Ti	Tera, Tebi	2^{40}
μ	Mikro	10^{-6}	P	Peta	10^{15}	P, Pi	Peta, Pebi	2^{50}
m	Milli	10^{-3}	E	Exa	10^{18}	E, Ei	Exa, Exbi	2^{60}
c	Zenti	10^{-2}	Z	Zetta	10^{21}	Z, Zi	Zetta, Zebi	2^{70}
d	Dezi	10^{-1}	Y	Yotta	10^{24}	Y, Yi	Yotta, Yobi	2^{80}

Vorsätze dürfen nicht kombiniert werden. Zu einer Einheit gehört maximal ein Vorsatz.
 Im Binärbereich gibt es spezielle Binär-Vorsätze. So steht Ki für Kilo Binary, Mi für Mega Binary, Gi für Giga Binary, Ti für Tera Binary usw. **Beispiel:** 1 MiB = 2^{20} Byte, 1 GiB = 2^{30} Byte.

Zehnerpotenzen, Zehnerlogarithmen

Basis	Exponent	Zahl	0,001	0,1	1	10	10	1000	1000000
10^x	$= 1...0$	Zehnerpotenz	10^{-3}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6

Multiplication $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$ **1**

Division $10^x : 10^y = 10^{x-y}$ **2**

Potenzieren $(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$ **3**

Zehnerpotenz

1 10 100 1000 10000
 10^0 10^1 10^2 10^3 10^4

Der Logarithmus log gibt an, mit welcher Zahl eine Basis zu potenzieren ist, um das Logarithmusargument zu erhalten.

$a^b = c$
 $\log_a c = b$ **4**

Der Zehnerlogarithmus lg hat die Basis 10. Der natürliche Logarithmus ln hat die Basis der e-Funktion ($e = 2,718...$). Der Zweierlogarithmus lb hat die Basis 2.
 Für den Zehnerlogarithmus, aber auch bei Ersatz von lg durch ln bzw. lb für die anderen Logarithmen, gelten die Formeln 5 bis 7.

Multiplication $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$ **5**

Division $\lg(a/b) = \lg a - \lg b$ **6**

Potenzieren $\lg a^n = n \cdot \lg a$ **7**

$\lg(1/x) = -\lg(x)$

Umrechnen von Logarithmen

$\lg x = \ln x / \ln 10$ **8** $\ln x = \lg x / \lg e$ **9** $\lg x = \ln x / \ln 2$ **10** $\lg x = \lg x / \lg 2$ **11**

$e = 2,71828$

Leistungsbezogene, spannungsbezogene und druckbezogene Übertragsmaße
 Zur Kenntlichmachung des logarithmischen Maßes setzt man hinter den eigentlich einheitslosen Zahlenwert des Verhältnisses den Zusatz dB (Dezibel, sprich Dezi-Bell).

Dämpfungsmaße $A = 10 \lg(P_1/P_2)$ dB **12**

Verstärkungsmaße $G = 10 \lg(P_2/P_1)$ dB **13**

$G = -A$ **14** $A = -G$ **15**

Schalldruckübertragsmaß $\dot{U}_p = 20 \lg(p_1/p_2)$ **18**

$A = 20 \lg(U_1/U_2)$ dB **16** $G = 20 \lg(U_2/U_1)$ dB **17**

Bei Teilstrecken: $A_{ges} = A_1 + A_2 + \dots$; $G_{ges} = G_1 + G_2 + \dots$
 $D_{ges} = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots$

Pegel nennt man das Übertragsmaß von einem Bezugswert aus. Der Bezugswert sollte bei Pegelangaben genannt werden.

Leistungspegel in dBm $L_p = 10 \cdot \lg(P/1 \text{ mW})$ **19**

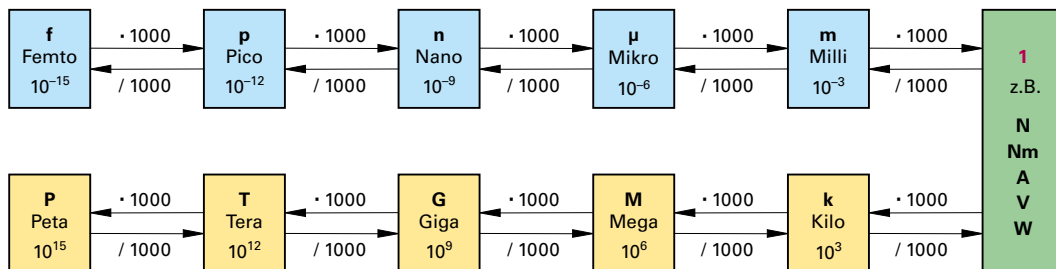
Leistungspegel in dBμ $L_U = 20 \lg(U/1 \mu V)$ **20**

Schalldruckpegel $L_p = 20 \lg(p/20 \mu N/m^2)$ **21**

A Dämpfungsmaß (A von attenuation)	L_U Spannungspegel	Indizes
G Verstärkungsmaß (G von gain)	p Druck (p von pressure)	P Leistung
L_p Leistungspegel (L von level)	P Leistung (P von power)	p Schalldruck
L_p Schalldruckpegel	U Spannung	U Spannung

1 Eingang
2 Ausgang

Umrechnungen von Vorsätzen



Vorsätze mit Tausender-Faktoren

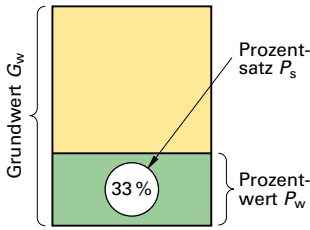
Beziehungen Längen	μm	mm	cm	dm	m	km
μm	1	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻⁴ 0,0001	10 ⁻⁵ 0,00001	10 ⁻⁶ 0,000001	10 ⁻⁹ 0,000000001
mm	10 ³ 1.000	1	10 ⁻¹ 0,1	10 ⁻² 0,01	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻⁶ 0,000001
cm	10 ⁴ 10.000	10 ¹ 10	1	10 ⁻¹ 0,1	10 ⁻² 0,01	10 ⁻⁵ 0,00001
dm	10 ⁵ 100.000	10 ² 100	10 ¹ 10	1	10 ⁻¹ 0,1	10 ⁻⁴ 0,0001
m	10 ⁶ 1.000.000	10 ³ 1.000	10 ² 100	10 ¹ 10	1	10 ⁻³ 0,001
km	10 ⁹ 1.000.000.000	10 ⁶ 1.000.000	10 ⁵ 100.000	10 ⁴ 10.000	10 ³ 1.000	1
Beziehungen Flächen	mm ²	cm ²	dm ²	m ²	km ²	
mm ²	1	10 ⁻² 0,01	10 ⁻⁴ 0,0001	10 ⁻⁶ 0,000001	10 ⁻¹²	
cm ²	10 ² 100	1	10 ⁻² 0,01	10 ⁻⁴ 0,0001	10 ⁻¹⁰	
dm ²	10 ⁴ 10.000	10 ² 100	1	10 ⁻² 0,01	10 ⁻⁸ 0,00000001	
m ²	10 ⁶ 1.000.000	10 ⁴ 10.000	10 ² 100	1	10 ⁻⁶ 0,000001	
km ²	10 ¹²	10 ⁻¹⁰	10 ⁸ 100.000.000	10 ⁶ 1.000.000	1	
Beziehungen Volumen	mm ³	cm ³ = ml	dm ³ = l	m ³		
mm ³	1	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻⁶ 0,000001	10 ⁻⁹		
cm ³ = ml	10 ³ 1.000	1	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻⁶ 0,000001		
dm ³ = l	10 ⁶ 1.000.000	10 ³ 1.000	1	10 ⁻³ 0,001		
m ³	10 ⁹ 1.000.000.000	10 ⁶ 1.000.000	10 ³ 1.000	1		
Beziehungen Zeit	μs	ms	s	min	h	t
μs	1	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻⁶ 0,000001	10 ⁻⁶ /60	10 ⁻⁶ /3.600	10 ⁻⁶ /24/3.600
ms	10 ³ 1.000	1	10 ⁻³ 0,001	10 ⁻³ /60	10 ⁻³ /3.600	10 ⁻³ /24/3.600
s	10 ⁶ 1.000.000	10 ³ 1.000	1	1/60	1 / 3.600	1 / 86.400
min	60 · 10 ⁶ 60.000.000	60 · 10 ³ 60.000	60	1	1 / 60	1 / 1.440
h	3.600 · 10 ⁶	3600 · 10 ³ 3.600.000	3.600	60	1	1 / 24
t	24 · 3.600 · 10 ⁶	24 · 3.600 · 10 ³	86.400	1.440	24	1

Verwendete Einheiten ohne Vorsatz: A Ampere, h Stunde, l Liter, m Meter, min Minute, N Newton, s Sekunde, t Tag, V Volt, W Watt

Rechnen mit Größen

Begriffe				Erklärung	Bemerkungen
Basisgrößen				Spezieller Wert einer Größe (Größenwert oder in der Messtechnik Messwert) ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit. Formelzeichen verwendet man zur Abkürzung von Größen. Einheitenzeichen verwendet man zur Abkürzung der Einheiten. Basisgrößen sind Ausgangsgrößen, aus denen andere Größen abgeleitet werden.	Der Malpunkt zwischen Zahlenwert und Einheit entfällt. Kurzform einer Länge von 8 m ist $l = 8 \text{ m}$. Formelzeichen sind Buchstaben (auch griechische), die <i>kursiv</i> gedruckt werden. Einheitenzeichen sind Buchstaben (auch griechische), die senkrecht gedruckt werden. A bedeutet Fläche, A bedeutet Ampere.
Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen		
Länge	l	Meter	m		
Masse	m	Kilogramm	kg		
Zeit	t	Sekunde	s		
Stromstärke	I	Ampere	A		
Temperatur	T	Kelvin	K		
Lichtstärke	I_v	Candela	cd		
Stoffmenge	n	Mol	mol		
Abgeleitete Größen				Man verwendet oft Größen, die aus den Basiseinheiten mithilfe einer Formel abgeleitet sind, z.B. für eine Fläche. Dabei geht man von der Formel für die gesuchte Größe aus, z.B. $A = l \cdot b$, Einheit $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$. Auch aus den aus Basiseinheiten abgeleiteten Größen können weitere Größen abgeleitet werden, z.B. die elektrische Spannung aus P und I zu $U = P/I$ mit den Einheiten $[U] = \text{kgm}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^3) = \text{kgm}^2/\text{As}^3 = \text{V}$.	Die aus Basiseinheiten abgeleiteten Größen sind oft wenig anschaulich. Deshalb verwendet man meist Größen, die aus abgeleiteten Größen anderer Größen bestehen. So wird der elektrische Widerstand R hergeleitet von Spannung U und Stromstärke I . $R = U/I$ Die Arbeit W wird hergeleitet von Kraft F und Kraftweg s oder von Spannung U und Stromstärke I . $W = F \cdot s$ oder $W = U \cdot I$ Entsprechend berechnet man die jeweilige Einheit (nächster Abschnitt).
Größe	Formelzeichen	Formel	berechnete Einheit		
Fläche	A	$A = l \cdot b$	$\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$		
Ladung	Q	$Q = I \cdot t$	$\text{A} \cdot \text{s} = \text{As}$		
Beschleunigung	a	$a = s/t^2$	m/s^2		
Kraft	F	$F = m \cdot a$	kgm/s^2		
Arbeit	W	$W = F \cdot s$	kgm^2/s^2		
Leistung	P	$P = W/t$	$\text{kgm}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{s}) = \text{kgm}^2/\text{s}^3$		
Druck	p	$p = F/A$	$\text{kgm}/(\text{s}^2 \cdot \text{m}^2) = \text{kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{m})$		
el. Spannung	U	$U = P/I$	$(\text{kgm}^2/\text{s}^3)/\text{A} = \text{kgm}^2/(\text{As}^3) = \text{V}$		
el. Feldstärke	E	$E = F/Q$	$(\text{kgm}/\text{s}^2)/(\text{As}) = \text{kgm}/(\text{A} \cdot \text{s}^3) = \text{V/m}$		
Abgeleitete Einheiten				Schreibweise $[Q]$ spricht: Einheit von Q Einheit bestimmen Man erhält bei Bedarf die Einheit aus der Formel, z.B. für $Q = I \cdot t$ $[Q] = [I] \cdot [t] = \text{A} \cdot \text{s} = \text{As} = \text{C}$ Besonderer Name Nur häufig vorkommende, abgeleitete Einheiten haben einen besonderen Namen, der nach Erfindern benannt ist. $[P] = [U] \cdot [I] = \text{V} \cdot \text{A} = \text{W}$	$[W] = [F] \cdot [s] = \text{Nm}$ oder $[W] = [U] \cdot [I] = \text{VA}$ Sonderfall bei Verhältnissen Bei Verhältnissen kann eintreten, dass gleichartige Größen ins Verhältnis gesetzt sind, z.B. beim Leistungswirkungsgrad. $[\eta] = [P_{ab}]/[P_{zu}] = W/W = 1$ Wenn eine Größe keine Einheit hat, dann ist $[Größe] = 1$. In diesem Fall entfällt die Ermittlung der Einheit.
Größe	berechnete Einheit	besonderer Name	Einheitenzeichen		
Ladung	As	Coulomb	C		
Kraft	kgm/s^2	Newton	N		
Arbeit	kgm^2/s^2	Newtonmeter	Nm		
Leistung	kgm^2/s^3	Watt	W		
Druck	$\text{kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{m})$	Pascal	Pa		
Kapazität	As/V	Farad	F		
Induktivität	Vs/A	Henry	H		
el. Feldstärke	$\text{kgm}/(\text{As}^3) \text{ V/m}$	–	N/C V/m		
Rechnen mit Vorsätzen				Allgemein kann man bei Berechnungen die Vorsätze der Einheiten durch Zehnerpotenzen (vorhergehende Seite) ersetzen. $P = U \cdot I = 20 \text{ kV} \cdot 100 \text{ mA} = 20 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 20 \cdot 100 \text{ V} \cdot \text{A} = 2000 \text{ VA}$ Oft wird die Rechenarbeit einfacher, wenn man sich nebenstehende Regeln für die jeweils um 1000 abweichende Reihe (μ , m, 1, k, M, G) einprägt. Hier $k \text{ mal } m = 1$, also $20 \text{ kV mal } 100 \text{ mA} = 2000 \text{ VA}$.	Bei Vorsätzen, die sich nicht um den Faktor 1000 unterscheiden, ist der Ersatz des Einheitszeichens durch Zehnerpotenzen zweckmäßig, z.B. bei der Umrechnung von km in cm. $0,06 \text{ km} = 0,06 \cdot 10^3 \text{ m} = 60 \text{ m} = 6000 \text{ cm}$ Kombination der Vorsätze ist nicht zulässig, also keinesfalls 6 kcm schreiben. Bei Größen mit Exponenten, z.B. Flächen (Quadrat-) oder Rauminhalten (Kubik-) ist der Vorsatz entsprechend zu potenzieren. $1 \text{ km}^2 = 10^{3 \cdot 2} \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2$
Multiplikation (Malnehmen)					
1 mal m = m		1 A mal 1 ms = 1 mAs			
1 mal k = k		1 kA mal 1 s = 1 kAs			
k mal m = 1		1 kA mal 1 ms = 1 As			
M mal m = k		1 MΩ mal 1 mA = 1 kV			
m mal m = μ		1 mA mal 1 ms = 1 μAs			
μ mal k = m		1 μA mal 1 kV = 1 mW			
k mal n = μ		1 kΩ mal 1 nA = 1 μV			
Division (Teilen)					
m durch 1 = m		1 mAs/1 A = 1 ms			
k durch 1 = k		1 kAs/1 s = 1 kA			
1 durch m = k		1 As/1 ms = 1 kA			
1 durch k = m		1 As/1 kA = 1 ms			
1 durch M = μ		1 V/1 MΩ = 1 μA			

Prozentrechnung



Begriffe der Prozentrechnung

- G_w Grundwert
- K_0 Anfangskapital
- p Jahreszinssatz
- P_s Procentsatz in %, Wachstumsrate, Abnahmerate
- P_w Prozentwert
- t Zinstage
- Z Zins
- Z_z Zinseszins
- 1 Zinsjahr (1 a) = 360 Zinstage (360 d)
- 1 Zinsmonat = 30 Zinstage (30 d)
- a von lat. anno = Jahr,
- d von engl. day = Tag

Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w \cdot P_s}{100\%}$$

Procentsatz

$$P_s = \frac{P_w}{G_w} \cdot 100\%$$

Zins

$$Z = \frac{K_0 \cdot p \cdot t}{100\% \cdot 360}$$

Promille

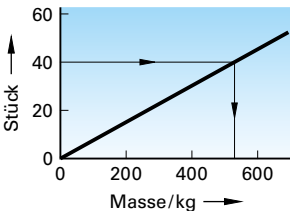
$$1\text{‰} = \frac{1}{1000}$$

Zinseszins nach n Jahren

$$Z_z = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^n$$

Zahl	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	1,5
in Prozent	1%	2%	4%	5%	10%	12,5%	20%	25%	$33\frac{1}{3}\%$	$66\frac{2}{3}\%$	75%	100%	125%	150%

Dreisatzrechnung



Proportionales Verhältnis (Einheit durch Division)

- Aussage (Beispiel): n Elemente wiegen a kg
- Berechnung für 1 Objekt: 1 Element wiegt a/n kg
- Berechnung für z Objekte: z Elemente wiegen $z \cdot a/n$ kg

Invers proportionales Verhältnis (Einheit durch Multiplikation)

- Aussage (Beispiel): n Arbeiter brauchen a Stunden
- Berechnung für 1 Objekt: 1 Arbeiter braucht $n \cdot a$ Stunden
- Berechnung für z Objekte: z Arbeiter brauchen $n \cdot a/z$ Stunden

Endwert

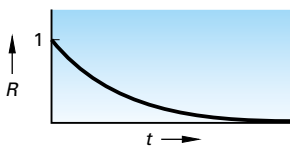
$$E_w = \frac{A_w}{A_m} \cdot E_m$$

$$E_w = \frac{A_m \cdot A_w}{E_m}$$

Dreisatzrechnung für ein proportionales Verhältnis

A_m Anfangsmenge, A_w Ausgangswert, E_m Endmenge, E_w Endwert

Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit



Zuverlässigkeitsfunktion

- F Ausfallwahrscheinlichkeit
- n_a Anzahl ausgefallene Einheiten
- n Anzahl Einheiten
- R Zuverlässigkeit
- t Betriebszeit
- t_x Zeitpunkt
- λ Ausfallrate (Lambda)
- MTBF Mean Time between Failure

Zuverlässigkeit bei t_0

$$R(t_x) = 1 - \frac{n_a}{n}$$

Zuverlässigkeit allg.

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = -\ln(R(t))/t$$

Ausfallwahrscheinlichkeit

$\ln (< 1)$ ist negativ

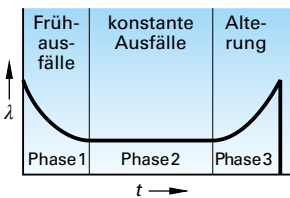
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Ausfallhäufigkeit

$$L = \frac{n_g(t_1) - n_g(t_2)}{n}$$

Ausfallrate für Phase 2

$$\lambda = \frac{1}{MTBF}$$



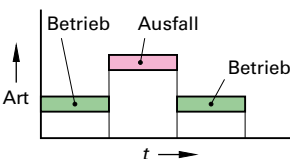
Ausfallverhalten

- A Verfügbarkeit
- a Ausfallsatz
- L Ausfallhäufigkeit
- n_g Anzahl gute Einheiten
- n Anzahl Einheiten
- n_a Anzahl ausgefallene Einheiten
- t Betriebszeit
- $t_{1,2}$ Zeitpunkte
- λ Ausfallrate (Lambda)
- MTBF Mean Time between Failure
- MTTR Mean Time to Repair (Recover)

Ausfallsatz

$$a = \frac{n_a}{n}$$

$$n_a = a \cdot n; n = \frac{n_a}{a}$$



Verfügbarkeit, Ausfall, Betrieb

Verfügbarkeit ist ein Maß, dass ein Bauelement (oder System) seine ausgewiesenen Funktionen zu einem vereinbarten Zeitpunkt oder innerhalb eines vereinbarten Zeitrahmens erfüllt. Ausfallzeiten wegen Wartung werden nicht berücksichtigt.

Verfügbarkeit

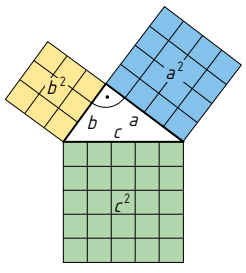
$$\text{Verfügbarkeit} = \frac{\text{Betriebszeit} - \text{Ausfallzeit}}{\text{Betriebszeit}}$$

Bei konstanter Ausfallrate und Instandsetzungsrate:

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

Rechtwinkliges Dreieck, Winkelfunktionen, Steigung

Lehrsatz des Pythagoras



Im **rechtwinkligen Dreieck** ist das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Kathete a

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad 2$$

Kathete b

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad 3$$

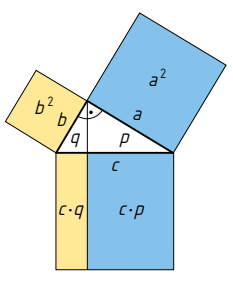
Hypotenusenquadrat

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad 1$$

Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad 4$$

Lehrsatz des Euklid (Kathetensatz)



Das Quadrat über einer Kathete ist flächengleich einem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Kathetenquadrate

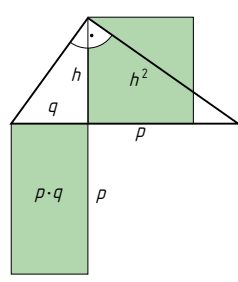
$$b^2 = c \cdot q \quad 5$$

$$c = \frac{b^2}{q} \quad q = \frac{b^2}{c}$$

$$a^2 = c \cdot p \quad 7$$

$$p = \frac{a^2}{c} \quad c = \frac{a^2}{p}$$

Höhensatz



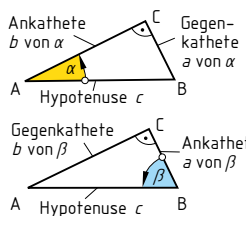
Das Quadrat über der Höhe h ist flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten p und q .

Höhensquadrat

$$h^2 = p \cdot q \quad 6$$

$$p = \frac{h^2}{q} \quad q = \frac{h^2}{p}$$

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad 8$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad 9$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad 10$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad 11$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad 12$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad 13$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad 14$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad 15$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \quad 16$$

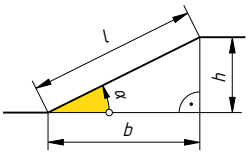
$$\text{Kotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \quad 17$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad 18$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} \quad 19$$

Art	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2} = 0,5000$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 0,7071$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,8660$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0,8660$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 0,7071$	$\frac{1}{2} = 0,5000$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = 0,5774$	1	$\sqrt{3} = 1,7321$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3} = 1,7321$	1	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = 0,5774$	0	∞	0	$-\infty$

Steigung geneigter Strecken



$$\text{Steigung} \quad x = \frac{h}{b} \cdot 100\% \quad 20$$

$$h = \frac{x \cdot b}{100\%}$$

$$\text{Steigungswinkel} \quad \tan \alpha = \frac{h}{b} \quad 21$$

$$h = b \cdot \tan \alpha$$

$$\text{Länge der geneigten Strecke} \quad l = \sqrt{h^2 + b^2} \quad 22$$

$$h = \sqrt{l^2 - b^2}$$

$$l = \frac{h}{\sin \alpha} \quad 23$$

$$h = l \cdot \sin \alpha$$

a Kathete c Hypotenuse p, q Hypotenusenabschnitte alpha Steigungswinkel
 b Kathete, Basis h Höhe, Höhenunterschied l Länge der geneigten Strecke x Steigung in %

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Reduktionsformeln

Funktion	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$	Das Bogenmaß des Winkels α ist das Verhältnis der Kreisbogenlänge b zum Radius r . $\alpha = \frac{b}{r}$ $0^\circ \rightarrow 0$ $90^\circ \rightarrow \pi/2$ $180^\circ \rightarrow \pi$
$\sin \beta$ $\cos \beta$ $\tan \beta$ $\cot \beta$	$+\cos \alpha$ $\mp \sin \alpha$ $\mp \cot \alpha$ $\mp \tan \alpha$	$\mp \sin \alpha$ $-\cos \alpha$ $\mp \tan \alpha$ $\pm \cot \alpha$	$-\cos \alpha$ $\pm \sin \alpha$ $\pm \cot \alpha$ $\pm \tan \alpha$	$-\sin \alpha$ $+\cos \alpha$ $-\tan \alpha$ $-\cot \alpha$	

Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras:
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 1

Weil $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ und $\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$
 $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ 2

$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

Die Wurzel ist positiv oder negativ, je nachdem, in welchem Quadranten der Winkel liegt.

Quadrant	1	2	3	4
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 3

$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$
 $\cos \alpha = \sin \alpha / \tan \alpha$

$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$ 4

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ 5

$x_1 = \sin \alpha \cdot \sin \beta$
 $x_2 = \cos \alpha \cdot \cos \beta$
 $y_1 = \cos \alpha \cdot \sin \beta$
 $y_2 = \sin \alpha \cdot \cos \beta$
 $\sin(\alpha + \beta) = y_1 + y_2$
 $\cos(\alpha + \beta) = x_2 - x_1$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
 $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$
 $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
 $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ $\cot \alpha \pm \cot \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$ $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ $x = \sin \alpha \rightarrow \alpha = \arcsin x$ $x = \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos x$	$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ $x = \tan \alpha \rightarrow \alpha = \arctan x$ $x = \cot \alpha \rightarrow \alpha = \text{arc cot } x$
---	---	---

Winkelbeziehungen im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r_a$

Kosinussatz:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Tangenssatz: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan [1/2(\alpha + \beta)]}{\tan [1/2(\alpha - \beta)]}$

Fläche: $A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = 2r_a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$

Höhe auf a: $h_a = b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$

Seitenhalbierende auf a: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha}$

Winkelhalbierende von alpha: $l_\alpha = \frac{2bc \cdot \cos(\alpha/2)}{b+c}$

Radius des Umkreises: $r_a = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$

Radius Inkreis: $r_i = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$

Winkelgleichung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

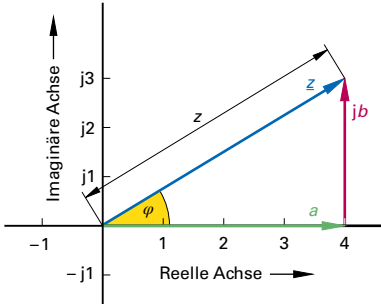
Umkreis (oben) und Inkreis (unten) des Dreiecks

Sinussatz:
Im Dreieck verhalten sich zwei Seiten zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.
 $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
 $a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
 $b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

Kosinussatz:
Im Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der anderen beiden Seiten minus dem doppelten Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Mathematische Grundlagen



Eine **komplexe Zahl** z ist eine Zahl in der komplexen Zahlenebene. Eine komplexe Zahl besteht aus einem **Realteil** a und dem **Imaginärteil** b . Sie kann auch über einen Betrag mit Winkelangabe dargestellt werden. Die Einheit der imaginären Achse ist j .

Komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahl
arithmetische Form

$$z = a + jb \quad \boxed{1}$$

trigonometrische Form

$$z = z (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \boxed{2}$$

Exponentialform

$$z = z \cdot e^{j\varphi} \quad \boxed{3}$$

Realteil

$$a = z \cdot \cos \varphi \quad \boxed{4}$$

Imaginärteil

$$b = z \cdot \sin \varphi \quad \boxed{5}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \boxed{6}$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad \boxed{7}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad \boxed{8}$$

$$j^2 = -1 \quad \boxed{9}$$

$$j^{-1} = 1/j = -j \quad \boxed{10}$$

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2 \cos \varphi \quad \boxed{11}$$

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = j 2 \sin \varphi \quad \boxed{12}$$

$$\frac{b}{a} = \tan \varphi$$

Rechnen mit komplexen Zahlen, konjugiert komplexen Zahlen

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2) \quad \boxed{13}$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j (b_1 - b_2) \quad \boxed{14}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \boxed{15}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \boxed{16}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + j b_1) (a_2 - j b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \quad \boxed{17}$$

Potenz

$$z^n = z^n \cdot e^{jn\varphi} \quad \boxed{18}$$

Wurzel

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{j(\varphi/n)} \quad \boxed{19}$$

Eine konjugiert komplexe Zahl z^* ist die an der reellen Achse gespiegelte Zahl z .

$$z^* = a - jb \quad \boxed{20}$$

$$z^* = z \cdot e^{-j\varphi} \quad \boxed{21}$$

Addition

$$z + z^* = 2a \quad \boxed{22}$$

Subtraktion

$$z - z^* = j 2b \quad \boxed{23}$$

Multiplikation

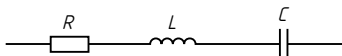
$$z \cdot z^* = z^2 = a^2 + b^2 \quad \boxed{24}$$

Division

$$\frac{z}{z^*} = e^{j2\varphi} \quad \boxed{25}$$

Komplexe Berechnung des Scheinwiderstandes bei RLC-Schaltungen

Reihenschaltung



$$\underline{R} = R \quad \boxed{26}$$

$$\underline{Z} = R + \underline{X}_L + \underline{X}_C \quad \boxed{27}$$

$$\underline{X}_L = j \omega L \quad \boxed{28}$$

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j \omega C} \quad \boxed{29}$$

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad \boxed{31}$$

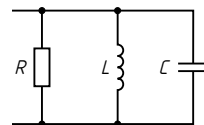
$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \boxed{32}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad \boxed{35}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \boxed{36}$$

Bei Reihenschaltungen werden Widerstände addiert.

Parallelschaltung



$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{X}_L} + \frac{1}{\underline{X}_C} \quad \boxed{30}$$

Formeln 26, 28, 29 gelten auch für Parallelschaltung.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad \boxed{33}$$

$$\underline{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad \boxed{34}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right) \quad \boxed{37}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \boxed{38}$$

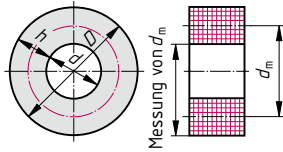
Bei Parallelschaltungen werden Leitstände addiert.

- L Induktivität
- C Kapazität
- G Wirkleitwert
- R Wirkwiderstand

- Z Scheinwiderstand
- Y Scheinleitwert
- X_L, X_C Blindwiderstände
- ω Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$)

- φ Argument von z
- j imaginäre Einheit
- e Eulersche Zahl (2,71828...)
- $e^{j\varphi}$ Einheitsvektor von z
- Kennzeichnung für komplex

Drahtlängen von Spulen, Kreisringausschnitt



Rundspulen

Einheiten

$[D] = [d] = [h] = [a] = [b] = m \Rightarrow [l_m] = [l] = m$
 $[D] = [d] = [h] = [a] = [b] = cm \Rightarrow [l_m] = [l] = cm$

$l = l_m \cdot N$

$l_m = \pi \cdot d_m$

$D_m = D - h$

Messung von d_m

$d_m = d + h$

$h = d_m - d$

$d = d_m - h$

Rundspule

$l = \pi \cdot d_m \cdot N$

$d_m = l / (\pi \cdot N)$

$N = l / (\pi \cdot d_m)$

mittlerer Durchmesser

$d_m = \frac{D + d}{2}$

$D = 2 \cdot d_m - d$

$d = 2 \cdot d_m - D$

Rechteckspule

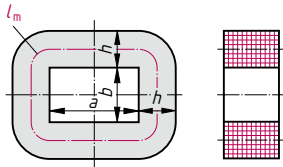
$l = (2a + 2b + \pi \cdot h) \cdot N$

$a = (l/N - 2b - \pi \cdot h) / 2$

$b = (l/N - 2a - \pi \cdot h) / 2$

$h = (l/N - 2a - 2b) / \pi$

$N = l / (2a + 2b + \pi \cdot h)$



Rechteckspulen

$l = l_m \cdot N$

$l_m = 2a + 2b + \pi \cdot h$

$l_m = l / N$

Kreisring

$l = \pi \cdot d_m \cdot \alpha$

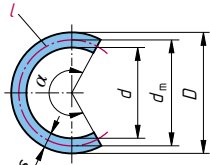
$d_m = l / \pi$

Kreisringausschnitt

$l_{m1} = \frac{\pi \cdot d_m \cdot \alpha}{360^\circ}$

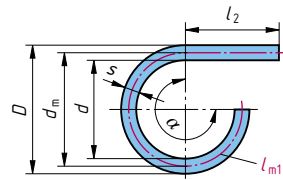
$d_m = l_{m1} \cdot \frac{360^\circ}{\pi \cdot \alpha}$

$\alpha = 360^\circ \cdot l_{m1} / (\pi \cdot d_m)$



Kreisringausschnitt

Zusammengesetzte Längen

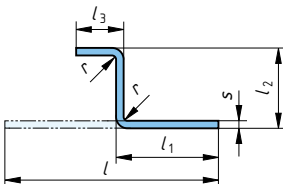


Werkstück mit Rundung

Man zerlegt das Werkstück in Teillängen und addiert diese. Bei Rundung ist die Länge der neutralen Faser zu berechnen, z.B. der Kreisringausschnitt.

Gestreckte Länge mit Rundung

$l = l_{m1} + l_2 \dots$



Werkstück mit Biegewinkel 90°

Ausgleichswerte v für Biegewinkel $\alpha = 90^\circ$

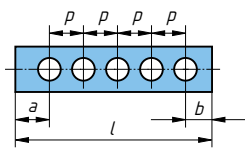
Biegeradius r in mm	Blechedicke s in mm								
	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3	3,5
1	1,0	1,3	1,7	1,9	-	-	-	-	-
1,6	1,3	1,6	1,8	2,1	2,9	-	-	-	-
2,5	1,6	2,0	2,2	2,4	3,2	4,0	4,8	-	-
4	-	2,5	2,8	3,0	3,7	4,5	5,2	6,0	6,9

Bei einem Werkstück mit Biegewinkel von 90° addiert man die Schenkel und zieht von der Summe einen Ausgleichswert ab.

Gestreckte Länge

$l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots - z \cdot v$

Teilung von Längen



Randabstand \neq Teilung

Teilung bei Randabstand \neq Teilung

$p = \frac{l - (a + b)}{z - 1}$

$z = (l - (a + b)) / p + 1$

$l = p(z - 1) + a + b$

Teilung bei Randabstand = Teilung

$p = \frac{l}{z + 1}$

$z = l / p - 1$

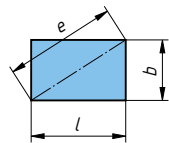
$l = p \cdot (z + 1)$

- a, b, c Strecken
- D Außendurchmesser
- d Innendurchmesser
- d_m mittlerer Durchmesser
- h Wicklungshöhe
- l Länge
- l_m mittlere Länge (bei Rundung)
- N Windungszahl
- p Teilung
- r Biegeradius
- s Dicke
- v Ausgleichswert
- z Anzahl der Biegestellen oder Bohrungen
- α Winkel
- Indizes: 1, 2, 3 für Teile

Die Bedeutung weiterer Formelzeichen ist aus den Bildern erkennbar.

Flächen 1

Rechteck und verwandte Flächen



Rechteck

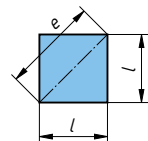
$[l] = [b] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l] = [b] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$
 $[e] = m \text{ oder } [e] = mm$

Eckenmaß Rechteck

$e = \sqrt{l^2 + b^2}$ **1**
 $l = \sqrt{e^2 - b^2}$
 $b = \sqrt{e^2 - l^2}$

Fläche Rechteck

$A = l \cdot b$ **2**
 $l = A/b$
 $b = A/l$



Quadrat

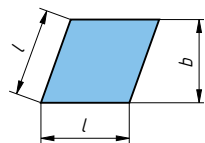
$[l] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$

Eckenmaß Quadrat

$e = \sqrt{2} \cdot l$ **3**
 $l = e/\sqrt{2}$

Fläche Quadrat

$A = l^2$ **4**
 $l = \sqrt{A}$



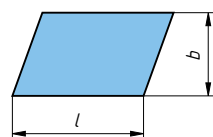
Raute (Rhombus)

$[l] = [b] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l] = [b] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$

$1 m^2 = 100 dm^2$
 $1 dm^2 = 100 cm^2$
 $1 cm^2 = 100 mm^2$

Fläche Raute

$A = l \cdot b$ **5**
 $l = A/b$
 $b = A/l$

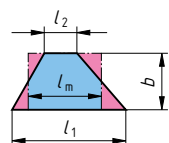


Parallelogramm (Rhomboid)

$[l] = [b] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l] = [b] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$

Fläche Parallelogramm

$A = l \cdot b$ **6**
 $b = A/l$
 $l = A/b$



Trapez

$[l_m] = [b] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l_m] = [b] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$

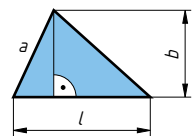
Mittlere Länge Trapez

$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2}$ **7**
 $l_1 = 2 \cdot l_m - l_2$
 $l_2 = 2 \cdot l_m - l_1$

Fläche Trapez

$A = l_m \cdot b$ **8**
 $l_m = A/b$
 $b = A/l_m$

Dreieckberechnungen



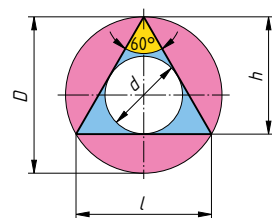
Dreieck

$[l] = [b] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[l] = [b] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$
 Bei rechtwinkligem Dreieck:
 $A = a \cdot b/2$

anstelle von b wird auch h verwendet

Fläche Dreieck

$A = \frac{l \cdot b}{2}$ **9**
 $l = 2 \cdot A/b$ $b = 2A/l$



Gleichseitiges Dreieck

$[d] = [D] = [h] = [l] = m \Rightarrow [A] = m^2$
 $[d] = [D] = [h] = [l] = mm \Rightarrow [A] = mm^2$

Umkreisdurchmesser

$D = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot l = 2 \cdot d$ **10**
 $l = \sqrt{3} \cdot D/2 = \sqrt{3} \cdot d$

Fläche

$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot l^2$ **11**
 $l = 2\sqrt{A/\sqrt{3}}$

Inkreisdurchmesser

$d = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot l = \frac{D}{2}$ **12**
 $l = \sqrt{3} \cdot d = \sqrt{3} \cdot D/2$

Dreieckshöhe

$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot l$ **13**
 $l = 2h/\sqrt{3}$

A Fläche
 b Breite
 d Inkreisdurchmesser

D Umkreisdurchmesser
 e Eckenmaß
 h Höhe

l Seitenlänge
 l_1 große Länge
 l_2 kleine Länge
 l_m mittlere Länge

Die Bedeutung sonstiger Größen ist aus den Bildern und Formelüberschriften erkennbar.