

Theoretische Physik

Band 8

Walter Greiner
Berndt Müller

**Eichtheorie
der schwachen
Wechselwirkung**



Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik
Band 8
Walter Greiner/Berndt Müller
Eichtheorie der schwachen
Wechselwirkung

Walter Greiner

Theoretische Physik

- Band 1: Mechanik, Teil 1
- Band 2: Mechanik, Teil 2
- Band 3: Elektrodynamik
- Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung
- Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien
- Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen
- Band 7: Quantenelektrodynamik
- Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung
- Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik
- Band 10: Quantenchromodynamik

Ergänzungsbände

- Band 2A: Hydrodynamik
- Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie
- Band 4A: Quantentheorie, Spezielle Kapitel
- Band 7A: Feldquantisierung

In Vorbereitung:

- Physik der Elementarteilchen, Theoretische Grundlagen
- Modelle der Elementarteilchen
- Kernmodelle
- Quantenstatistik
- Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation

Theoretische Physik

Band 8

Walter Greiner
Berndt Müller

Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1995



Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. Walter Greiner ist Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main

Professor Dr. phil. nat. Berndt Müller ist Prof. of Physics am Department of Physics der Duke University, Durham, N. C.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Theoretische Physik : ein Lehr- und Übungsbuch. – Thun ;
Frankfurt am Main : Deutsch

Bd. 8. Greiner, Walter; Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung. –
2., überarb. und erw. Aufl. – 1995

Greiner, Walter:

Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung : mit zahlreichen Beispielen und
Aufgaben mit ausführlichen Lösungen / Walter Greiner ;
Berndt Müller. – 2., überarb. und erw. Aufl. – Thun ;
Frankfurt am Main : Deutsch, 1994

(Theoretische Physik ; Bd. 8)

ISBN 3-8171-1427-3

NE: Müller, Berndt:

ISBN 3-8171-1427-3

2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1995

© 1995 Verlag Harri Deutsch · Thun und Frankfurt am Main

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung
des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in
irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für
Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer
Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den
Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Her-
ausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen so-
wie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Druck: Fuldaer Verlagsanstalt, Fulda.

Vorwort zur 1. Auflage

Die moderne theoretische Physik hat in den letzten 20 Jahren bedeutende Fortschritte zu verzeichnen, die durchaus einem Vergleich mit den dramatischen Entwicklungen zu Beginn dieses Jahrhunderts (Relativitätstheorie, Quantentheorie) standhalten. Wir kennen zur Zeit vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, die allen heute erklärbaren Erscheinungen in der Natur zugrunde liegen. Es sind dies die *starke Wechselwirkung* (sie wird durch den Austausch von Pionen – oder auf tieferer Ebene durch Gluonen – vermittelt), die *schwache Wechselwirkung* (sie ist wie die starke Wechselwirkung kurzreichweitig und kommt durch den Austausch der sogenannten W- und Z-Bosonen zustande), die *elektromagnetische Wechselwirkung* (sie ist langreichweitig und wird durch die Photonen vermittelt) und die *Gravitation* (sie ist ebenfalls langreichweitig und wird von den noch nicht nachgewiesenen Gravitonen übertragen). Zwar ist das durchaus möglich, daß noch andere elementare Wechselwirkungsarten (Kraftfelder) in der Natur vorkommen, doch wurden solche bis heute nicht nachgewiesen.

Letztendliches Ziel der Physik ist es wohl, nach einer einheitlichen Wurzel all dieser Kräfte zu suchen, d. h. eine einheitliche Feldtheorie zu finden, die als Grenzfälle die erwähnten Teilbereiche mit ihren zunächst recht verschieden erscheinenden Aspekten enthält. Wir kennen schon ein Modell einer solchen Vereinheitlichung: Vor Maxwell waren elektrische und magnetische Kräfte etwas grundlegend verschiedenes; durch die Entdeckung des Elektromagnetismus (Maxwellsche Gleichungen) wurden beide Erscheinungen als zusammengehörige Teile eines Phänomens, auf alle Fälle als eng miteinander verknüpft, erkannt.

Ähnlich gelang es Glashow, Salam, Weinberg und anderen, eine innere Verwandtschaft der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung aufzuzeigen, sie gewissermaßen zu vereinheitlichen. Die hier ausgearbeiteten Vorlesungen behandeln die Gedanken, die zu dieser Vereinheitlichung führten und besprechen die verschiedensten damit zusammenhängenden Phänomene. So wird zunächst die auf Fermi zurückgehende Theorie des Beta-Zerfalls dargestellt; ihre Erfolge und Schwierigkeiten werden aufgezeigt. Paritätsverletzung (die sogenannte V-A-Theorie) macht die Notwendigkeit der Betrachtung grundlegender Symmetrien deutlich. An zahlreichen ausgearbeiteten Aufgaben und Beispielen werden die vielfältigen Aspekte vorgeführt und das gedankliche und rechentechnische Neuland eingeübt.

Schließlich wird das Konzept der Eichtheorie, basierend auf einer Symmetriegruppe, vorgestellt. In gewissem Sinne stellt damit der neue Band die natürliche Fortsetzung des Bandes *Quantenmechanik II: Symmetrien* dar. Der Symmetriebegriff wird hier

auf die lokale Eichsymmetrie, die schon aus der Elektrodynamik in Grundzügen bekannt ist, erweitert, wobei die gleichzeitige „spontane“ Brechung der Symmetrie eine wichtige Rolle spielt. Das Standard-Modell der schwachen Wechselwirkung wird in aller Ausführlichkeit behandelt. Spontane Symmetriebrechung, geladene und neutrale Ströme, die „Vermählung“ von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung und viele andere aktuelle Fragen werden angesprochen und in Breite diskutiert, immer durchsetzt mit illustrierenden und weiterführenden Beispielen und Aufgaben. Letztere sind aktuell gewählt; so haben wir auch das Sonnen-Neutrinoproblem, wie es Bethe erst kürzlich pädagogisch schön gefaßt hat, mit aufgenommen. Weitere Kapitel befassen sich mit der Erweiterung auf stark wechselwirkende Teilchen, die auf dem Quarkmodell aufbaut; aber auch die praktische Anwendung in der Kernphysik (Betaerfall) und die Verletzung der CP-Invarianz wird ausführlich behandelt.

Das Buch endet mit einem Ausblick, wie eine „Große Einheitliche Feldtheorie“ (Grand Unified Theory) aussehen könnte. Es ist das von Georgi und Glashow eingeführte SU(5)-Modell einer solchen Vereinheitlichung, welche Quarks und Leptonen „familiär“ zusammenfaßt und so Aussagen über ihre Umwandlung ineinander erlaubt. Das Proton ist nach dieser Modell-Theorie nicht mehr stabil. Natürlich wird diese Aussage genau verfolgt und mit den zur Zeit existierenden Experimenten konfrontiert. Obwohl diese das SU(5)-Modell der „Großen Vereinigung“ nicht zu bestätigen scheinen, lernen wir aus diesen Überlegungen sehr viel. Wir haben sie wiederum recht ausgebreitet dargestellt, damit die jungen Studenten der mittleren und höheren Semester systematisch und so einfach wie möglich die wesentlichen neuen Gedanken und mathematischen Techniken lernen und darauf aufbauen können.

Diese Vorlesungen sollen so konkret und didaktisch-anschaulich wie möglich in die moderne theoretische Physik einführen. Sie sind entstanden aus Kursen, die wir an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main und an der Vanderbilt University in Nashville/Tennessee während der Jahre 1982-85 gelesen habe. Das Buch ist in sich geschlossen als eigenständiges Werk konzipiert, kann also durchaus unmittelbar durchgearbeitet werden: Natürlich nicht ohne Vorkenntnisse. Die Beherrschung der Quantenelektrodynamik (Band 7 der Vorlesungen) ist unabdingbar. Wichtige, anderweitig abgeleitete Formeln sind in drei Anhängen zusammengefaßt.

Besondere Dank gilt den Herren Dipl. Phys. Matthis Grabiak und Dr. Andreas Schäfer für ihre Hilfe bei der Ausarbeitung von Aufgaben. Wir bedanken uns vor allem bei den Herren Dipl. Phys. Christian Derreth und Dipl. Phys. Volker Schneider für ihre Mühe und Sorgfalt bei der Überwachung und Ausführung der Drucklegung des Manuskripts. Sie, wie auch andere (R. Herrmann, A. Paulus und H. Schaaser) haben durch ihre Mithilfe ganz wesentlich zum Gelingen beigetragen. Schließlich bedanken wir uns bei Frau Brigitte Utschig für die Anfertigung der zahlreichen Abbildungen.

Wir hoffen, daß auch dieser neue Band in der Reihe der Vorlesungen über theoretische Physik viele Freunde findet und Freude bereitet.

Frankfurt am Main, im August 1986

Walter Greiner
Berndt Müller

Vorwort zur 2. Auflage

Die Neuauflage des Buches *Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung* im Rahmen der Vorlesungen über Theoretische Physik ermöglichte Erweiterungen und Ergänzungen. So wurden eine Reihe neuer Aufgaben und Beispiele (Propagatoren und Eichinvarianz, Selbstwechselwirkung der Eichfelder, Kinetische Energie des Higgs-Felds, Anomalie-Freiheit, Wechselwirkungs-Hamiltonoperator beim Protonenzerfall) neu aufgenommen, einige Kapitel ergänzt und und vor allem das Kapitel über Vereinigte Eichtheorien überarbeitet und didaktisch klarer gefaßt. Etliche eingeschlichene Fehler wurden eliminiert.

Um die Lesbarkeit zu erhöhen, wurde das Buch für diese Auflage mit dem Computersatzsystem \LaTeX erfaßt, Aufgaben und Beispiele wurden klarer vom fortlaufenden Text getrennt.

Wir bedanken uns diesmal bei den Herren Dipl.-Phys. Kyung-Ho Kang, Dipl.-Phys. Klaus-Jürgen Lutz und Dipl.-Phys. Christoph Best für ihre ständige Hilfe bei der Neubearbeitung. Frau Steidl danken wir für die Überarbeitung sämtlicher Bilder. Herrn Dr. Kordt Griepenkerl sei besonders für die sorgfältige Koordinierung und Überwachung der Verbesserungen und der Drucklegung gedankt.

Frankfurt am Main,
Durham, N.C., im August 1994

Walter Greiner
Berndt Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Die Entdeckung der schwachen Wechselwirkung	1
1.1 Die universelle Fermi-Wechselwirkung	2
1.2 Die Verletzung der Parität	13
2 Leptonische Wechselwirkungen	30
2.1 Die Strom-Strom-Wechselwirkung (geladene Ströme)	30
2.2 Der Zerfall des Myons	33
2.3 Die Lebensdauer des Myons	49
2.4 Paritätsverletzung im Myon-Zerfall	56
2.5 Die Michel-Parameter	68
2.6 Das Tau-Lepton	89
3 Die Grenzen der Fermi-Theorie	97
3.1 Neutrale Ströme	97
3.2 Streuung eines myonischen Neutrinos an einem Elektron	99
3.3 $\bar{\nu}_\mu$ - e^- -Streuung	104
3.4 Das Verhalten der Neutrino-Elektron-Streuung bei hohen Energien .	107
3.5 Ergänzung: Streuformalismus für Teilchen mit Spin 1/2	117
3.6 Divergenzen bei Prozessen höherer Ordnung	127

4 Die Salam-Weinberg-Theorie	133
4.1 Der Higgs-Mechanismus	133
4.2 Das Yang-Mills-Feld	148
4.3 Feynman-Regeln für die Yang-Mills-Theorie	162
4.4 Das Glashow-Salam-Weinberg-Modell der Leptonen (Standard-Modell)	183
4.5 Spontane Symmetriebrechung — Der Higgs-Sektor der GSW-Theorie	193
4.6 $SU_2 \times U(1)$ Eichinvarianz	208
5 Eigenschaften der Salam-Weinberg-Theorie	219
5.1 Zerfall des geladenen Bosons $W^{(-)}$	220
5.2 Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$	226
5.3 Hochenergieverhalten der GSW-Theorie	247
6 Semileptonische Wechselwirkungen	257
6.1 Überblick über die Hadronen	257
6.2 Phänomenologie der schwachen Zerfälle von Hadronen	262
6.3 Schwache Wechselwirkung der Quarks	275
6.4 Cabibbo-Theorie	287
7 Der nukleare Betazerfall	308
7.1 Das MIT-Bag-Modell	308
7.2 Beta-Zerfall des Neutrons	316
7.3 Der nukleare Betazerfall	326
7.4 Eigenschaften erlaubter β - Zerfälle	330

8	Das neutrale Kaon-System	356
8.1	Die physikalischen Teilchen K_S, K_L	356
8.2	Die CP-Verletzung	368
9	Vereinigte Eichtheorien	378
9.1	Einführung: Die Symmetrie-Gruppe $SU(5)$	378
9.2	Einbettung der $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ in die $SU(5)$	387
9.3	Die $SU(5)$ -Eichtheorie. Das Multiplett der Eichbosonen.	407
9.4	Spontane Brechung der $SU(5)$ - Symmetrie	423
9.5	Bestimmung der Skala der $SU(5)$ -Symmetriebrechung	434
9.6	Der Protonenzerfall	445
9.7	Ausblick: Erweiterungen des Standardmodells	465
A	Vorschub über Einheiten	471
B	Die Dirac-Gleichung	474
C	Feynman-Regeln	478
D	Symmetrietransformationen	482
	Index	486

Aufgaben und Beispiele

Aufgabe:	1.1	Relativistischer Zweikörperzerfall	4
Aufgabe:	1.2	Lorentzinvariante Kopplungsoperatoren	8
Aufgabe:	1.3	Nichtrelativistischer Grenzfall der Operatoren	11
Aufgabe:	1.4	Eigenschaften des Helizitätsoperators	16
Aufgabe:	1.5	Eigenvektoren des Helizitäts- und Spinoperators	19
Aufgabe:	1.6	Linkshändige Dirac-Operatoren	27
Aufgabe:	1.7	Die Weyl-Gleichung	28
Aufgabe:	2.1	Neutrino-Elektron-Austauschstrom	32
Aufgabe:	2.2	Beweis von Gl. (2.36)	39
Aufgabe:	2.3	Das gemittelte Matricelement	40
Aufgabe:	2.4	Eigenschaften des Levi-Civita-Tensors	42
Aufgabe:	2.5	Endpunkt des Elektronenergiespektrums beim Myon- zerfall	48
Aufgabe:	2.6	Mittlere Helizität des Elektrons	52
Aufgabe:	2.7	Mittelwert der Helizität und Paritätsverletzung	59
Aufgabe:	2.8	Winkelverteilung und Paritätsverletzung	61
Aufgabe:	2.9	Helizität des Elektrons im Myon-Zerfall	63
Aufgabe:	2.10	μ^+ -Zerfall und CP-Invarianz im β -Zerfall	65
Aufgabe:	2.11	Myon-Zerfall und Michel-Parameter	72
Aufgabe:	2.12	Die Fierz-Transformation	82
Aufgabe:	2.13	Die Entdeckung des Tau-Leptons	94
Aufgabe:	3.1	Myon-Neutrino-Elektron-Streuquerschnitt	105
Aufgabe:	3.2	Wirkungsquerschnitt für Antineutrino-Elektron-Streuung	110
Aufgabe:	3.3	Myon-Neutrino-Elektron-Streuung	114
Aufgabe:	3.4	Hochenergiestreuung	117
Aufgabe:	4.1	Der Debye-Effekt	136

Beispiel:	4.2	Massenerzeugung bei wechselwirkenden Feldern	138
Aufgabe:	4.3	Eichinvarianz der kinetischen Energie des Mesonenfeldes	148
Aufgabe:	4.4	Drehungen im Isospin-Raum	156
Aufgabe:	4.5	Eichkovarianz	158
Beispiel:	4.6	Zur Vertiefung: Propagatoren und Eichinvarianz	172
Aufgabe:	4.7	Die Vertexfunktion für die Dreier-Selbstwechselwirkung	182
Beispiel:	4.8	Eichkovariante Formulierung der GSW-Theorie	189
Aufgabe:	4.9	Leptonenmassen	203
Aufgabe:	4.10	Die Massen der Vektorbosonen	204
Aufgabe:	4.11	Norm von \vec{T}_{vac}	206
Aufgabe:	5.1	Der Zerfall des Z^0 in Elektronen- und Neutrino-Paare	224
Beispiel:	5.2	Experimenteller Nachweis intermediärer Bosonen	238
Beispiel:	5.3	Präzisionsmessungen des Z^0 -Bosons	243
Aufgabe:	5.4	Beitrag der s -Welle zur Lepton-Neutrino-Streuung	255
Aufgabe:	6.1	Die Pionzerfallsrate	268
Aufgabe:	6.2	(V-A)-Kopplung im Pionzerfall	269
Aufgabe:	6.3	Unterdrückung des elektronischen Zerfallskanals des Pions	272
Aufgabe:	6.4	Mischung der Leptonenfamilien	280
Beispiel:	6.5	Neutrinooszillationen	282
Aufgabe:	6.6	293
Beispiel:	6.7	(zur Vertiefung): Abwesenheit flavourändernder neutraler Ströme	294
Aufgabe:	6.8	Cabibbo-Mischung und neutrale Ströme	295
Beispiel:	6.9	Zur Vertiefung: Paritätsverletzung in der Lepton-Nukleon-Streuung	299
Beispiel:	6.10	Paritätsverletzung in Atomen	303
Aufgabe:	7.1	Der Grundzustand im MIT-Bag	313
Aufgabe:	7.2	Der Mittlere Quadratische Radius des Nukleons	313
Aufgabe:	7.3	Parametrisierung des hadronischen Massenspektrums	315
Beispiel:	7.4	Bestimmung der Antineutrinomasse	339
Aufgabe:	7.5	Anregung des atomaren Elektrons im β -Zerfall von Tritium	341
Aufgabe:	7.6	Bestimmung von C_A/C_V	342
Aufgabe:	7.7	Astrophysikalische Schranke der Neutrinomasse	343
Beispiel:	7.8	Doppelter β - Zerfall	345

Beispiel:	7.9	Das Sonnen-Neutrino-Problem (zur Vertiefung)	348
Aufgabe:	8.1	Kaonenzerfall und CP-Parität	359
Aufgabe:	8.2	Transformation des Kaon	370
Aufgabe:	9.1	Generatoren der $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	390
Beispiel:	9.2	Zur Vertiefung: Ladungskonjugierte Felder	395
Aufgabe:	9.3	Das Quintuplet der $SU(5)$	399
Aufgabe:	9.4	$SU(5)$ -Klassifizierung	404
Aufgabe:	9.5	Die $SU(5)$ -Eichbosonen	408
Beispiel:	9.6	Konstruktion der Lagrange-Funktion	419
Aufgabe:	9.7	Minimum des Higgspotentials	425
Aufgabe:	9.8	Kinetische Energie des Higgsfeldes	429
Beispiel:	9.9	Feldtheoretische Ergänzung: Anomalie-Freiheit	443
Aufgabe:	9.10	WechselwirkungsHamiltonoperator für Protonenzerfall .	448

Kapitel 1

Die Entdeckung der schwachen Wechselwirkung

Alle uns bekannten, in der Natur auftretenden Wechselwirkungen lassen sich auf vier Wechselwirkungen (WW) zwischen Materieteilchen zurückführen, die von äußerst unterschiedlicher Stärke sind:

Wechselwirkung	Relative Stärke	Reichweite
Gravitation	10^{-41}	∞
„Schwache“ WW	10^{-15}	$\ll 1\text{fm}$
Elektromagn. WW	10^{-2}	∞
„Starke“ WW	1	$\approx 1\text{fm}$

Tabelle 1.1: Wechselwirkungsstärken

Im Gegensatz z. B. zur starken Wechselwirkung besteht die schwache Wechselwirkung zwischen allen Teilchen. Sie verursacht Reaktionen, die diese Teilchen bis zu stabilen Leptonen bzw. Hadronen (Elektronen, Neutrinos und Protonen) zerfallen lassen.

Charakteristisch ist dabei der Ladungswechsel der reagierenden Teilchen. Die geringe Stärke der schwachen Wechselwirkung geht einher mit ihrer sehr kurzen Reichweite. Im Unterschied zu allen anderen Wechselwirkungen führt die schwache Wechselwirkung daher nicht zur Bildung gebundener Zustände, wie es z. B. die starke Wechselwirkung bei der Bildung von Atomkernen oder die elektromagnetische bei den Atomen und Molekülen tut. Um unsere heutige Vorstellung von der schwachen Wechselwirkung zu begreifen, ist es zweckmäßig, mit einem kurzen Rückblick auf ihre Entdeckungsgeschichte zu beginnen.

1.1 Die universelle Fermi-Wechselwirkung

Im Jahre 1896 entdeckte Henri Becquerel ¹, daß Urankristalle in der Lage sind, einen lichtempfindlichen Film bei Kontakt zu schwärzen. In den darauffolgenden Jahren gelang es Becquerel, Kaufmann ² und Rutherford ³ zu zeigen, daß das Uranerz - wie einige andere Materialien - schnelle, elektrisch geladene Strahlen (hier die sogenannten *Betastrahlen*) aussenden, die nichts anderes sind als sich mit annähernd Lichtgeschwindigkeit bewegende Elektronen.

Wie wir heute wissen, stammen diese Betastrahlen aus dem Zerfall von ${}_{91}^{234}\text{Pa}$ in ${}_{92}^{234}\text{U}$ und anderen Kernzerfällen. Um 1910 nahm man zunächst an, daß die beim β -Zerfall mit Energien von bis zu 2,5 MeV emittierten Elektronen auch schon vor dem Zerfall im Atomkern vorhanden wären. Das war ein schwer verständliches Problem, denn die Elektronen sollten sich nach dem Bohrschen Modell vor allem auf den Bohrschen Bahnen, also weit außerhalb des Kerns bewegen.

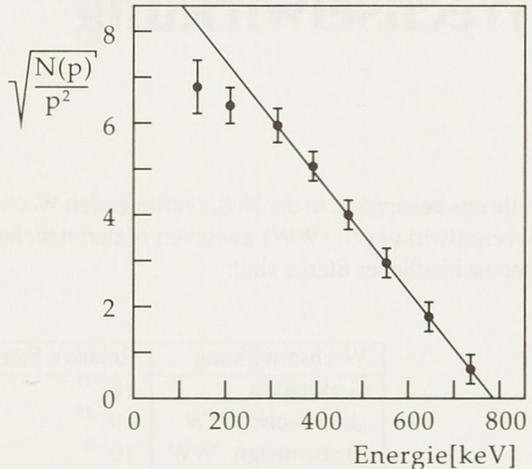


Abb. 1.1: Form des kontinuierlichen β -Spektrums.

Nach der heutigen Klärung des Atomaufbaus (Kern und Hülle) muß dabei ein Neutron unter Aussendung eines Elektrons in ein Proton verwandelt werden. Dies wurde mit der Entdeckung des Neutrons (Chadwick ⁴, 1932) klar:

¹Henri Antoine Becquerel, Professor der Physik an der Ecole Polytechnique in Paris, geb. 15.12.1852 in Paris, gestorben 15.8.1908 in Le Croisic (Frankreich), erhielt 1903 den Nobelpreis zusammen mit Pierre und Marie Curie für die Entdeckung der natürlichen Radioaktivität.

²Walter Kaufmann, Ordinarius des physikalischen Instituts der Universität Königsberg, geb. 5.6.1871 in Elberfeld, gest. 1.1.1947 in Freiburg/Breisgau. Er bestimmte das Ladungs/Masse-Verhältnis der β -Teilchen; 1901 gelang ihm der Nachweis der Zunahme der Elektronenmasse mit wachsender Geschwindigkeit.

³Sir Ernest Rutherford, Professor der Physik an der Victoria Universität in Manchester, geb. 30.8.1871 in Nelson (Neuseeland), gest. 19.10.1937 in Cambridge. Er erhielt 1908 den Chemienobelpreis für seine Untersuchungen über den Zerfall der Elemente und der Chemie der radioaktiven Stoffe.

⁴James Chadwick, Professor an der Universität Liverpool, geb. 20.10.1891 in Manchester, war Schüler von Ernest Rutherford und Hans Geiger. Ihm gelang 1932 der Nachweis des Neutrons in einer Ionisationskammer, wofür er 1935 den Nobelpreis erhielt.

Das Elektron entsteht beim β -Zerfall erst während der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, womit sich die anfänglichen Schwierigkeiten als gegenstandslos erwiesen. Eine weitere Schwierigkeit für das Verständniss des β -Zerfalls bestand darin, daß Elektronen mit einem *kontinuierlichen Spektrum* emittiert werden. Da Ausgangs- und Endkern eine wohldefinierte Energie besitzen, käme dies einer Verletzung der Energieerhaltung gleich (vgl. Aufgabe 1.1).

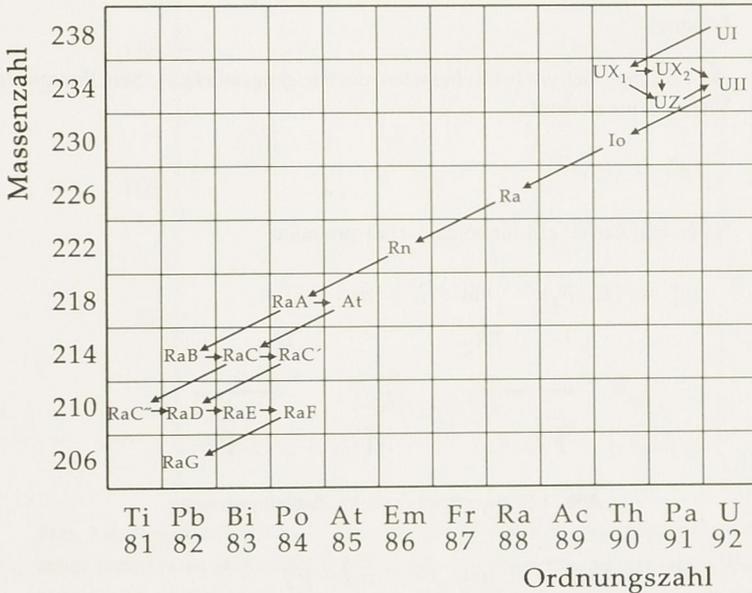


Abb. 1.2: Die Uranreihe. Innerhalb der langen Zerfallskette war vermutlich der β -Zerfall von $^{234}_{91}\text{Pb}$ nach $^{234}_{92}\text{U}$ (von UX₂ nach UII) für die Schwärzung von Becquerels Photoplatten verantwortlich.

1.1 AUFGABE: RELATIVISTISCHER ZWEIKÖRPERZERFALL

Zeigen Sie mit Hilfe des relativistischen Energie- und Impulssatzes, daß beim Zerfall eines ruhenden Teilchens der Massen M in zwei Teilchen der Masse m_1, m_2 die beiden Teilchen wohldefinierte Energien haben müssen.

Lösung:

Zur Lösung gehen wir ins Ruhesystem des Ausgangsteilchens. Sein Energie-Impuls-Vierervektor ist dann:

$$p^\mu = (M, \vec{0}) \quad \underline{1}$$

Nach dem Zerfall gilt für beide Zerfallsprodukte:

$$p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1) \quad \text{mit} \quad E_1^2 = m_1^2 + \vec{p}_1^2, \quad \underline{2}$$



Abb. 1.3: Bezeichnungen im Zweikörperzerfall

$$p_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2) \quad \text{mit} \quad E_2^2 = m_2^2 + \vec{p}_2^2. \quad \underline{3}$$

Der Energie-Impuls-Erhaltungssatz verlangt, daß

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu. \quad \underline{4}$$

ist. Die räumlichen Komponenten liefern

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \text{d. h.} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1, \quad \underline{5}$$

womit man aus der zeitartigen Komponente

$$M = E_1 + E_2 = (m_1^2 + \vec{p}_1^2)^{1/2} + (m_2^2 + \vec{p}_1^2)^{1/2} \quad \underline{6}$$

erhält.

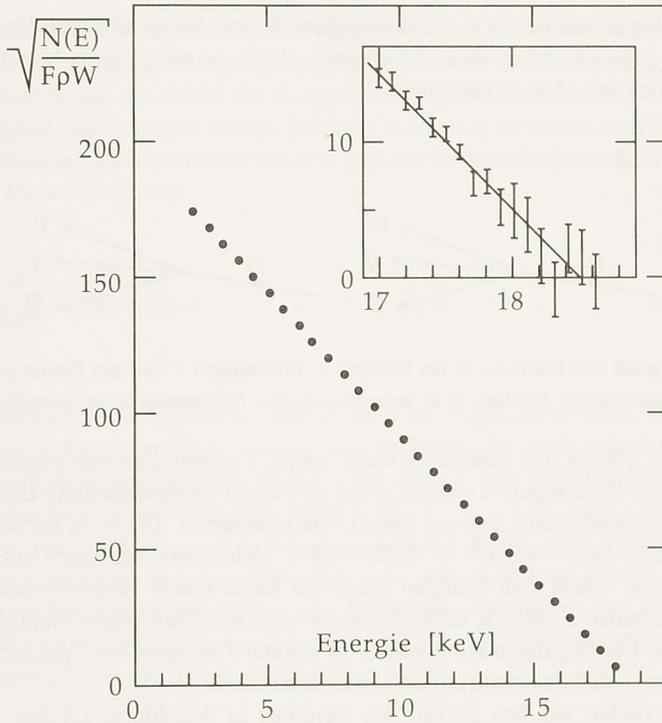


Abb. 1.4: Sogenannter *Fermi-Kurie-Plot* des β -Spektrums von Tritium (${}^3\text{H}$). Der Einbruch rechts oben zeigt, daß es Elektronen mit der vollen Zerfallsenergie gibt. Daraus kann man schließen, daß das Neutrino (fast) masselos sein muß. Die Darstellung ist benannt nach F. N. D. Kurie, 1936.

Durch einige Umformungen ergibt sich

$$\vec{p}_1^2 = \frac{M^2}{4} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2}, \quad 7$$

d. h. \vec{p}_1^2 ist eindeutig bestimmt. Damit sind auch E_1 und E_2 eindeutig festgelegt:

$$E_1 = \frac{M}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M}{2} + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2M}. \quad 8$$

Pauli ⁵ schlug deshalb 1930 vor, daß beim Zerfall eines Neutrons außer dem Elektron noch ein weiteres Teilchen ohne elektrische Ladung und mit geringer Masse emittiert wird, nämlich das (Anti-) Neutrino:

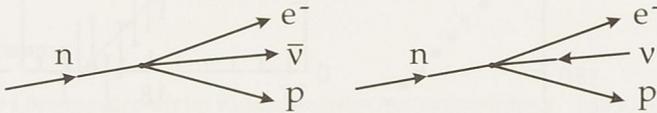


Abb. 1.5: Zerfall des Neutrons in ein Elektron e , Antineutrino $\bar{\nu}$ und ein Proton p : a) in der Sprache physikalischer Teilchen, b) in rechen-technischer (feldtheoretischer) Sprache.

Da Neutron, Proton und Elektron jeweils Spin $\hbar/2$ tragen, läßt sich gleichzeitig die Erhaltung des Drehimpulses sichern, wenn man dem Neutrino ebenfalls den Spin $\hbar/2$ zuordnet. Es handelt sich also um einen Dreikörperzerfall. Die beim Zerfall freiwerdende Energie $(m_n - m_p)c^2 = 1,2934 \text{ MeV}$ verteilt sich statistisch auf Elektron und Neutrino. Nach dem heutigen Stand der Experimente ist die Ruhemasse des Neutrinos kleiner als 60 eV, möglicherweise identisch Null (siehe Abbildung 1.4). Auf neueste Überlegungen kommen wir in Kapitel 7 zu sprechen. Vorläufig wollen wir annehmen, daß das Neutrino exakt masselos ist.

Graphisch stellen wir den Zerfall des Neutrons in Abbildung 1.5 dar. Fermi ⁶ baute 1934 Paulis Idee zu einer quantitativen Theorie des β -Zerfalls aus. Er postulierte dazu, daß sich der Zerfallsprozeß beschreiben läßt, indem man zur Hamilton-Funktion für die vier freien Teilchen noch einen Wechselwirkungsterm addiert:

$$H_F = H_n^0 + H_p^0 + H_e^0 + H_\nu^0 + \underbrace{\sum_i C_i \int d^3x (\bar{u}_p \hat{O}_i u_n)(\bar{u}_e \hat{O}_i u_\nu)}_{\text{Wechselwirkungsterm}} \quad (1.2)$$

⁵Wolfgang Pauli, Professor an der Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, geb. 25.4.1900 in Wien, gest. 15.12.1958 in Zürich, Schüler Arnold Sommerfelds und Max Borns. Er wurde 1945 mit dem Nobelpreis für die Entdeckung des als Pauliprinzip bezeichneten Ausschlußprinzips ausgezeichnet. Außerdem schuf er die erste Theorie des Spins für Elektronen, was sich in der sogenannten „Pauli-Gleichung“ niederschlug (vgl. Bd. 4 der Vorlesung).

⁶Enrico Fermi (geb. 19.9.1901 in Rom, gest. 28.11.1954 in Chicago). Seit 1927 Professor der theoret. Physik in Rom. Nobelpreis 1938 für die Entdeckung künstlicher radioaktiver Elemente und der durch langsame Neutronen ausgelösten Kettenreaktionen. 1938 mußte er in die USA emigrieren, wo er ab 1941 an den Atomreaktor/Atombomben-Projekten in New York, Chicago und Los Alamos beteiligt war. Fermi nimmt in der Physik des 20. Jahrhunderts eine hervorragende Stellung durch die Tatsache ein, daß er gleichermaßen bedeutsame Arbeiten auf theoretischem wie experimentellem Gebiet geleistet hat.