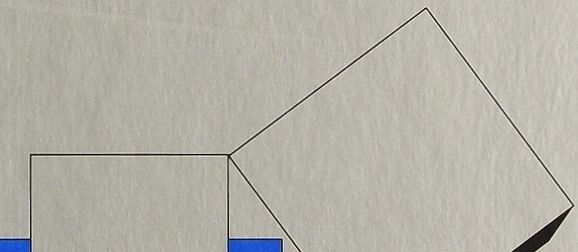
W.I. Smirnow

Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil III/1



Verlag Harri Deutsch

W. I. SMIRNOW

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL III/1

Titel der Originalausgabe

В.И. Смирнов
Курс высшей математики, Том 3, Часть 1
Наука, Москва 1967

Die Übersetzung aus dem Russischen besorgte nach der 5. Auflage eine Arbeitsgemeinschaft unter Anleitung von Lew Arkadjewitsch Kaloujnine.

Die Überarbeitung der zweiten Auflage der Übersetzung besorgte Herbert Karl.

Die Überarbeitung nach der im Jahre 1967 erschienenen neunten, berichtigten russischen Auflage erfolgte durch Gerhard Pfister.

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN-10 **3-8171-1299-8**
ISBN-13 **978-3-8171-1299-9**

Unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1991, 2006

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt

Printed in Germany

Geleitwort des Verlages

Der Verlag Harri Deutsch hat zu erheblichen Teilen die Tradition übernommen, wichtige Titel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichs russischer Autoren in deutscher Sprache weiterzuführen oder neu zu erschließen. So werden wir auch dieses schon klassisch gewordene Lehrbuch der höheren Mathematik weiter komplett lieferbar halten. Für Hinweise auf Druckfehler und Verbesserungs- oder Ergänzungsvorschläge der Benutzer sind wir stets dankbar und erbitten diese an:

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.harri-deutsch.de/verlag/

Inhalt

I. Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen

§ 1. Die Determinante und ihre Eigenschaften

1. Definition der Determinante. Wir beginnen in diesem Paragraphen mit der Lösung eines einfachen algebraischen Problems, und zwar mit der Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Die Beschäftigung damit führt uns zu dem wichtigen Begriff der Determinante.

Wir betrachten zunächst einige der einfachsten Spezialfälle. Gegeben sei ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\,,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\,.$$

Die Koeffizienten a_{ik} der Unbekannten haben zwei Indizes. Der erste Index bezeichnet die Gleichung, in der der Koeffizient vorkommt, der zweite die Unbekannte, bei der er steht.

Die Lösung dieses Gleichungssystems hat bekanntlich die Gestalt

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,.$$

Wir betrachten nun drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\,,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\,,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\,.$$

Dabei benutzen wir auch wieder das oben über die Koeffizienten Gesagte. Wir schreiben die ersten beiden Gleichungen in der Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3\,,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3\,.$$

Ihre Lösungen x_1 und x_2 lauten nach den obigen Formeln

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{13}x_3)\,a_{22} - a_{12}(b_2 - a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,,$$

$$x_2 = \frac{a_{11}(b_2 - a_{23}x_3) - (b_1 - a_{13}x_3)\,a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,.$$

Setzt man dies in die verbliebene letzte Gleichung ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von x_3 und als deren Lösung schließlich den Ausdruck für diese Unbekannte:

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}b_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}\,. \tag{1}$$

Betrachten wir die Struktur dieses Ausdrucks genauer, so können wir zunächst feststellen, daß wir den Zähler aus dem Nenner erhalten, indem wir die Koeffizienten a_{i3} der gesuchten Unbekannten durch die freien Glieder b_i ersetzen. Es bleibt also noch das Bildungsgesetz des Nenners festzustellen. Dieser enthält keine freien Glieder, sondern setzt sich ausschließlich aus den Koeffizienten des Gleichungssystems zusammen. Diese Koeffizienten schreiben wir in Form eines quadratischen Schemas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Das Schema besteht aus drei Zeilen und drei Spalten. Die Zahlen a_{ik} heißen seine Elemente. Der erste Index bezeichnet die Zeile, in der das Element steht, der zweite gibt die Nummer der Spalte an. Der Nenner des Ausdrucks (1),

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\,, \tag{3}$$

besteht aus sechs Gliedern, die sämtlich Produkte dreier Elemente des Schemas (2) sind. Dabei enthält ein solches Produkt Elemente aus jeder Zeile und jeder Spalte. Es hat nämlich die Gestalt

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}\,, \tag{4}$$

wobei p, q, r die Zahlen 1, 2, 3 in einer bestimmten Anordnung sind. Somit kommen sowohl unter den ersten als auch unter den zweiten Indizes alle drei Zahlen 1, 2, 3 vor, und das Produkt (4) besteht genau aus je einem Element aus jeder Zeile und Spalte. Um alle Glieder von (3) zu erhalten, muß man in dem Produkt (4) die zweiten Indizes p, q, r in allen möglichen Anordnungen wählen. Es gibt genau sechs verschiedene Anordnungen der zweiten Indizes:

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1\,. \tag{5}$$

So erhalten wir alle sechs Glieder von (3). Einige Produkte gehen nun in (3) mit dem Pluszeichen, andere mit dem Minuszeichen ein, und es bleibt zu klären, nach welcher Regel die Vorzeichen zu wählen sind. Das Pluszeichen steht vor den Produkten (4), deren zweite Indizes die Anordnungen

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2 \tag{5$_1$}$$

bilden, während die übrigen Produkte mit den Anordnungen

$$1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1 \tag{5$_2$}$$

das Minuszeichen haben. Wie unterscheiden sich nun die Anordnungen (5_1) von den Anordnungen (5_2)? Steht in einer Anordnung eine größere Zahl vor einer kleineren, so sprechen wir von einer *Inversion*. Wir bestimmen die Anzahl der Inversionen in den Anordnungen (5_1). Die erste Anordnung besitzt keine solche; die Anzahl der Inversionen ist also gleich 0. Wir betrachten nun die zweite Anordnung und vergleichen die Größe jeder darin vorkommenden Zahl mit allen folgenden. Diese Anordnung hat zwei Inversionen: Es steht 2 vor 1 und 3 vor 1. Auch die dritte der Anordnungen (5_1) besitzt zwei Inversionen. Zusammenfassend kann man sagen, daß alle Anordnungen (5_1) eine gerade Anzahl von Inversionen haben. Untersucht man die Anordnungen (5_2), so findet man, daß sie eine ungerade Anzahl von Inversionen enthalten. Die Vorzeichenregel für den Ausdruck (3) können wir nun wie folgt formulieren: Das Pluszeichen erhalten die Produkte, in denen die Anordnungen der zweiten Indizes eine gerade Anzahl von Inversionen haben. Die Produkte, bei denen diese Anordnungen eine ungerade Anzahl von Inversionen besitzen, gehen in (3) mit dem Minuszeichen ein. Der Ausdruck (3) heißt die zum Schema (2) gehörige *Determinante dritten Grades*. Die obigen Betrachtungen legen es nahe, in analoger Weise Determinanten beliebigen Grades zu definieren.

Es seien n^2 Zahlen in Form eines quadratischen Schemas mit n Zeilen und n Spalten gegeben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Die Elemente a_{ik} dieses Schemas seien komplexe Zahlen; die Indizes i und k geben die Nummer der Zeile und Spalte an, in deren Schnittpunkt die Zahl a_{ik} steht. Bilden wir aus den Zahlen dieses Schemas alle möglichen Produkte, die aus jeder Zeile und jeder Spalte ein Element enthalten, so haben sie folgendes Aussehen:

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \tag{7}$$

Hierbei sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in einer bestimmten Anordnung. Um alle möglichen Produkte der Gestalt (7) zu erhalten, muß man alle möglichen Permutationen der zweiten Indizes vornehmen. Wie aus der elementaren Algebra bekannt ist, ist die Anzahl dieser Permutationen gleich dem Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

Im Vergleich zu der ausgezeichneten Anordnung $1, 2, 3, \ldots, n$ besitzt jede der obigen Anordnungen eine bestimmte Anzahl von Inversionen. Hat die Anordnung der zweiten Indizes eine gerade Anzahl von Inversionen, so erhält das Produkt das Pluszeichen. Ist die Anzahl der Inversionen dagegen ungerade, so erhält das Produkt das Minuszeichen. Die Summe über alle so erhaltenen Produkte heißt die zum Schema (6) gehörige *Determinante n-ten Grades*. Diese Summe besteht demnach aus $n!$ Summanden. Unsere Definition läßt sich leicht als Formel schreiben. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Ist $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so notieren wir die Anzahl der Inversionen dieser Anordnung durch

$$[p_1, p_2, \ldots, p_n].$$

Um die Determinante des Schemas (6) zu bezeichnen, schreiben wir dieses Schema zwischen senkrechte Striche. Mit dieser Bezeichnungsweise läßt sich die obige Definition durch die Formel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1, p_2, \ldots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{8}$$

zusammenfassen. Die Summation erstreckt sich über alle möglichen Anordnungen der zweiten Indizes, d. h. über alle Anordnungen $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Meinen wir das Schema (6) selbst und nicht die daraus hergeleitete Determinante, so setzen wir es zwischen runde Klammern.

Im Ausdruck (3) hatten wir die Faktoren eines jeden Produkts so angeordnet, daß die ersten Indizes die ausgezeichnete Anordnung 1, 2, 3 bilden, und alle unsere Überlegungen bezogen sich dann auf die von den zweiten Indizes gebildeten Anordnungen. Umgekehrt kann man aber auch die Faktoren eines jeden Produkts so umordnen, daß die zweiten Indizes in ihrer natürlichen Reihenfolge stehen; dann erhält (3) die Gestalt

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}\,. \tag{9}$$

Hier bilden die ersten Indizes alle möglichen Anordnungen (p, q, r), wobei man leicht nachprüft, daß die Vorzeichenregel für die Glieder von (9) genauso zu formulieren ist wie oben, aber diesmal bezüglich der ersten Indizes. Das führt uns dazu, neben der Summe (8) auch die ihr analoge Summe

$$\sum_{(p_1, p_2, \ldots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]}\, a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \tag{10}$$

zu betrachten. Diese Summe besteht aus denselben Gliedern wie (8). Später wird sich ergeben, daß auch die Vorzeichen der einzelnen Glieder in beiden Ausdrücken dieselben sind, d. h., daß wie für $n = 3$ die Summe (10) mit (8) übereinstimmt.

Wir wenden uns schließlich noch dem Fall $n = 2$ zu. Hier hat das Schema die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

und (8) ergibt folgenden Ausdruck für die zu diesem Schema gehörige Determinante zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,. \tag{11}$$

Die obigen Betrachtungen zeigen, daß wir zum Studium der Eigenschaften der Determinante zunächst die Eigenschaften der Permutationen kennenlernen müssen.

2. Permutationen. Gegeben seien n Elemente in einer bestimmten Anordnung. Wir nennen dies eine aus den Elementen gebildete *Permutation*. Zuerst wollen wir zeigen, daß es genau $n!$ verschiedene Permutationen von n Elementen gibt. Für $n = 2$ ist dies klar, da zwei Elemente nur zwei verschiedene Permutationen bilden können. Für $n = 3$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Aufstellung der Permutationen (5). Die Elemente sind hier die Zahlen 1, 2, 3. Man überzeugt sich leicht, daß (5) alle möglichen Permutationen aus diesen drei Elementen erschöpft. Für beliebige n beweisen wir unsere Behauptung durch vollständige Induktion. Angenommen, für n sei sie bewiesen; dann wollen wir zeigen, daß sie auch für $n + 1$ Elemente gültig ist. Wir nehmen also an, daß n Elemente $n!$ Permutationen bilden, und betrachten wir $n + 1$ Elemente, die wir mit

$$C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$$

bezeichnen. Wir wollen zunächst diejenigen Permutationen betrachten, deren erstes Element C_1 ist. Um diese zu erhalten, setzen wir an die erste Stelle das Element C_1 und schreiben dahinter alle möglichen Permutationen der restlichen n Elemente. Die Anzahl der letzteren ist aber nach Voraussetzung $n!$. Somit ist auch die Anzahl der mit C_1 beginnenden Permutationen der Elemente C_k ($k = 1, 2, \ldots, n + 1$) gleich $n!$. Ebenso ist die Anzahl der mit dem Element C_2 beginnenden Permutationen gleich $n!$ usw. Insgesamt ist also die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Elemente C_k gleich

$$n! \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n + 1) = (n + 1)!\,,$$

was zu beweisen war.

Wir können selbstverständlich im folgenden annehmen, daß an Stelle beliebiger Elemente ganze Zahlen, beginnend mit 1, gewählt sind. Wir definieren als *Transposition* diejenige Operation, die in der Vertauschung zweier Elemente einer Permutation besteht. Jede vorgegebene Permutation kann man aus jeder anderen durch Ausführung endlich vieler Transpositionen erhalten. Wir betrachten als Beispiel zwei Permutationen von vier Elementen:

$$1, 3, 4, 2; \qquad 2, 4, 1, 3\,.$$

Mit Hilfe von Transpositionen kann man die erste Permutation in folgender Weise in die zweite überführen:

$$1, 3, 4, 2 \to 2, 3, 4, 1 \to 2, 4, 3, 1 \to 2, 4, 1, 3\,.$$

Wir benötigen hier also drei Transpositionen, um obige Permutationen ineinander überzuführen. Hätten wir andere Transpositionen vorgenommen, so hätten wir die zweite Permutation auf einem anderen Wege aus der ersten erhalten; dabei zeigt sich: Die Anzahl der Transpositionen, die für den Übergang von einer Permutation zu einer anderen notwendig sind, ist nicht eindeutig bestimmt. Man kann von einer Permutation zu einer anderen mit Hilfe verschiedener Transpositionen übergehen. Dabei kann sich die Anzahl ändern. Für uns ist jedoch wesentlich, daß für zwei vorgegebene Permutationen diese verschiedenen Anzahlen entweder stets gerade oder stets ungerade sind. Um das zu beweisen, führen wir den Begriff der Inversion ein, den wir schon im vorigen Abschnitt benutzt haben. Gegeben sei eine Permutation der n Elemente $1, 2, \ldots, n$. Die Permutation mit der natürlichen Reihenfolge der Zahlen nennen wir die *ausgezeichnete Permutation*:

$$1, 2, \ldots, n\,. \tag{12}$$

Stehen zwei Elemente einer Permutation nicht in der Reihenfolge der ausgezeichneten Permutation (12), steht also eine größere Zahl vor einer kleineren, so sprechen wir von einer *Inversion*. Die Permutationen mit einer geraden Anzahl von Inversionen heißen *Permutationen der ersten*, die mit einer ungeraden Anzahl von Inversionen solche der *zweiten Klasse*. Für das Weitere ist folgender Satz wesentlich:

Eine Transposition ändert die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

In einer Permutation

$$a, b, \ldots, k, \ldots, p, \ldots, s \tag{13}$$

führen wir eine Transposition der Elemente k und p aus, d. h., wir vertauschen diese beiden Elemente. Die Lage von k und p gegenüber den Elementen links von k und rechts von p bleibt dabei unverändert. Es ändert sich lediglich die Stellung von k und p zu den Elementen, die in der Permutation zwischen ihnen stehen, sowie die gegenseitige Lage von k und p. Wie ändert sich dabei die Anzahl der Inversionen? Angenommen, zwischen k und p stehen in (13) m Elemente, von denen α mit k in natürlicher Anordnung stehen, während β mit k eine Inversion bilden. Bezüglich p sollen α_1 in natürlicher Reihenfolge stehen und β_1 mit p eine Inversion bilden; dann ist

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = m\,. \tag{14}$$

Die Transposition verwandelt nun die natürliche Anordnung in eine Inversion und umgekehrt. Genauer formuliert heißt das: Standen k und ein Element zwischen k und p vor der Transposition in der natürlichen Reihenfolge, so bilden sie nach der Transposition eine Inversion und umgekehrt. Ein analoges Resultat gilt für p. Die genaue Anzahl der Inversionen von k und p mit den dazwischenstehenden Elementen war also vor der Transposition gleich $\beta + \beta_1$ und ist nach der Transposition gleich $\alpha + \alpha_1$. Die Anzahl der Inversionen ändert sich also um

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (\beta + \beta_1)\,.$$

Dies ergibt, unter Benutzung von (14),

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (m - \alpha + m - \alpha_1) = 2(\alpha + \alpha_1 - m)\,,$$

woraus hervorgeht, daß γ gerade ist. Wir müssen nun noch die gegenseitige Lage von k und p untersuchen. Standen diese Elemente vor der Transposition in der natürlichen Reihenfolge, so bilden sie danach eine Inversion und umgekehrt. Hier ändert sich also die Anzahl der Inversionen genau um 1. Die gesamte durch eine Transposition bewirkte Änderung der Anzahl der Inversionen ist somit ungerade.

Wir wollen aus diesem Satz einige Folgerungen ziehen:

Folgerung I. Schreibt man alle $n!$ Permutationen auf und führt in jeder eine Transposition zweier bestimmter Elemente (z. B. der Elemente 1 und 3) aus, so gehen alle Permutationen der ersten Klasse in solche der zweiten über und umgekehrt. Insgesamt erhält man jedoch wieder alle $n!$ Permutationen. Daraus folgt unmittelbar: *Es gibt ebensoviel Permutationen der ersten Klasse wie Permutationen der zweiten Klasse.*

Folgerung II. Jede Permutation kann aus der ausgezeichneten mit Hilfe von Transpositionen gewonnen werden. Aus dem obigen Satz ergibt sich folgende Aussage: *Die erste Klasse besteht aus den Permutationen, die aus der ausgezeichneten durch eine gerade Anzahl von Transpositionen hervorgehen; die zweite Klasse dagegen wird von allen Permutationen gebildet, für die die entsprechende Anzahl der Transpositionen ungerade ist.*

Folgerung III. Die Wahl der ausgezeichneten Permutation ist völlig willkürlich. An Stelle von (12) könnten wir irgendeine andere Permutation auszeichnen. Man muß jedoch bei der Definition der Inversionen einer Permutation diese mit der jeweils ausgezeichneten vergleichen. Man hat also von der Ordnung auszugehen, in der die Elemente in der ausgezeichneten Permutation stehen. Zeichnet man an Stelle von (12) eine andere Permutation der ersten Klasse aus, so sieht man leicht, daß die Permutationen der ersten Klasse auch in bezug auf die neue ausgezeichnete Permutation zur ersten Klasse gehören. Entsprechendes gilt für die

Permutationen der zweiten Klasse. Wählt man aber umgekehrt eine Permutation der zweiten Klasse als ausgezeichnete Permutation, so gehen die Permutationen der zweiten Klasse in Permutationen der ersten Klasse über und umgekehrt.

Nehmen wir zum Beispiel unter den sechs Permutationen der Elemente 1, 2, 3 die Permutation 2, 1, 3 als ausgezeichnete Permutation, so sind nunmehr die Permutationen der ersten Klasse

$$2, 1, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 3, 2, 1\,.$$

Die zweite Permutation hat zwei Inversionen: 1 steht vor 2, und 3 steht vor 2, während in der ausgezeichneten 2 vor 1 und 2 vor 3 steht. Die Permutationen der zweiten Klasse sind

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2\,.$$

Die erste Permutation hat im Vergleich mit der ausgezeichneten Permutation 2, 1, 3 eine Inversion: 1 steht vor 2.

Im Hinblick auf das oben Gesagte können wir die Vorzeichenregel für den Ausdruck (8) folgendermaßen formulieren: *Gehört die Permutation der zweiten Indizes eines Produkts zur ersten Klasse, so erhält dieses das Pluszeichen, gehört sie zur zweiten Klasse, so erhält das Produkt das Minuszeichen. Dabei ist* 1, 2, ... , n *als ausgezeichnete Permutation zugrunde gelegt.*

Im folgenden beweisen wir eine der grundlegenden Eigenschaften der Determinante. In dem Schema der Elemente einer Determinante vertauschen wir die erste und zweite Spalte. Das Element a_{ik} wollen wir auch nach der Vertauschung mit demselben Buchstaben und denselben Indizes bezeichnen. An Stelle von (6) erhalten wir nun das Schema

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Mit Hilfe der Definition durch die Formel (8) können wir die zu (15) gehörige Determinante bilden. In diesem Schema lautet die Numerierung der Spalten: 2, 1, 3, ... , n. Diese Permutation müssen wir als die ausgezeichnete ansehen. Sie geht aus der ursprünglichen ausgezeichneten Permutation durch eine Transposition hervor. Vor der Transposition gehörte sie also zur zweiten Klasse. Nachdem wir sie jetzt als die neue ausgezeichnete Permutation wählen, gehen die Permutationen der zweiten Klasse in die der ersten Klasse über und umgekehrt. Die zu (15) gehörige Determinante ist also die Summe derselben Glieder wie in (8), nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, da, wie soeben gezeigt, die Permutationsklassen der zweiten Indizes vertauscht sind. *Bei Vertauschung zweier Spalten ändert also der Wert der Determinante sein Vorzeichen.* Wir haben diese Eigenschaft nur für die Vertauschung der ersten und zweiten Spalte bewiesen, doch verläuft der Beweis für die Vertauschung zweier beliebiger Spalten genauso. So gilt z. B. die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante erhält man aus der ersten durch Vertauschung der zweiten und dritten Spalte.

Wir wollen noch eine weitere Eigenschaft der Determinante beweisen. Es sei

$$(-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]}\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{16_1}$$

ein Glied der Summe (8). Ändern wir die Anordnung der einzelnen Faktoren, so können wir die natürliche Reihenfolge der zweiten Indizes herstellen; doch bilden dann die ersten Indizes eine Permutation $q_1, q_2, \ldots, q_n$, und der obenstehende Ausdruck erhält die Gestalt

$$(-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]}\, a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}\,. \tag{16_2}$$

Den Übergang von (16_1) nach (16_2) kann man mit Hilfe einer Reihe von Transpositionen der Faktoren vollziehen. Jede solche Transposition bewirkt sowohl eine Transposition der ersten als auch der zweiten Indizes. Ist die Anzahl der für den Übergang von (16_1) nach (16_2) notwendigen Transpositionen gerade, so gehört die Permutation $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zur ersten Klasse, da man sie dann mit Hilfe einer geraden Anzahl von Transpositionen in die ausgezeichnete Permutation $1, 2, \ldots, n$ überführen und folglich auch durch eine gerade Anzahl von Transpositionen aus dieser gewinnen kann. Damit gehört aber auch die Permutation $q_1, q_2, \ldots, q_n$ zur ersten Klasse, da sie durch die Anwendung derselben geraden Anzahl von Transpositionen aus der ausgezeichneten Permutation $1, 2, \ldots, n$ hervorgeht. Liegt $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in der zweiten Klasse, so auch $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Daraus folgt

$$(-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]} = (-1)^{[q_1, q_2, \ldots, q_n]}\,,$$

und wir können folglich

$$(-1)^{[p_1, p_2, \ldots, p_n]}\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{[q_1, q_2, \ldots, q_n]}\, a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

schreiben. Vergleichen wir die entsprechenden Summanden von (8) und (10), so sehen wir, daß die beiden Ausdrücke identisch sind. In (10) übernehmen die Zeilen die Rolle der Spalten von (8). Aus diesen Überlegungen folgt unmittelbar: *Vertauscht man in einem Schema Zeilen mit Spalten, ohne ihre Reihenfolge zu ändern, so bleibt der Wert der Determinante unverändert.*

So sind z. B. folgende Determinanten einander gleich:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Grundlegende Eigenschaften der Determinante.

I. Wir formulieren zuerst nochmals die soeben bewiesene Eigenschaft: *Bei Vertauschung der Zeilen mit den Spalten ändert sich der Wert einer Determinante nicht.* Im folgenden gilt somit alles, was für die Spalten bewiesen ist, auch für Zeilen, und umgekehrt.

II. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß die Determinante bei Vertauschung zweier Spalten lediglich ihr Vorzeichen ändert. Dasselbe gilt demnach für Zeilen: *Bei Vertauschung zweier Zeilen (Spalten) ändert die Determinante ihr Vorzeichen.*

III. Besitzt eine Determinante zwei gleiche Zeilen und vertauscht man diese, so ändert sich zwar nicht das Aussehen der Determinante, jedoch auf Grund der Eigenschaft II ihr Vorzeichen. Bezeichnen wir die Determinante mit Δ, so gilt $\Delta = -\Delta$, d. h. $\Delta = 0$. *Eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen (Spalten) ist gleich* 0.

IV. Ein Polynom ersten Grades in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ohne konstantes Glied, d. h. einen Ausdruck der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n ,$$

wobei die Koeffizienten a_i nicht von den x_i abhängig sind, nennen wir eine *homogene lineare Funktion der Variablen* $x_1, x_2, \dots, x_n$. Eine solche Funktion besitzt zwei leicht zu verifizierende Eigenschaften:

$$\varphi(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) ,$$

$$\varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) .$$

Die letzte Eigenschaft gilt auch für beliebig viele Summanden. In (8) enthält jeder Summand genau ein Element aus jeder Zeile als Faktor. Daraus folgt, daß *die Determinante eine homogene lineare Funktion der Elemente einer Zeile (oder auch einer Spalte) ist. Enthalten also alle Elemente einer Zeile (Spalte) einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen vor das Determinantenzeichen ziehen.*

Die dem Schema (6) entsprechende Determinante bezeichnet man im allgemeinen, wie schon oben bemerkt, mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder auch kürzer mit

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n) .$$

Dann kann man die bewiesene Eigenschaft für $n = 3$ bei Anwendung auf die erste Zeile wie folgt schreiben:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Die zweite der genannten Eigenschaften einer homogenen linearen Funktion liefert für die Determinante folgende Eigenschaft: *Bestehen die Elemente einer Zeile (Spalte) aus einer bestimmten Anzahl von Summanden, so ist auch die Determinante gleich der Summe der Determinanten, in denen die Elemente der erwähnten Zeile (Spalte) durch die einzelnen Summanden ersetzt sind.* Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c + c' \\ d & e & f + f' \\ g & h & i + i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & i' \end{vmatrix} .$$

Als Folgerung aus der Homogenität und Linearität ergibt sich noch: *Sind sämtliche Elemente einer Zeile (Spalte) gleich* 0, *so ist auch die Determinante selbst gleich* 0.

V. Streicht man in (6) die i-te Zeile und k-te Spalte, in deren Schnittpunkt das Element a_{ik} steht, so bleiben $n-1$ Zeilen und ebenso viele Spalten übrig. Die zugehörige Determinante $(n-1)$-ten Grades heißt der zu a_{ik} gehörige *Minor* der ursprünglichen Determinante n-ten Grades. Wir bezeichnen sie mit Δ_{ik}. Das Produkt

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\,\Delta_{ik} \tag{17}$$

nennen wir das *algebraische Komplement von* a_{ik}. Wir wollen nun zeigen, daß die algebraischen Komplemente genau die Koeffizienten der homogenen linearen Funktion sind, von der wir bei der Betrachtung der letzten Eigenschaft gesprochen hatten, d.h., für die i-te Zeile gilt

$$\Delta = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \cdots + A_{in}a_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

und ebenso für die k-te Spalte

$$\Delta = A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \cdots + A_{nk}a_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{19}$$

wobei Δ die Determinante bezeichnet. Wir müssen also folgendes nachweisen: Fassen wir in (8) alle Glieder, die ein gewisses Element a_{ik} als Faktor enthalten, zusammen, so ergibt sich als Koeffizient zu diesem a_{ik} genau das durch (17) definierte algebraische Komplement A_{ik}. Wir bezeichnen diesen Koeffizienten vorerst mit B_{ik} und zeigen, daß er eine Summe von Produkten aus $n-1$ Faktoren ist, in denen jedoch kein Element der i-ten Zeile und der k-ten Spalte vorkommt.

Es sei zunächst $i = k = 1$. Wir schreiben alle Summanden von (8) auf, die a_{11} enthalten:

$$a_{11} \sum_{(p_2,\ldots,p_n)} (-1)^{[1,p_2,\ldots,p_n]}\, a_{2p_2} \cdots a_{np_n}\,.$$

Die Summation muß hier über alle Permutationen $p_2, p_3, \ldots, p_n$ der Elemente $2, 3, \ldots, n$ erstreckt werden. In der vollen Permutation $1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ steht 1 mit allen folgenden Elementen in der natürlichen Reihenfolge. Hieraus folgt für die Anzahl der Inversionen

$$[1, p_2, \ldots, p_n] = [p_2, \ldots, p_n]\,,$$

wobei in beiden Fällen die Permutation $1, 2, \ldots, n$ die ausgezeichnete ist. Für den Koeffizienten von a_{11} ergibt sich somit

$$B_{11} \sum_{(p_2,\ldots,p_n)} = (-1)^{[p_2,\ldots,p_n]}\, a_{2p_2} \cdots a_{np_n}\,.$$

Diese Summe kommt in der Definition der Determinante vor, nur daß im Vergleich mit der ursprünglichen Determinante die erste Zeile und Spalte fehlen. Hieraus ergibt sich

$$B_{11} = \Delta_{11} = (-1)^{1+1}\,\Delta_{11} = A_{11}\,.$$

Unsere Behauptung ist damit für $i = k = 1$ bewiesen. Nun seien i und k beliebig. Wir vertauschen die i-te Zeile nacheinander mit der jeweils darüberstehenden, bis sie an der Stelle der ersten Zeile steht. Dazu sind $i-1$ Transpositionen der Zeilen nötig. Ebenso bringen wir die k-te Spalte durch Vertauschung nach und nach an die Stelle der ersten. Nun steht das Element a_{ik} in der linken oberen Ecke an der Stelle von a_{11}. Die i-te Zeile und die k-te Spalte stehen an erster Stelle, und die Anordnung der übrigen Zeilen und Spalten hat sich nicht geändert. Das obige Ergebnis zeigt, daß der Koeffizient von a_{ik} nach den erwähnten Permutationen gleich Δ_{ik} ist. Wir müssen aber noch die $(i-1)+(k-1)$ Transpositionen berücksichtigen, deren jede die Determinante mit dem Faktor -1 multipliziert. Insgesamt kommt der Faktor $(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k}$ hinzu, und der endgültige Ausdruck für die B_{ik} lautet

$$B_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{(-1)^{i+k}} = (-1)^{i+k}\,\Delta_{ik} = A_{ik}\,,$$

was zu beweisen war. Damit sind die Gleichungen (18) und (19) bewiesen. Ersetzen wir in Δ die Elemente der i-ten Zeile durch beliebige Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_n$, so ändern sich die übrigen Zeilen und damit auch der nach (17) bestimmte Koeffizient Δ_{ik} nicht. Der Wert der neuen Determinante ergibt sich also zu

$$\Delta' = A_{i1}c_1 + A_{i2}c_2 + \cdots + A_{in}c_n\,. \tag{20}$$

Nehmen wir insbesondere für $i \neq j$ die Elemente $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ der j-ten Zeile für die $c_1, \ldots, c_n$, so hat die Determinante Δ' zwei gleiche Zeilen, nämlich die i-te und die j-te, und ist also gleich 0. Somit ist

$$A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \cdots + A_{in}a_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)\,. \tag{21_1}$$

Ebenso gilt für die Spalten

$$A_{1k}a_{1l} + A_{2k}a_{2l} + \cdots + A_{nk}a_{nl} = 0 \qquad (k \neq l)\,. \tag{21_2}$$

Aus (19) und $(21_{1,2})$ ergibt sich die folgende Eigenschaft der Determinante, die sich als sehr wichtig erweisen wird.

Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) mit ihren algebraischen Komplementen und addiert die entstehenden Produkte, so erhält man den Wert der Determinante. Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) mit den algebraischen Komplementen einer anderen Zeile (Spalte) und summiert über diese Produkte, so ist die Summe stets gleich 0.

VI. Wir addieren zur ersten Zeile einer Determinante Δ die mit einem Faktor p multiplizierten Elemente der zweiten Zeile. Die Elemente der ersten Zeile sind dann $a_{1s} + pa_{2s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, und auf Grund der Eigenschaft IV ist die neue Determinante die Summe zweier Determinanten. Die erste ist gleich der ursprünglichen; die Elemente der ersten Zeile der zweiten Determinante haben die Form pa_{2s} $(s = 1, 2, \ldots, n)$, und ihre anderen Zeilen stimmen mit denen von Δ überein. Ziehen wir aus der ersten Zeile den Faktor p heraus, so stimmen die ersten beiden Zeilen der zweiten Determinante überein. Diese Determinante ist somit gleich 0. Hieraus folgt: *Addiert man in einer Determinante die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert die Determinante ihren Wert nicht.*

Wir wollen noch auf einige Bezeichnungen eingehen, die wir im folgenden benutzen werden. Es sei wie oben ein quadratisches Zahlenschema (6) gegeben und l eine positive ganze Zahl, $1 \leqq l \leqq n$. Wir führen für die aus den Zeilen mit den Indizes $p_1, p_2, \ldots, p_l$ und den Spalten mit den Indizes $q_1, q_2, \ldots, q_l$ des Schemas (6) gebildete Determinante l-ten Grades folgende Bezeichnung ein:

$$A\begin{pmatrix} p_1, p_2, \ldots, p_l \\ q_1, q_2, \ldots, q_l \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{p_1q_1} & a_{p_1q_2} & \cdots & a_{p_1q_l} \\ a_{p_2q_1} & a_{p_2q_2} & \cdots & a_{p_2q_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p_lq_1} & a_{p_lq_2} & \cdots & a_{p_lq_l} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Als Determinante ersten Grades, die aus einer einzigen Zahl a gebildet wird, bezeichnet man dabei gewöhnlich diese Zahl a selbst. Somit ist $A\binom{p}{q} = a_{pq}$. Die Zahlenfolgen $p_1, \dots, p_l$ und $q_1, \dots, q_l$ können auch in anderer als in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen p_s und q_s angeordnet sein. Sind die beiden Zahlenfolgen jedoch in natürlicher Reihenfolge angeordnet, so nennt man die Determinante (22) *Minor* des Grades l der Determinante (8). Die Determinante (22) erhält man aus (8) durch Streichen von $n - l$ Zeilen und $n - l$ Spalten. Die Indizes der gestrichenen Zeilen und Spalten seien in natürlicher Reihenfolge $r_1, r_2, \dots, r_{n-l}$ bzw. $s_1, s_2, \dots, s_{n-l}$. Der Minor

$$A\begin{pmatrix} r_1, r_2, \dots, r_{n-l} \\ s_1, s_2, \dots, s_{n-l} \end{pmatrix}$$

heißt zu (22) komplementär, und der Ausdruck

$$(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_l+q_1+q_2+\cdots+q_l} A\begin{pmatrix} r_1, r_2, \dots, r_{n-l} \\ s_1, s_2, \dots, s_{n-l} \end{pmatrix} \tag{22_1}$$

heißt *algebraisches Komplement* zu (22). Für ein Element a_{ik} stimmt diese Definition des algebraischen Komplements mit der früheren Definition (17) überein.

Das algebraische Komplement (22_1) bezeichnen wir mit

$$A'\begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots, p_l \\ q_1, q_2, \dots, q_l \end{pmatrix}.$$

Es ist durch die Angabe der Determinante (22), d. h. durch die Angabe der Zeilenindizes $p_1, p_2, \dots, p_l$ und der Spaltenindizes $q_1, q_2, \dots, q_l$ vollständig bestimmt.

Wir halten die Zeilenindizes fest. Die Determinante ist offenbar ein homogenes Polynom l-ten Grades der Elemente dieser Zeilen und läßt sich, wie man zeigen kann, in der Form

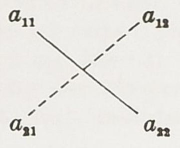
$$\Delta = \sum_{q_1<q_2<\cdots<q_l} A\begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots, p_l \\ q_1, q_2, \dots, q_l \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots, p_l \\ q_1, q_2, \dots, q_l \end{pmatrix} \tag{23}$$

darstellen (Entwicklungssatz von LAPLACE). Dabei ist über alle möglichen monotonen Teilfolgen $q_1, q_2, \dots, q_l$ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu summieren. Die Anzahl der Summanden ist gleich der Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur l-ten Klasse:

$$\binom{n}{l} = \frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{l!}.$$

Die Anordnung der Zahlen q_s spielt dabei nämlich keine Rolle, da man sie bei der Bildung (23) nur in natürlicher Reihenfolge betrachtet. Für $l = 1$ gilt $A\binom{p_1}{q_1} = a_{p_1q_1}$, und (23) geht in (18) über mit $i = p_1$. Man kann leicht eine analoge Zerlegung von Δ nach den Elementen irgendwie ausgewählter Spalten aufstellen. Wir werden im folgenden die Formel (23) nicht benutzen und beweisen sie daher auch nicht.

4. Berechnung von Determinanten. Die Berechnung einer Determinante zweiten Grades ist äußerst einfach. Nach (11) genügt es, das Schema



aufzuschreiben und das Produkt der in der ausgezogenen Diagonalen stehenden Elemente mit Pluszeichen, das der in der gestrichelten Diagonalen stehenden Elemente mit Minuszeichen zu nehmen.

Eine Determinante dritten Grades wird explizit durch (3) gegeben. Man zeigt leicht, daß man sie folgendermaßen berechnen kann: Wir schreiben das zu der Determinante gehörige Schema auf und setzen die erste und zweite Spalte noch einmal rechts daneben. Dann erhalten wir ein Schema, das sechs Diagonalen mit je drei Elementen enthält:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Wir nehmen die Produkte der Elemente der ausgezogenen Diagonalen mit Pluszeichen und die der gestrichelten Diagonalen mit Minuszeichen. Die Summe dieser Produkte ergibt die Determinante (*Sarrussche Regel*).

Dieses Verfahren läßt sich nicht auf Determinanten höheren Grades verallgemeinern; für sie muß man andere Wege einschlagen, um die Berechnung abzukürzen. Nützlich ist z. B. die im vorigen Abschnitt gezeigte Eigenschaft VI der Determinante. Wir wollen uns das an einem Beispiel klarmachen. Wir nehmen eine Determinante vierten Grades,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

multiplizieren die dritte Zeile mit -2 und addieren sie zur zweiten; außerdem multiplizieren wir dieselbe Zeile mit 3, addieren sie zur vierten und subtrahieren sie von der ersten. So kommen wir mit Hilfe der erwähnten Eigenschaft zu einer Determinante, die gleich der obigen ist, aber in der ersten Spalte drei Nullen hat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -16 & -11 & -6 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 26 & 13 & 7 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir gemäß Formel (19) nach der ersten Spalte, so folgt

$$\Delta = \begin{vmatrix} -16 & -11 & -6 \\ -13 & -4 & 1 \\ 26 & 13 & 7 \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir die dritte Spalte mit 4 und addieren sie zur zweiten, multiplizieren sie dann mit 13 und adddieren sie zur ersten, so erhalten wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} -94 & -35 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 117 & 41 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -94 & -35 \\ 117 & 41 \end{vmatrix} = 94 \cdot 41 - 35 \cdot 117 = -241 .$$